# *Домашнее задание №8*

***1***. *Случайная величина* $\xi$ *задана функцией распределения* $F_\xi(x) = \begin{cases} 0\ ,\ \ x \le 0 \\ a\sin 2x\ ,\ \ 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1\ ,\ \ x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ *коэффициент a, плотность распределения.*

***Решение***:

*Найдем a:*

*Чтобы была правостояинтной и непрерывной в точке* $x = \frac{\pi}{2}$*:*

$$a\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = a = 1 \Rightarrow a = 1.$$

*Найдем плотность* $f_\xi(x)$

$$f_\xi(x) = F'(x) = \begin{cases} 0\ ,\ \ x \le 0 \\ \frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\sin x\cos x = \sin(2x)\ ,\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0\ ,\ \ x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

***Ответ***: $a = 1,\ \ f_\xi(x) = \begin{cases} \sin(2x)\ ,\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0\ ,\ \textit{иначе.} \end{cases}$

---

***2***. *Плотность распределения СВ* $\xi$ *равна* $f_\xi(x) = \begin{cases} 0\ ,\ \ x \le 0\ ,\ \ x > \frac{\pi}{4} \\ a\cos 2x\ ,\ \ 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 1\ ,\ \ x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$*. Найти коэффициент a, функцию распределения и вероятность попадания в интервал* $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

***Решение***:

*Коэффициент a:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\cos 2x\ dx = 1 \Rightarrow a \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

*Функция распределения* $F_\xi(x)$*:*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0\ ,\ \ x \le 0 \\ \int_0^x 2\cos 2t\ dt = \sin 2x\ ,\ \ 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 1\ ,\ \ x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

*Вероятность* $P\left(0 < \xi < \frac{\pi}{6}\right)$*:*

$$F_\xi\left(\frac{\pi}{6}\right) - F_\xi(0) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

***Ответ***: $a = 2,\ \ F_\xi(x) = \begin{cases} 0\ ,\ \ x \le 0 \\ \int_0^x 2\cos 2t\ dt = \sin 2x\ ,\ \ 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 1\ ,\ \ x > \frac{\pi}{4} \end{cases},\ \ P\left(0 < \xi < \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

---

***3***. *Плотность распределения СВ* $\xi$ *равна* $f_\xi(x) = \begin{cases} 0\ \ ,\ \ x \le -1\ \ ,\ \ x > 1 \\ \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\ \ ,\ \ -1 < x \le 1 \end{cases}$*. Найти коэффициент a, функцию распределения и вероятность попадания в интервал* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

***Решение***:

*Коэффициент a:*

$$\int_{-1}^{1} \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} dx = a[\arcsin x]_{-1}^{1} = a\pi = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}$$

*Функция распределения:*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0\ , \quad x \le -1 \\ \frac{\arcsin x + \frac{\pi}{2}}{\pi}\ , \ -1 < x \le 1 \\ 1\ , \quad x > 1 \end{cases}$$

*Вероятность* $P\left(0 < \xi < \frac{1}{2}\right)$*:*

$$F_\xi\left(\frac{1}{2}\right) - F_{\xi(0)} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

***Ответ***: $a = \frac{1}{\pi},\ F_x i(x) = \begin{cases} 0\ ,\ x \le -1 \\ \frac{\arcsin x + \frac{\pi}{2}}{\pi}\ ,\ -1 < x \le 1 \\ 1\ ,\ x > 1 \end{cases},\ P\left(0 < \xi < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}.$

---

***4***. *Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее 3 мин.*

***Решение***:

*Пусть* $\xi$ *— время ожидания автобуса.*

*Так как пассажир приходит случайно,* $\xi$ *равномерно распределена на интервале от 0 до 5 минут (от последнего автобуса до следующего):*

$$\xi \sim U(0, 5)$$

*Плотность равномерного распределения на* $[0, 5]$*:*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{5}, \quad 0 \le x \le 5$$

*Функция распределения:*

$$F_\xi(x) = P(\xi \le x) = \int_0^x f_\xi(t)\ dt = \frac{x}{5}, \quad 0 \le x \le 5$$

*Находим вероятность*

*Нужно* $P(\xi < 3)$*:*

$$P(\xi < 3) = \int_0^3 f_\xi(x)\ dx = \int_0^3 \frac{1}{5}\ dx = \frac{3}{5} = 0.6$$

***Ответ***: 0.6.

---

***5***. *Случайная величина* $\xi$ *задана плотностью* $f_\xi(x) = 2e^{-2x}$. *Найти вероятность попадания в интервал* $(1, 2)$.

***Ответ***: $P(1 < \xi < 2) = \int_1^2 2e^{-2x}\ dx = \left[-e^{-2x}\right]_1^2 = e^{-2} - e^{-4} \approx 0.117.$

---

***6***. *Производится взвешивание некоторого вещества. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону распределения с* $a = 0,\ \ \sigma = 20$ *г. Найдите вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей, по модулю* $10$ *г.*

***Решение***: *Для нормальной случайной величины вероятность через стандартное нормальное распределение* $Z \sim N(0, 1)$ *вычисляется так:*

$$Z = \frac{\xi - a}{\sigma}$$

*Здесь* $a = 0, \sigma = 20$, *значит:*

$$Z = \frac{\xi}{20}$$

*Перевод интервала*

*Нам нужно:*

$$P(-10 \leq \xi \leq 10) = P((-10)(20) \leq Z \leq (10)(20)) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$$

*Используем функцию стандартного нормального распределения* $\Phi(z)$

$$P(-0.5 \leq Z \leq 0.5) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5)$$

*Свойство функции распределения:*

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

*Тогда:*

$$P(-0.5 \leq Z \leq 0.5) = \Phi(0.5) - (1 - \Phi(0.5)) = 2\Phi(0.5) - 1$$

*Находим численно*

*Стандартные таблицы:*

$$\Phi(0.5) \approx 0.6915$$

*Тогда:*

$$P(-0.5 \leq Z \leq 0.5) = 2 \cdot 0.6915 - 1 = 1.383 - 1 = 0.383$$

***Ответ***: $0.383$.