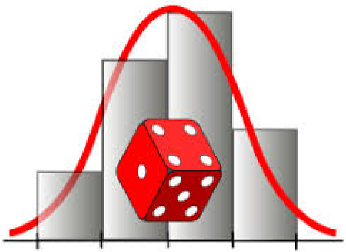
Национальный исследовательский университет ИТМО



# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

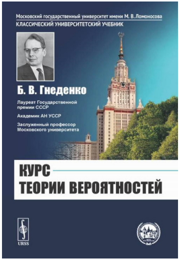
Лектор курса:

кандидат физ.-мат. наук, доцент Виталий Алексеевич Кочевадов

# Тематическое содержание курса

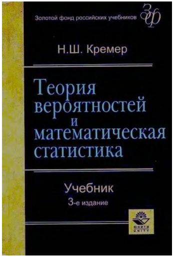


# Неполный список рекомендуемой литературы

1) 


2) 


3) 


4) 


1. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей;
2. В. М. Буре, Е. М. Парилина, А. А. Седаков.
Теория вероятностей и вероятностные модели;
3. А. В. Печинкин, О. И. Тескин, Г. М. Цветкова и др. Теория вероятностей;
4. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика;
5. Н. Ш. Кремер. Теория вероятностей и математическая статистика;
6. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том I. Том II.

# Компоненты экзаменационной оценки и где их искать!

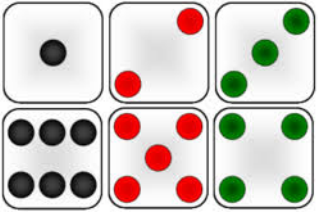
Полное методическое и информационное обеспечение курса в телеграм-группе:
Математическая кибернетика содержит ссылку на гл. табл. курса!

| источники баллов | количество баллов |
|---|---|
| лекции / практ. занятия | до 5* / до 15 |
| контрольные точки | до 65 (имеют дедлайн) |
| экзамен | до 20 |
| дополнительные баллы | до 5* |

| результат освоения курса | интерпретация |
|---|---|
| $\mathbb{A}$ | $[91; 100^*]$ отлично |
| $\mathbb{B}$ | $[84; 90]$ хорошо |
| $\mathbb{C}$ | $[75; 83]$ хорошо |
| $\mathbb{D}$ | $[68; 74]$ удовл. |
| $\mathbb{E}$ | $[60; 67]$ удовл. |
| $\mathbb{FX}$ | $[10; 59]$ неудовл. |
| $\mathbb{FXX}$ – незаурядный талант! | $[0; 9]$ |

Тема # 1

# ПРОСТРАНСТВО СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ



- краткий обзор математических подходов в работе с неопределенностью;
- теория вероятностей и стохастический анализ: предмет исследования;
- пространство элементарных исходов;
- формулы комбинаторики;
- случайные события;
- операции над случайными событиями;
- алгебры и сигма-алгебра событий.

# Примеры для самостоятельного анализа

# Рефлексивный тест по материалу лекции

# Рекомендации по литературе и по подготовке к практическому занятию

Детерминированность

– VS –

Неопределенность

| | | |
|---|---|---|
| 1. Теория вероятностей (стохастика) | хорошо развита | требует сохранения постоянства среды (неизменности условий) и статистической устойчивости |
| 2. Нечеткая математика | активно развивается | основывается на экспертных суждениях и оценках |
| 3. Интервальный анализ | набирает обороты | оперирует диапазоном возможных значений неизвестной величины |

## Наблюдение 1 (Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Изд. 11, 2015 г.)

Теория вероятностей – математическая наука,
изучающая закономерности случайных явлений.

Но что есть случайное явление и случайность в целом?

ключ: – НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ ИСХОДА –

## Наблюдение 2 (А. Н. Ширяев. Вероятность-1. Издание 2013 г.)

Теория вероятностей – математический анализ случайных явлений.

В случайных явлениях отсутствует детерминистическая регулярность, но есть статистическая регулярность (статистическая устойчивость частот)! А значит, мы должны обладать возможностью "неограниченного повторения" эксперимента или опыта (т. е. процесса) при фиксированном комплексе условий его реализации.

## Наблюдение 3 (А.В. Печинкин. Теория вероятностей. Изд. МГТУ им.Баумана '04 г.)

ТВ – раздел математики, в котором изучают модели случайных экспериментов.

При этом предполагается, что эксперимент может быть проведен любое число раз при неизменном комплексе условий, а его исходы статистически устойчивы.

---

В общем смысле, стохастика, как случайность, исследует явления, исход которых может быть описан только с помощью вероятностных законов.

## Наблюдение 4 ("Большой брат" – Google's AI assistant)

Стохастический анализ – область математики, изучающая случайные процессы.

Стохастический анализ включает в себя: теорию вероятностей, математический анализ, математическую статистику, ....

Он позволяет моделировать и анализировать системы, поведение которых не является полностью предсказуемым, а подвержено случайным изменениям.

## Определение 1

Элементарным исходом называют простейший (т. е. неделимый) исход опыта.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – конечный набор возможных исходов опыта, их совокупность $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ образует конечное пространство элементарных исходов (ПЭИ).

Пример 1 ▶

1. При однократном подбрасывании «правильной»* монеты ПЭИ: $\Omega = \{\text{Р}, \Gamma\}$;
2. При многократном (n раз) подбрасывании той же моменты ПЭИ примет вид
$$\Omega = \left\{\omega \,|\, \omega = (a_1, \ldots, a_n)\,,\, a_i \in \{\text{Р}, \Gamma\}\,, i = \overline{1, n}\right\}.$$
Каково общее количество возможных исходов такого эксперимента?
Конечно же: $|\Omega| = 2^n$ ;

## Определение 1

Элементарным исходом называют простейший (т. е. неделимый) исход опыта.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – конечный набор возможных исходов опыта, их совокупность $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ образует конечное пространство элементарных исходов (ПЭИ).

Пример 1 ▶

1. При однократном подбрасывании «правильной»* монеты ПЭИ: $\Omega = \{\text{Р}, \Gamma\}$;
2. При многократном (n раз) подбрасывании той же моменты ПЭИ примет вид

$$\Omega = \left\{\omega \,|\, \omega = (a_1, \ldots, a_n)\,, a_i \in \{\text{Р}, \Gamma\}\,, i = \overline{1, n}\right\}.$$

Каково общее количество возможных исходов такого эксперимента?

Конечно же: $|\Omega| = 2^n$ ;

## Определение 1

Элементарным исходом называют простейший (т. е. неделимый) исход опыта.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – конечный набор возможных исходов опыта, их совокупность $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ образует конечное пространство элементарных исходов (ПЭИ).

Пример 1 ▶

1. При однократном подбрасывании «правильной»* монеты ПЭИ: $\Omega = \{\text{Р}, \Gamma\}$;
2. При многократном (n раз) подбрасывании той же моменты ПЭИ примет вид
$$\Omega = \left\{\omega \,|\, \omega = (a_1, \ldots, a_n)\,, a_i \in \{\text{Р}, \Gamma\}\,, i = \overline{1, n}\right\}.$$
Каково общее количество возможных исходов такого эксперимента?
Конечно же: $|\Omega| = 2^n$ ;
3. Подбрасывается та же монета, если выпал Г, то подбрасывается шестигранная кость. Если же выпала Р, то снова подбрасывается монета. Каково ПЭИ?

## Определение 1

Элементарным исходом называют простейший (т. е. неделимый) исход опыта.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – конечный набор возможных исходов опыта, их совокупность $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ образует конечное пространство элементарных исходов (ПЭИ).

Пример 1 ►

1. При однократном подбрасывании «правильной»* монеты ПЭИ: $\Omega = \{\text{Р}, \text{Г}\}$;
2. При многократном (n раз) подбрасывании той же моменты ПЭИ примет вид
$$\Omega = \left\{\omega \,|\, \omega = (a_1, \ldots, a_n)\,, a_i \in \{\text{Р}, \text{Г}\}\,, i = \overline{1, n}\right\}.$$
Каково общее количество возможных исходов такого эксперимента?
Конечно же: $$|\Omega| = 2^n\ ;$$
3. Подбрасывается та же монета, если выпал Г, то подбрасывается шестигранная кость. Если же выпала Р, то снова подбрасывается монета. Каково ПЭИ?
$$\Omega = \{\text{Г}1, \text{Г}2, \text{Г}3, \text{Г}4, \text{Г}5, \text{Г}6, \text{РГ}, \text{РР}\}\,. \quad ◄$$

*) в дальнейшем это уточнение опускается и полагается истинным – как и для других объектов!

## Определение 2 (Если $\Omega$ конечно или счетно)

Все те подмножества $A \subseteq \Omega$, для которых по условиям эксперимента возможет ответ типа «исход $\omega \in A$» или «исход $\omega \notin A$», – будем называть случ.* событиями.

Пример 2 ► Пусть эксперимент состоит из трехкратного подбрасывания монеты.

Тогда ПЭИ ~ ПЭС (пр-во элем. событий): $\Omega = \{ГГГ, ГГР, \ldots, РРР\}$, $|\Omega| = 8$.

Можно выделить, например, подмножество $A = \{ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ\}$
– событие, заключающееся в выпадении не менее двух гербов.

Дайте вариант интерпретации следующим событиям:

1. $A = \{ГРР, РГР, РРГ\}$
2. $B = \{ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ\}$
3. $C = \{ГГГ, ГГР, РГР, РГГ\}$

Замечание!!! Если комплекс условий позволяет зафиксировать только результат первого броска, то ни одно из указанных множеств не является событием. ◄

* далее будем опускать слово "случайный" , так как у нас "все" события будут случайными !!!

Комбинаторика – раздел математики о комбинациях и перестановках.

Различаются упорядоченные комбинации, то есть

$$\forall\, a, b : a \neq b \to (a, b) \neq (b, a),$$

и неупорядоченные комбинации, то есть

$$\forall\, a, b : a \neq b \to (a, b) = (b, a),$$

при этом $a$ и $b$ могут быть необязательно числами!

Пример 3 ▶ Получателями гранта РНФ стали сразу трое студентов ИТМО – Антон, Дмитрий и Мария.

Выписывая набор получателей гранта можно указать любую комбинацию этих имен, например (Антон, Мария, Дмитрий), т. к. различать их не имеет смысла. Сколько комбинаций имен можно составить в этом случае?! Ответ: 6

А вот если они заняли на олимпиаде призовые и разные места, то их последовательность в наборе с порядком отражающем номер места будет принципиальной ◀

Количество способов переставить местами $n$ различных элементов определяется перестановкой

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

$$\underbrace{n}_{\substack{\text{число способов}\\ \text{выбрать 1-ый элемент}}} \cdot \underbrace{n-1}_{\substack{\text{число других способов}\\ \text{выбрать 2-ой элемент}}} \underbrace{\cdot}_{\cdots\cdots\cdots} \cdot \underbrace{1}_{\substack{\text{число способов}\\ \text{выбрать последний элемент}}} = n!$$

Пример 4 ▶ Каким числом способов, можно расставить на полке 3 разные книги?

$$a_1a_2a_3, \quad a_1a_3a_2, \quad a_3a_1a_2, \quad a_3a_2a_1, \quad a_2a_3a_1, \quad a_2a_1a_3 \qquad \blacktriangleleft$$

Кол-во способов сформировать упорядоченный набор из $m$ элементов выбирая их из различных $n$ элементов $(0 \leqslant m \leqslant n)$ определяется размещением из $n$ по $m$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

Пример 5 ▶ Каким числом способов можно сшить флаг (три горизонтальных полосы разного цвета и равной ширины), если имеется материал 5 цветов: красный, белый, голубой, зелёный и серый? Решение: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$ ◀

## Определение 3

Сочетанием из $n$ элементов по $m$ называется любое $m$-элементное подмножество исходного $n$-элементного множества

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 7 ▶ В студенческой группе 20 человек. Каким числом способов можно выбрать 5 человек на конференцию?

Решение: $$C_{20}^5 = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15504$$ ◀

Примечательный факт_1 Соотношение формул: $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_n}$

Примечательный факт_2 Величины $C_n^m$ называют биномиальными коэффициентами, это название связано с формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

Размещение с повторением: $\tilde{A}_n^m = n^m$ Перестановка с повторением: ?

Попробуйте самостоятельно получить формулу, опираясь на то, что при подсчёте числа комбинаций данного вида учитывается то, что при перестановке элементов одного типа местами фактически выборка не меняется.

$$\tilde{P}_n(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Пример 8 ▶ Дано множество $\{a, a, b, b, b, c, c\}$ состоящее из 7 элементов 3 типов. Найти количество перестановок с повторениями из 7 элементов.

Решение: $$\tilde{P}_7(2,3,2) = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210$$ ◀

Сочетаниями с повторениями из $n$ элементов по $m$ элементов называются любые множества, содержащие $m$ элементов, каждый из которых является элементом одного из $n$ типов

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^{n-1}$$

Пример 9 ▶ На почте имеются новогодние открытки 7 видов. Нужно купить 8 открыток. Каким числом способов это можно сделать?

Ответ: 3003 ◀

В большинстве источников термин "событие" отождествляется с фразой:

"событие произошло в результате опыта"

или

"событие заключается в появлении каких-то элементарных исходов".

Мы так же будем придерживаться этой прикладной интерпретации событий.

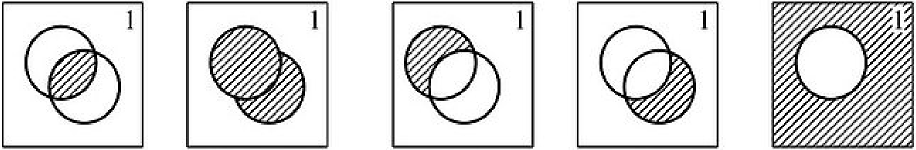
**Определение 4** (достоверное событие)

Событие, состоящее из всех элементарных исходов, т.е. обязательно происходящее в данном опыте, называется достоверным и обозначается также как и ПЭИ – $\Omega$.

**Определение 5** (невозможное событие)

Событие, не содержащее ни одного элементарного исхода, т. е. событие, которое никогда не произойдет, называется невозможным и обозначается как $\varnothing$.

Отталкиваясь от некоторой заданной системы множеств, являющихся событиями, можно образовывать новые события, отвечающие конструкциям высказываний с логическими связками «и», «или» и «не».




а) $A \cap B$ б) $A \cup B$ в) $A \setminus B$ г) $B \setminus A$ д) $\overline{A}$

а) $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \quad \text{и} \quad \omega \in B\}$, операция «$\cap$» коммутативна и ассоциативна;

б) $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$, операция «$\cup$» коммутативна и ассоциативна.

Если при этом события несовместные, т.е. $A \cap B = \varnothing$, тогда $A \cup B = A + B$;

в) $A \backslash B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ и } \omega \notin B\}$;

г) $B \backslash A = \{\omega \mid \omega \in B \text{ и } \omega \notin A\}$;

д) $\overline{A} = \{\omega \mid \omega \in \Omega \backslash A\}$.

Аналогично определяются операции объединения и пересечения на произвольное количество множеств: $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i.$

## Определение 6

События $A_1, \ldots, A_n$ называются попарно несовместными, если $\forall i, j = \overline{1, n}$ имеем $A_i \cap A_j = \varnothing$, а также – несовместными в совокупности, если $A_1 \cap \ldots \cap A_n = \varnothing$.

Приоритет операций над событиями (всегда выполнять слева направо, пжл!):

1) дополнение → 2) умножение → 3) объединение и разность.

Пример 10 ► Для $C = A_1 \bar{A}_2 B_1 \cup A_3 \bar{B}_2 \setminus B_3$, согласно порядку приоритета получаем

$$\underbrace{A_1 \overbrace{\left(\bar{A}_2\right)}^{1} B_1}_{2\text{ - по порядку}} \underbrace{\bigcup}_{5} \underbrace{A_3 \overbrace{\left(\bar{B}_2\right)}^{3}}_{4} \overbrace{\setminus}^{6} B_3$$

◀

Основные свойства операций над событиями:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Коммутативность: | $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ |
| 2 | Ассоциативность: | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| 3 | Дистрибутивность: | $(A \cup B)\, C = AC \cup BC, \quad AB \cup C = (A \cup C)\,(B \cup C)$ |
| 4 | Включение противоположного: | если $A \subset B$, тогда $\bar{B} \subset \bar{A}$ |
| 5 | Законы де Моргана: | $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ остаются справедливы для любого количества событий |

Все действия над событиями можно получить с помощью только двух операций – объединение и дополнение (или пересечение и дополнение). Основание этого утверждения базируется на законах де Моргана и соотношении: $A \backslash B = A\bar{B}$.

Пример 11 ▶ В международной конференции участвовало 120 человек. Из них 60 владеют русским языком, 48 – английским, 32 – немецким, 21 – русским и английским, 19 – английским и немецким, 15 – русским и немецким, а 10 человек владеют всеми тремя языками. Сколько участников конференции не владеют ни одним из этих языков?

Ответ: 25 ◀

Пример 12 ▶ В мешке находится 20 пронумерованных последовательно (от 1 до 20) шаров. Опыт состоит из однократного извлечения шара. При $k \in \mathbb{N}$ рассматриваются следующие события:

1) $A=\{n|n=2k, k\leqslant 10\}$, 2) $B=\{n|n=2k-1, k\leqslant 10\}$, 3) $C=\{n - \text{простое} : n\leqslant 20\}$,

из которых местный студент-шутник составил новые события:

$$D=\bar{A}\cap B\backslash C, \qquad E=\overline{\left(A\cup\bar{B}\right)},$$

$$F=\left(A\cup\left(A\cap\bar{B}\right)\right)\cap\left(A\cap\left(A\cup B\right)\right), \qquad G=\left(A\backslash B\right)\triangle\left(B\backslash A\right),$$

$$H=\left(A\backslash\left(B\backslash C\right)\right)\backslash\left(\left(A\backslash B\right)\backslash C\right), \qquad I=\left(A\cup B\cup C\right)\triangle\left(A\cap B\cap C\right).$$

Упростите и дайте интерпретацию событиям $D-I$, найти достоверные и невозможные.

Ответ: $D=B\backslash C=B\bar{C}$, $E=\bar{A}B=B\backslash A$, $F=A$, $G=A\triangle B$, $H=AC$, $I=\underbrace{\left(A+B+C\right)}_{\text{нужны ли скобки?!!!}}\backslash ABC$

Достоверны – G, I, невозможны – H. ◀

В результате проведения опыта мы всегда наблюдаем событие. Если по результату проведения опыта можно установить, произошли или нет события $A$ и $B$, то можно также сказать, произошли или нет события $\bar{A}$ и $\bar{B}$, а также их объединение, пересечение и разность. Таким образом, $\sigma$-алгебра событий обязана быть классом подмножеств, замкнутым относительно приведенных операций.

## Определение 7

Сигма-алгеброй ($\sigma$-алгеброй) $\mathcal{B}$ называют непустую систему подмножеств некоторого множества $J$, удовлетворяющую следующим двум условиям:

1. Если $A \subset \mathcal{B}$, то $\bar{A} \subset \mathcal{B}$;
2. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \subset \mathcal{B}$ , то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset \mathcal{B}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset \mathcal{B}$

Поскольку $J = A \cup \bar{A}$ и $\varnothing = \bar{J}$, то $J \subset \mathcal{B}$ и $\varnothing \subset \mathcal{B}$.

Рассмотрим пространство элементарных исходов $\Omega$. Элементы некоторой $\sigma$-алгебры $\mathcal{B}$, заданной на $\Omega$, будем называть событиями. В этом случае $\sigma$-алгебру в принято называть сигма-алгеброй событий.

Любая $\sigma$-алгебра событий содержит достоверное событие $\Omega$ и невозможное $\varnothing$. В случае конечного или счетного пространства элементарных исходов в качестве $\sigma$-алгебры событий обычно рассматривают множество всех подмножеств $\Omega$.

Внимание!!!

Если в условии 2 определения $\sigma$-алгебры счетное множество событий заменить на конечное, то получим определение алгебры событий.
Любая $\sigma$-алгебра событий обязательно является алгеброй событий.
Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример 13 ▶ Пусть опыт состоит в случайном бросании точки на числовую прямую $R^1 = (-\infty, +\infty)$, которая в данном случае будет представлять собой ПЭИ $\Omega$. Ясно, что, зная результат опыта, всегда можно установить, попала или нет точка в любой из промежутков $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$. Поэтому относительно $\sigma$-алгебры событий $\mathcal{B}$ предполагают, что она содержит все эти промежутки. ◀