

Формула полной вероятности.

Полная вероятность.

2. 45% телевизоров, имеющихся в магазине, изготовлены на I-ом заводе, 15% — на II-ом, остальные — на III-ем заводе. Вероятности того, что телевизоры не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны 0.96; 0.84; 0.9 соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

Решение: Пусть событие A - телевизор выдержит гарантию. B_i - сделан на заводе $i \in \{I, II, III\}$.

$$P(B_1) = 0.45, \quad P(B_2) = 0.15, \quad P(B_3) = 1 - 0.45 - 0.15 = 0.40$$

$$P(A | B_1) = 0.96, \quad P(A | B_2) = 0.84 \quad P(A | B_3) = 0.90$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A | B_i) = \\ &= P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + P(B_3)P(A | B_3) = \\ &= 0.45 \cdot 0.96 + 0.15 \cdot 0.84 + 0.40 \cdot 0.90 = 0.432 + 0.126 + 0.360 = 0.918 \end{aligned}$$

Ответ: 0.918

3. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0.25% брака, второй — 0.4%, третий — 0.6%. Какова вероятность попадания на сборку доброкачественной детали, если с первого автомата поступило 2000, со второго — 1500 и с третьего — 1300 деталей?

Решение: Пусть G - событие “деталь годная”, B_i - автомат i . Поступило $N_1 = 2000$, $N_2 = 1500$, $N_3 = 1300$, $N = 4800$, доля брака $q_1 = 0.0025$, $q_2 = 0.004$, $q_3 = 0.006$, доля годных $p_1 = 0.9975$, $p_2 = 0.996$, $p_3 = 0.994$.

Доли деталей по автоматам:

$$P(B_1) = \frac{N_1}{N} = \frac{2000}{4800} = \frac{5}{12}, \quad P(B_2) = \frac{1500}{4800} = \frac{5}{16}, \quad P(B_3) = \frac{1300}{4800} = \frac{13}{48}$$

По закону полной вероятности:

$$P(G) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(G | B_i)$$

Перепишем:

$$P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(\overline{G} | B_i).$$

Здесь $P(\overline{G} | B_i) = q_i$.

$$q_1 = \frac{1}{400}, \quad q_2 = \frac{1}{250}, \quad q_3 = \frac{3}{500}.$$

Тогда:

$$P(\overline{G}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{400} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{250} + \frac{13}{48} \cdot \frac{3}{500} = \frac{47}{12000}.$$

Значит:

$$P(G) = 1 - \frac{47}{12000} = \frac{11953}{12000} \approx 0.996083$$

Ответ: 0.996083

4. Вероятность того, что контрольную работу с первого раза напишет отличник, равна 0.9; хорошист – 0.7; троечник – 0.4. Найти вероятность того, что наудачу выбранный ученик напишет контрольную работу, если соотношение отличников, хорошистов и троечников в классе 1 : 3 : 5.

Решение: Пусть событие A - ученик напишет контрольную с первого раза. Категории B_1 - отличник, B_2 - хорошист, B_3 - троечник. Условные вероятности $P(A | B_1) = 0.9$, $P(A | B_2) = 0.7$, $P(A | B_3) = 0.4$.

Соотношение в классе 1 : 3 : 5. Сумма долей $1 + 3 + 5 = 9$, значит

$$P(B_1) = \frac{1}{9}, \quad P(B_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad P(B_3) = \frac{5}{9}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A | B_i) = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{9} \approx 0.556$$

Ответ: 0.556

5. Студент знает 24 билета из 30. В каком случае вероятность вытащить счастливый билет для него больше, если он идет сдавать экзамен первым или если — вторым?

Решение: Если идти первым, то вероятность “счастливого” билета равна:

$$P_{1-й} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

Пусть K - первый вытянул “известный” нашему студенту билет. $\overline{K}$ - первый вытянул “неизвестный”.

Тогда

$$P_{2-й} = P(K) \cdot P(\text{успех} | K) + P(\overline{K}) \cdot P(\text{успех} | \overline{K})$$

$$P(K) = \frac{24}{30}, \quad P(\overline{K}) = \frac{6}{30}$$

Если K случилось, осталось 29 билетов, из них “известных” 23, значит $P(\text{успех} | K) = \frac{23}{29}$.

Если $\overline{K}$ случилось, осталось “известных” 24 из 29: $P(\text{успех} | \overline{K}) = \frac{24}{29}$

Подставив, получим:

$$P_{2-й} = \frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} + \frac{6}{30} \cdot \frac{24}{29} = \frac{4}{5}$$

Ответ: вероятность одинакова и равна $\frac{4}{5}$

6. В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от 1 до 9, во второй от 10 до 20 и в третьей от 21 до 30. Из случайно выбранной урны берется шар. Какова вероятность того, что его номер делится на 3?

Решение: три урны выбираются равновероятно, затем из каждой берется случайный шар. Пусть U_1 - урна с числами 1, ..., 9, U_2 - урна с

числами 10, ..., 20, U_3 урна с числами 21, ..., 30. A - событие "номер делится на 3".

В U_1 : кратные 3 - 3, 6, 9, то есть $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$:

$$P(A | U_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

В U_2 : кратные 3 - 12, 15, 18, то есть $\frac{3}{11}$:

$$P(A | U_2) = \frac{3}{11}$$

В U_3 : кратные 3 - 21, 24, 27, 30, то есть $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$:

$$P(A | U_3) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

По закону полной вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{3}(P(A | U_1) + P(A | U_2) + P(A | U_3)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{11} + \frac{2}{5}\right) \approx 0.33535$$

Ответ: 0.33535

7. Из ящика, содержащего 4 белых и 6 черных шаров, утеряно два шара. Какова вероятность извлечь после этого два шара черного цвета?

Решение: Представим, что все 10 шаров перемешали, и первые 2 утеряны. В случайной перестановке любой набор из двух позиций равновероятно сожержит любую пару шаров. Значит вероятность того, что именно позиции 3 и 4 окажутся черными - такая же, как если бы мы просто сразу вытащили 2 шара из 10 без всяких потерь.

Получим:

$$P(\text{оба черные}) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

8. В первом ящике 5 белых и 5 черных шаров, а во втором – 4 белых и 4 черных шара. Из первого во второй перекладывают 2 шара. Определить вероятность извлечения белого шара из второго ящика.

Решение: Пусть K число белых шаров, переложённых из первого ящика во второй ($K \in \{0, 1, 2\}$).

В первом ящике изначально 5 белых и 5 черных, перекладываем 2 шара:

$$P(K = 0) = \frac{C_5^0 C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9},$$

$$P(K = 1) = \frac{C_5^1 C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9},$$

$$P(K = 2) = \frac{C_5^2 C_5^0}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

Во втором ящике было 4 белых и 4 черных. После перекладки там становится $8 + 2 = 10$ шаров, из них белых $4 + K$. При случайном вытягивании шара из второго ящика:

$$P(\text{белый} \mid K) = \frac{4 + K}{10}$$

По формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(\text{белый}) &= \sum_{k=0}^2 P(K = k) \frac{4 + k}{10} = \frac{1}{10} \left(\frac{2}{9} \cdot 4 + \frac{5}{9} \cdot 5 + \frac{2}{9} \cdot 6 \right) = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{8 + 25 + 12}{9} = \frac{1}{10} \cdot \frac{45}{9} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

9. Три стрелка случайным образом распределяют между собой 3 заряда, один из которых холостой. Стрелки попадают в мишень с вероятностями $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{8}$ соответственно. Какова вероятность хотя бы одного попадания в мишень?

Решение: Пусть есть 3 стрелка: S_1, S_2, S_3 . Они имеют вероятности попадания $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{3}{4}$, $p_3 = \frac{7}{8}$. Есть 3 заряда, из них 2 боевых и 1

холостой. Заряды случайно распределяются между стрелками: это то же самое, что случайно выбрать, кто получит холостой. Все 3 варианта равновероятны.

Рассмотрим все случаи:

1) Холостой у S_1 , стреляют S_2, S_3 .

Вероятность хотя бы одного попадания:

$$1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

2) Холостой у S_2 , стреляют S_1, S_3 .

$$1 - (1 - p_1)(1 - p_3) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

3) Холостой у S_3 , стреляют S_1, S_2 .

$$1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(\text{хотя бы одно попадание}) = \frac{1}{3} \left(\frac{31}{32} + \frac{15}{16} + \frac{7}{8} \right) = 0.9271$$

Ответ: 0.9271

10. Два стрелка стреляют по одному разу, независимо друг от друга, выбирая одну из двух мишеней. Вероятность выбора первой мишени для первого стрелка 0.5, а для второго — 0.6. Вероятность попадания в выбранную мишень для каждого стрелка равна 0.8 и 0.9 соответственно. Какова вероятность ровно одного попадания во вторую мишень?

Решение: Пусть $H_{2,1}$ - первый стрелок попал во вторую мишень, $H_{2,2}$ - второй стрелок попал во вторую мишень. Искомое событие: ровно одно попадание во вторую мишень - это

$$(H_{2,1} \cap \overline{H_{2,2}}) \cup (\overline{H_{2,1}} \cap H_{2,2})$$

а события для разных стрелков независимы.

2. Вероятность попасть именно во вторую мишень для каждого:

Первый выбирает вторую с вероятностью 0.5 и, выбрав её, попадает с 0.8:

$$P(H_{2,1}) = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4$$

Второй выбирает вторую с вероятностью 0.4 (потому что первую он выбирает 0.6) и попадает с 0.9:

$$P(H_{2,2}) = 0.4 \cdot 0.9 = 0.36$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(\text{ровно одно попадание во 2-ю}) &= P(H_{2,1})(1 - P(H_{2,1}))P(H_{2,2}) = \\ &= 0.4 \cdot (1 - 0.36) + (1 - 0.4) \cdot 0.36 = \frac{59}{125} \end{aligned}$$

Ответ: 0.472

Формула Байеса.

11. Предположим, что 5% мужчин и 0.25% женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек мужчина.

Решение: Пусть M - человек - мужчина, W - человек - женщина, D - человек - дальтоник. Тогда:

$$P(M) = P(W) = \frac{1}{2}, \quad P(D | M) = 0.05 \quad P(D | W) = 0.0025$$

По Байесу:

$$\begin{aligned} P(M | D) &= \frac{P(M)P(D | M)}{P(M)P(D | M) + P(W)P(D | W)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.05}{\frac{1}{2} \cdot 0.05 + \frac{1}{2} \cdot 0.0025} = 0.95238 \end{aligned}$$

Ответ: 0.95238

12. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно и 1 — плохо. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, подготовленный хорошо — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен: а. отлично; б. плохо.

В группе 10 студентов: 3 - “отлично”, 4 - “хорошо”, 2 - “посредственно”, 1 - “плохо”. Это априорные вероятности выбора студента:

$$P(O) = \frac{3}{10}, \quad P(H) = \frac{4}{10}, \quad P(M) = \frac{2}{10}, \quad P(P) = \frac{1}{10}$$

Из 20 экзаменационных вопросов студент “знает” k штук:

$$k_O = 20, \quad k_H = 16, \quad k_M = 10, \quad k_P = 5$$

Экзаменатор задает 3 вопроса наугад (без возвращения) из 20. Студент “ответил на 3 вопроса” = ответил на все 3 заданных.

Если студент знает k из 20, то вероятность, что все 3 заданных попадут в известные, равна

$$P(\text{ответил } 3 \mid k) = \frac{C_k^3}{C_{20}^3}$$

Подставляем:

$$C_{20}^3 = 1140,$$

$$P(\text{ответил } 3 \mid O) = 1,$$

$$P(\text{ответил } 3 \mid H) = \frac{C_{16}^3}{1140} = \frac{560}{1140} = \frac{28}{57}$$

$$P(\text{ответил } 3 \mid M) = \frac{C_{10}^3}{1140} = \frac{120}{1140} = \frac{2}{19}$$

$$P(\text{ответил } 3 \mid P) = \frac{C_5^3}{1140} = \frac{10}{1140} = \frac{1}{114}$$

Ненормированные веса

$$w_O = P(O)P(\text{ответил } 3 \mid O) = \frac{3}{10},$$

$$w_H = \frac{4}{10} \cdot \frac{28}{57} = \frac{56}{285},$$

$$w_M = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{19} = \frac{2}{95} w_P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{114} = \frac{1}{1140}$$

Сумма весов:

$$W = w_O + w_H + w_M + w_P = \frac{197}{380}.$$

Апостериорные вероятности (делим каждый вес на W):

$$P(O \mid \text{ответил } 3) = \frac{w_O}{W} = \frac{114}{197} \approx 0.579,$$

$$P(H \mid \text{ответил } 3) = \frac{w_H}{W} = \frac{224}{591} \approx 0.379,$$

$$P(M \mid \text{ответил } 3) = \frac{w_M}{W} = \frac{8}{197} \approx 0.041,$$

$$P(P \mid \text{ответил } 3) = \frac{w_P}{W} = \frac{1}{591} \approx 0.00169.$$

Ответ: а) $\frac{114}{197} = 0.579$; б) $\frac{1}{591} \approx 0.00169$

13. Из четырех игральных костей одна фальшивая — на ней 6 очков выпадает с вероятностью $\frac{1}{3}$. При бросании случайно выбранной кости выпала шестерка. Какова вероятность того, что была выбрана фальшивая кость?

Решение: Пусть F - выбрана фальшивая кость, N - выбрана нормальная кость, S - выпала шестерка.

Дано:

$$P(F) = \frac{1}{4}, \quad P(N) = \frac{3}{4}$$

Вероятности выпадения шестерки:

$$P(S \mid F) = \frac{1}{3}, \quad P(S \mid N) = \frac{1}{6}$$

По формуле общей вероятности:

$$P(S) = P(F)P(S | F) + P(N)P(S | N) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$$

Вычислим:

$$P(S) = \frac{1}{12} + \frac{3}{24} = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

По формуле Байеса:

$$P(F | S) = \frac{P(F)P(S | F)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{24}} = 0.4$$

Ответ: 0.4

14. Игроки могут с равной вероятностью играть в одну из двух игр. В одной игре используется одна игральная кость, и счет в игре равен количеству выпавших очков. В другой игре используются две игральные кости, и счет в игре равен сумме выпавших очков. Вы слышите, что выпало 4 очка. В какую игру вероятнее всего играли?

Решение: Пусть G_1 - игра с одной костью, G_2 - с двумя. Приоры равны: $P(G_1) = P(G_2) = \frac{1}{2}$, S - счет равен 4.

Если G_1 : $P(S | G_1) = P(\text{выпало 4 на d6}) = \frac{1}{6}$. Если G_2 : $P(S | G_2) = P(\text{сумма 2d6} = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

$$P(G_1 | S) \propto \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}, \quad P(G_2 | S) \propto \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

Нормируем:

$$P(G_1 | S) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{24}} = \frac{2}{3}, \quad P(G_2 | S) = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{24}} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: С вероятностью $\frac{2}{3}$ играли одной костью, а двумя - $\frac{1}{3}$

Домашняя работа.

1. Из 1000 ламп 100 принадлежит первой партии, 250 — второй и остальные — третьей партии. В первой партии 6%, во второй — 5%, в

третьей — 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Какова вероятность того, что выбранная лампа бракованная?

Решение: Пусть B - лампа бракована. P_1, P_2, P_3 - лампа из 1-й, 2-й, 3-й партии.

Тогда:

$$P(P_1) = \frac{100}{1000} = 0.1, \quad P(P_2) = \frac{250}{1000} = 0.25, \quad P(P_3) = \frac{650}{1000} = 0.65$$

$$P(B | P_1) = 0.06, \quad P(B | P_2) = 0.05, \quad P(B | P_3) = 0.04$$

По формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^3 P(P_i)P(B | P_i) = \\ &= 0.1 \cdot 0.06 + 0.25 \cdot 0.05 + 0.65 \cdot 0.04 = \frac{89}{2000} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{89}{2000}$

2. Автомобиль на перекрестке может поехать прямо, а может свернуть направо или налево. Вероятность попадания в «пробку» при проезде прямо равна 0.5; направо – 0.3; налево – 0.2. Определить вероятность беспрепятственного проезда.

Решение: Пусть A_1 - машина едет прямо, A_2 - машина поворачивает направо, A_3 - машина поворачивает налево.

Эти 3 события

Ответ:

3. В торговую фирму поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении 5:2:3. Телевизоры не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96%, 92% и 94% случаев. Найти вероятность того, что купленный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

4. Имеются три одинаковых ящика. В первом лежат 2 белых и 2 черных шара; во втором — 3 черных шара; в третьем — 1 черный и 5 белых шара. Некто случайным образом вынимает шар из наугад выбранного ящика. Какова вероятность, что шар будет белый?

5. В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от 10 до 25, во второй от 26 до 32 и в третьей от 33 до 45 включительно. Из случайно выбранной урны берется шар. Какова вероятность того, что его номер будет простым числом?

6. Берут две колоды по 36 карт. Из первой колоды во вторую перекладывают 2 карты. Затем из второй колоды берется одна карта. Какова вероятность того, что это дама?

7. В альбоме 7 негашеных и 6 гашеных марок. Из них наудачу извлекаются 2 марки, подвергаются гашению и возвращаются в альбом. После чего вновь извлекают 3 марки. Определить вероятность того, что все 3 марки чистые.

8. Среди трех игральные кости одна фальшивая. На фальшивой кости шестерка появляется с вероятностью $\frac{1}{3}$. Бросили две игральные кости. Определить вероятность того, что выпали две шестерки.