

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ



- об условной вероятности;
- определение условной вероятности;
- связь между условной и безусловной вероятностями;
- формула умножения вероятностей;
- независимые и зависимые события.

Пусть события A и B связаны с одним и тем же опытом.

Допустим, что нам достоверно стало известно, что событие B наступило, но не известно, какой конкретно из элементарных исходов, составляющих событие B , произошел.

Может ли такая информация оказаться нам чем-либо полезной?

КОНЕЧНО! И как минимум постольку-поскольку:

- при поиске $P(A)$ позволяет учитывать дополнительную информацию;
- в ряде случаев помогает значительно упростить вычислительный процесс.

Предположим, что мы находимся в рамках классической схемы

Пусть событиям A и B соответствуют $n(A)$ и $n(B)$ элементарных исходов. Если событие B произошло, значит один из $n(B)$ исходов реализован. Тогда при определении $P(A)$ нужно выбирать из $n(B)$ исходов, среди которых событию A будет соответствовать $n(AB)$ исходов, то есть получаем, что

$$P(A|B) = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{n(AB)/n}{n(B)/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Обратимся к статистическому определению вероятности

Частота события A – есть $r(A) = \frac{n(A)}{n}$. Тогда условной частотой события A при условии, что B произошло (то есть $r_{A|B}$) естественно назвать частоту A , но лишь при тех исходах, в которых произошло B , то есть $r_{A|B} = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{r_{AB}}{r_B}$. Но тогда, так как

$$r_{AB} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(AB), \quad r_B \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(B) \quad \Rightarrow \quad r_{A|B} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Определение 1 (условная вероятность)

Условной вероятностью события A при условии наступления события B называют отношение вероятности пересечения A и B к вероятности события B :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

при условии того, что событие B не является невозможным.

Пример_3.1. ►

Рассмотрим опыт с однократным бросанием игральной кости, но не обычной, а с раскрашенными гранями: грани с цифрами 1, 3 и 6 окрашены красным, а грани с цифрами 2, 4 и 5 — белым цветом. При обозначениях: A_1 — выпадение нечетного числа очков; A_2 — выпадение четного числа очков; B — появление грани красного цвета, найти $P(A_1|B)$ и $P(A_2|B)$.

Решение:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A_1B)}{n}}{\frac{n(B)}{n}} = \frac{2}{6} : \frac{3}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \blacktriangleleft$$

Теорема 1

Условная вероятность обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Доказательство. ►

- ❶ аксиома неотрицательности: $P(A|B) \geq 0, P(B) > 0$;
- ❷ аксиома нормированности: т. к. $\Omega B = B \Rightarrow P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$;
- ❸ расширенная аксиома сложения: пусть $A_1, \dots, A_n, \dots$ – попарно несовместные события, тогда $(A_1 + \dots + A_n + \dots)B = A_1B + \dots + A_nB + \dots \Rightarrow$

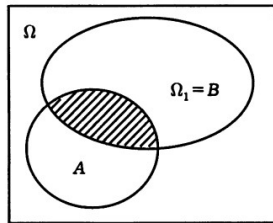
$$\begin{aligned} P(A_1 + \dots + A_n + \dots | B) &= \frac{P(A_1B + \dots + A_nB + \dots)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \dots + \frac{P(A_nB)}{P(B)} + \dots = \\ &= P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Смысл теоремы в том, что условная вероятность представляет собой безусловную вероятность, заданную на новом пространстве Ω_1 элементарных исходов, совпадающем с событием B .

Обратимся для наглядности к геометрической схеме

При практическом вычислении условной вероятности события A при условии, что событие B произошло, часто удобно трактовать условную вероятность как безусловную, но заданную не на исходном пространстве Ω элементарных исходов, а на новом пространстве $\Omega_1 = B$ элементарных исходов. Действительно, используя геометрическое определение вероятности, получаем для безусловной и условной вероятностей события

$$P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{S_{A\Omega}}{S_{\Omega}} \quad \Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{\frac{S_{AB}}{S_{\Omega}}}{\frac{S_B}{S_{\Omega}}} = \frac{S_{AB}}{S_B}$$



Пример_3.2. ► Из урны, в которой 7 белых и 3 черных шаров, наугад без возвращения извлекают два шара. Пусть событие A_1 состоит в том, что первый извлеченный из урны шар является белым, а A_2 – белым является второй шар. Требуется найти $P(A_2|A_1)$.

Решение:

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2A_1)}{P(A_1)} = \frac{C_7^2/C_{10}^2}{C_7^1/C_{10}^1} = \frac{2}{3},$$

другой вариант – перейдем к новому пространству Ω_1 элементарных исходов. Т. к. A_1 произошло, то это означает, что в новом пространстве элементарных исходов всего равновозможных исходов 9, среди которых подходящих (белых шаров) осталось 6, тогда $P(A_2|A_1) = 6/9 = 2/3$. ◀

Пример_3.3. ► Событие B – выпадение 4 или 6 очков на игральной кости, событие A_1 – выпадение четного числа очков, событие A_2 – выпадение 3, 4 или 5 очков, событие A_3 – выпадение нечетного числа очков. Найти $P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$, $P(A_3|B)$.

Решение: $P(A_1|B) = 1$, $P(A_2|B) = 0.5$, $P(A_3|B) = 0$ ◀

При решении различных задач вероятностного характера часто интересующее нас событие A можно достаточно просто выразить через некоторые события $A_1, \dots, A_n$ с помощью операций объединения или пересечения. Если $A = A_1 A_2 \dots A_n$, то для нахождения вероятности $P(A)$ обычно удобно использовать следующую теорему.

Теорема 2 (теорема умножения вероятностей)

Если $A = A_1 \dots A_n$ и $P(A) > 0$, то справедлива формула умножения вероятностей

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}).$$

Доказательство. ► Поскольку $P(A) = P(A_1 A_2 \dots A_n) > 0$ и для $k = \overline{1, n-1}$ имеем $A_1 A_2 \dots A_n \subseteq A_1 A_2 \dots A_k$, тогда и $P(A) = P(A_1 A_2 \dots A_k) > 0$. А значит имеем

$$P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = \frac{P(A_1 A_2 \dots A_n)}{P(A_1 A_2 \dots A_{n-1})} \Rightarrow \\ P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = P(A_1 A_2 \dots A_n),$$

далее и по аналогии заключаем, что

$$P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = P(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2}) P(A_1 A_2 \dots A_{n-2}), \quad \text{и т. д.} \quad \blacktriangleleft$$

Из свойства коммутативности пересечения событий ($AB = BA$) следует, что

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A|B)P(B), \\ P(BA) &= P(B|A)P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(A|B)P(B), \end{aligned}$$

а также соотношение:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Пример_3.4. ►

На семи карточках написаны буквы, образующие слово "СОЛОВЕЙ". Карточки перемешивают и из них наугад последовательно извлекают и выкладывают слева направо три карточки. Найдём вероятность того, что получится слово "ВОЛ" (событие A).

Решение: Введем события: A_1 – на первой выбранной карточке написана буква "В"; A_2 – на второй карточке – буква "О", A_3 – на третьей карточке – буква "Л". Тогда событие A есть пересечение событий A_1, A_2 и A_3 . Следовательно, в соответствии с формулой умножения вероятностей заключаем, что

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2),$$

$$\text{т. к. } P(A_1) = 1/7, P(A_2|A_1) = 1/3, P(A_3|A_1 A_2) = 1/5 \Rightarrow P(A) = 1/105 \approx 0,0095 \blacktriangleleft$$

Из рассмотренных выше примеров видно, что условная вероятность $P(AB)$ события A при условии, что событие B произошло, может как совпадать с безусловной вероятностью $P(A)$, так и не совпадать, т. е. наступление события B может влиять или не влиять на вероятность события A . Поэтому естественно степень связи (или степень зависимости) событий A и B оценивать путем сопоставления их условных вероятностей $P(A|B)$, $P(B|A)$ с безусловными.

Определение 2 (независимые события)

События A и B , имеющие ненулевую вероятность, называют **независимыми**, если условная вероятность A при условии B совпадает с безусловной вероятностью A или если условная вероятность B при условии A совпадает с безусловной вероятностью B , т. е.

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{или} \quad P(B|A) = P(B),$$

в противном случае события A и B называют **зависимыми**.

Теорема 3

События A и B , имеющие ненулевую вероятность, являются независимыми тогда и только тогда, когда

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Доказательство. ► Пусть выполнено равенство $P(B|A) = P(B)$. Воспользовавшись формулой умножения вероятностей для двух событий, получим

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B),$$

аналогичный результат следует из равенства $P(A|B) = P(A)$.

Обратно, пусть выполнено равенство $P(AB) = P(A)P(B)$. Тогда, согласно определению условной вероятности,

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A), \quad P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = P(B),$$

а значит A и B независимы. ◀

Определение 3

События A и B независимыми, если справедливо равенство $P(AB) = P(A)P(B)$.

Пример_3.5. ► Из колоды карт, содержащей 36 карт, наугад извлекают одну карту. Обозначим через A событие, соответствующее тому, что извлеченная карта будет пиковой масти, а B – событие, соответствующее появлению "дамы".

Определить, являются ли зависимыми события A и B .

Решение:

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{9}, \quad P(AB) = \frac{1}{36} \Rightarrow \text{т.к. } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/36}{1/9} = \frac{1}{4} = P(A),$$

то события A и B независимы. ◀ Изменим теперь условия опыта, дополнительно добавив в колоду, допустим, 100 "пустых" карт (без рисунка). Изменится ли ответ?

$P(A) = \frac{9}{136}$, т. е. безусловная вероятность события A уменьшилась. Однако условная вероятность $P(A|B) = \frac{1/136}{4/136} = \frac{1}{4}$ не изменилась, т. е события A и B стали зависимыми.

Теорема 4

Если события A и B независимые, то независимыми также являются пары событий $\bar{A}$ и B , A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$, если вероятности соответствующих событий ненулевые.

Доказательство. ► Поскольку условная вероятность обладает всеми свойствами безусловной, то

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - P(A) = P(\bar{A}),$$

значит A и B независимы. Для остальных пар доказывается аналогично. ◀

Определение 4 (независимость событий в совокупности)

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называют независимыми в совокупности, если вероятность пересечения любых двух различных событий равна произведению вероятностей этих событий; вероятность пересечения любых трех событий равна произведению их вероятностей; ... ; вероятность пересечения всех событий равна произведению их вероятностей.

Для событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, имеет место утверждение, аналогичное утверждению теоремы 4.

Теорема 5

Если события $A_1, \dots, A_n$ независимы в совокупности, то и события $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ независимы в совокупности.

Если только любые два события из данной совокупности являются независимыми, то говорят о попарной независимости событий из этой совокупности.

Так же как и в случае двух событий, можно показать, что на вероятность каждого из независимых в совокупности событий не оказывает влияние появление или неоявление остальных событий.

В силу определения независимости событий в совокупности формула умножения вероятностей для независимых в совокупности событий имеет вид

$$P(A_1, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Из независимости событий с ненулевыми вероятностями в совокупности, согласно теореме 3, следует их попарная независимость. Однако из попарной независимости, вообще говоря, независимость в совокупности не следует, что демонстрирует следующий пример.

Пример_3.6. ► Опыт состоит в однократном подбрасывании тетраэдра, грани которого "пронумерованы" следующим образом: на трех гранях стоят цифры 1, 2 и 3 соответственно (одна цифра на каждой из них), а на четвертой присутствуют все цифры 1, 2 и 3. Введем события A_i - падение тетраэдра на грань, на которой присутствует цифра i , $i = \overline{1,3}$. Покажем, что события A_1, A_2 и A_3 попарно независимы, но зависимы в совокупности.

Действительно, имеем

$$P(A_i) = \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1,3}, \quad \text{а} \quad P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2},$$

аналогично $P(A_i|A_j) = \frac{1}{2}$ при любых $i, j = \overline{1,3}, i \neq j$, т. е. события A_1, A_2 и A_3 являются попарно независимыми.

Однако, например,

$$P(A_1|A_2 A_3) = \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_2 A_3)} = \frac{1/4}{1/4} = 1 \neq P(A_1),$$

т. е. события A_1, A_2 и A_3 зависимы в совокупности.

Запишем формулу для вероятности объединения независимых событий. Пусть

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Тогда в соответствии с законом де Моргана получаем, что

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n.$$

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимые, то, события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ также независимые и, значит,

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n).$$

Отсюда окончательно получаем формулу для вероятности объединения независимых событий:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - [1 - P(A_1)] \cdot [1 - P(A_2)] \cdot \dots \cdot [1 - P(A_n)].$$

Между понятиями "несовместные" и "независимые" события
имеется следующая связь:

- ❶ если A и B – возможные и несовместные события, то они зависимые;
- ❷ если A и B – совместные события, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми;
- ❸ если A и B – зависимые события, то они могут быть как совместными, так и несовместными.



Следует помнить, что при использовании теоремы сложения вероятностей нужно проверять не совместность событий, а при использовании теоремы умножения — независимость событий.

- ④ Одновременно бросают две игральные кости (белую и черную). Рассмотрим следующие события: A - на белой кости выпало более двух очков; B — в сумме выпало четное число очков; C - в сумме выпало менее десяти очков. Вычислить условные вероятности $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A|C)$, $P(C|A)$, $P(B|C)$ и $P(C|B)$ и определим, какие из событий A , B и C являются независимыми.
- ② Каждая буква слова "МАТЕМАТИКА" написана на отдельной карточке. Карточки тщательно перемешаны. Последовательно извлекают четыре карточки. Найдем вероятность события A - получить слово "ТЕМА" ?
- ③ Обнаружение воздушной цели проводится независимо двумя радиолокационными станциями. Вероятность $P(A)$ обнаружения цели первой станцией равна 0,7. Вероятность $P(B)$ обнаружения цели второй станцией равна 0,8. Определим вероятность $P(C)$ того, что цель будет обнаружена хотя бы одной станцией.