

Задания ЛР1. Команда 3

Тема 1. Непосредственный подсчет вероятностей в рамках классической схемы.

Теоремы сложения и умножения вероятностей.

3. Цифры от 1 до 9 располагаются в случайном порядке. Какова вероятность того, что все нечетные цифры окажутся на нечетных местах?

Решение: мы можем расставить 9 цифр на 9 местах $9!$ способами. 5 нечетных цифр на 5 нечетных позициях $5!$ способами. 4 четных цифр на 4 четных позиции $4!$ способами. То есть совместное количество способов $4! \cdot 5! = 2880$.

Итоговая вероятность:

$$P = \frac{2880}{362880} = \frac{1}{126}$$

Ответ: $\frac{1}{126}$

13. Обезьяна выкладывает карточки с буквами **К, Р, О, К, О, Д, И, Л** в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что у нее получится выложить слово **КРОКОДИЛ**?

Решение: Всего 8 букв, но буквы 'К' и 'О' повторяются по 2 раза каждая. Тогда по формуле для количества перестановок с повторяющимися элементами:

$$\frac{8!}{2! \cdot 2!} = \frac{40320}{4} = 10080$$

Так как нам нужна одна конкретная комбинация, то получим:

$$P = \frac{1}{10080}$$

Ответ: $\frac{1}{10080}$

Тема 2. Геометрические вероятности.

3. В центре стола, имеющего форму эллипса с полуосями a и b , расположен магнит. На стол случайным образом бросается булавка, которая притягивается магнитом, если расстояние между ними не превосходит числа r , $r < \min\{a, b\}$. Найти вероятность того, что булавка будет притянута.

Решение: Площадь эллипса с полуосями a и b :

$$S_{\text{элл}} = \pi ab$$

Площадь круга радиуса r :

$$S_{\text{кр}} = \pi r^2$$

Так как по условию $r < \min(a, b)$, круг радиуса r целиком лежит внутри эллипса. Вероятность того, что случайно брошенная булавка попадет в круг равна отношению площадей:

$$P = \frac{S_{\text{кр}}}{S_{\text{элл}}} = \frac{\pi r^2}{\pi ab} = \frac{\pi r^2}{\pi ab} = \frac{r^2}{ab}$$

Ответ: $\frac{r^2}{ab}$

13. В прямоугольный треугольник, один из углов которого равен $\frac{\pi}{6}$, случайным образом бросается точка. Какова вероятность того, что она окажется внутри вписанной в треугольник окружности?

Решение: Пусть гипотенуза - c , катеты - a и b .

$$\frac{a}{b} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = \sqrt{3}a$$

Площадь:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a(\sqrt{3}a) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

По формуле радиуса вписанной окружности в прямоугольном треугольнике:

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

Подставим $b = \sqrt{3}a$:

$$c = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$$

$$r = \frac{a + \sqrt{3}a - 2a}{2} = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

Площадь вписанной окружности:

$$S_{\text{окр}} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a(\sqrt{3} - 1)}{2} \right)^2 = \pi a^2 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{4}.$$

Вероятность

$$P = \frac{S_{\text{окр}}}{S_{\Delta}} = \frac{\pi a^2 \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{\pi(\sqrt{3}-1)^2}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi(\sqrt{3}-1)^2}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \approx 0.48$$

Ответ: 0.48

Тема 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

3. Два стрелка стреляют по одному разу, независимо друг от друга выбирая одну из двух мишеней. Вероятность выбора первой мишени для них 0.5 и $\frac{2}{3}$ соответственно, а вероятности попадания в первую мишень 0.8 для первого стрелка и 0.9 для второго стрелка, во вторую мишень соответственно 0.7 и 0.8 . Какова вероятность хотя бы одного попадания в какую-либо мишень?

Решение:

$$P(\text{хотя бы один попадет}) = 1 - P(\text{оба промахнутся})$$

Для первого стрелка: если он выбрал первую мишень ($\frac{1}{2}$), промах = $1 - 0.8 = 0.2$; если выбрал вторую ($\frac{1}{2}$), промах = $1 - 0.7 = 0.3$.

Посчитав по формуле полной вероятности, получим:

$$P(\text{промах первого}) = 0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.25$$

Для второго стрелка: если он выбрал первую мишень ($\frac{2}{3}$), промах = $1 - 0.9 = 0.1$; если выбрал вторую ($\frac{1}{3}$), промах = $1 - 0.8 = 0.2$.

Посчитав по формуле полной вероятности, получим:

$$P(\text{промах второго}) = \frac{2}{3} \cdot 0.1 + \frac{1}{3} \cdot 0.2 = \frac{2}{15}$$

Вероятность того, что оба промахнутся:

$$P(\text{оба промахнутся}) = P(\text{промах первого}) \cdot P(\text{промах второго}) = 0.25 \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{30}.$$

Тогда ответ:

$$P(\text{хотя бы один попадет}) = 1 - P(\text{оба промахнутся}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

Ответ: $\frac{29}{30}$

13. В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой - с номерами от 1 до 9, во второй - от 10 до 20, в третьей - от 21 до 30 включительно. Из случайно выбранной урны берется шар, и оказывается, что его номер делится на 5. Какова вероятность того, что этот шар взят из первой урны?

Решение: Пусть события A_1, A_2, A_3 - выбрана первая, вторая и третья урны соответственно. Так как урны выбираются случайно, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$. Пусть B - событие "выпал номер, делящийся на 5".

По формуле Байеса:

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B | A_1)P(A_1)}{P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + P(B | A_3)P(A_3)}$$

Найдем $P(B | A_i)$.

В урне 1 есть только одно число, кратное 5, то есть $P(B | A_1) = \frac{1}{9}$ (так как всего чисел 9).

В урне 2 есть 3 числа, кратных 5, то есть $P(B | A_2) = \frac{3}{11}$ (всего чисел 11).

В урне 3 есть 2 числа, кратных 5, то есть $P(B | A_3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ (всего 10 чисел).

При подстановке всего в формулу выше и опустив расчеты, получим:

$$P(A_1 | B) = \frac{55}{289}$$

Ответ: $\frac{55}{289}$

Тема 4. Схема Бернулли.

3. Прибор содержит шесть однотипных микросхем, вероятность выхода из строя каждой в течение одного месяца равна 0.2. Найти вероятность того, что в течение этого срока из строя выйдет не более половины микросхем.

Решение: Пусть $n = 6$, $p = 0.2$, тогда нужно найти $P(X \leq 3)$.

По стандартной формуле получим:

$$P(X = k) = C_6^k \cdot 0.2^k \cdot 0.8^{6-k}$$

Рассчитаем:

$$P(X \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$$

Опустив вычисления, получим:

$$P(X \leq 3) = 0.982$$

Ответ: 0.982.

13. Производится испытание на “самовозгорание” пяти телевизоров. Прогонка продолжается двое суток. За указанное время каждый из телевизоров перегревается и “самовозгорается” с вероятностью 0.1. Найти вероятность того, что на момент окончания испытаний сгорит не более двух телевизоров.

Решение: Пусть $n = 5$, $p = 0.1$. Тогда нужно найти $P(X \leq 2)$.

$$P(X = k) = C_5^k (0.1)^k (0.9)^{5-k}$$

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$$

Опустив вычисления, получим:

$$P(X \leq 2) = 0.99144$$

Ответ: 0.99144.