

Задачи для самостоятельного решения по теории вероятностей и математической статистике.

Предлагаемое пособие содержит задачи для самостоятельного решения по двум разделам:

- 1) задачи по теории вероятностей,
- 2) задачи по математической статистике.

Теория вероятностей.

В данном разделе предлагается 30 задач по каждой из 7 тем, перечисленных ниже. Перед задачами даны методические указания и там, где необходимо, – примеры. Темы заданий:

1. Непосредственный подсчёт вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

2. Геометрические вероятности.

3. Формула полной вероятности и формула Байеса.

4. Повторение опытов (схема Бернулли).

5. Дискретные случайные величины.

6. Непрерывные случайные величины.

7. Функции случайных величин.

Тема 1. Непосредственный подсчёт вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Множество Ω , состоящее из всех взаимно исключающих результатов (исходов) случайного эксперимента, называется **пространством элементарных событий**. Его элементы будем обозначать ω (с индексами или без). Всякое подмножество Ω называется **событием**. Говорят, что событие $A \subset \Omega$ произошло, если эксперимент закончился одним из исходов, входящих в A .

Пусть пространство элементарных событий Ω конечно или счётно: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$. Зададим на Ω вероятности, то есть поставим в соответствие каждому ω_i число $p(\omega_i) \geq 0$, причём $\sum_i p(\omega_i) = 1$. Последнее равенство называется **условием нормировки**. Теперь для любого события $A \subset \Omega$ определим его вероятность $P(A)$ с помощью равенства:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega: \omega \in A} p(\omega). \quad (1)$$

В качестве частного случая рассмотрим *классическую схему*. Здесь $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $p(\omega_i) = 1/n$, $i = 1, \dots, n$. Таким образом,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega: \omega \in A} p(\omega) = \frac{\text{card } A}{n} = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega},$$

где **card** A – мощность (кардинальное число) множества A . Другими словами, в рамках классической схемы вероятность события – это отношение числа исходов, входящих в это событие, к общему числу исходов.

Приведем теперь несколько определений и формул из комбинаторики, которые будут полезны для решения задач.

Перестановками множества, состоящего из n различных элементов, называются упорядоченные наборы, составленные из всех элементов этого множества. Число всех перестановок $P_n = n!$.

Размещениями из n по k , $k \leq n$, множества, состоящего из n различных элементов, называются упорядоченные наборы, составленные из k различных элементов этого множества. Число всех размещений $A_n^k = n!/((n-k)!)$.

Сочетаниями из n по k , $k \leq n$, множества, состоящего из n различных элементов, называются неупорядоченные наборы, составленные из k различных элементов этого множества. Число всех сочетаний $C_n^k = n!/(k! \cdot (n-k)!)$.

Пример 1. Библиотекарь в случайном порядке выставляет на полку 5 учебников по теории вероятностей следующих авторов: Колмогоров, Ширяев, Гнеденко, Бородин и Ротарь. Какова вероятность того, что книги будут выставлены в алфавитном порядке (по фамилиям авторов)?

Решение. Учебники можно пронумеровать, например, в том порядке, в котором они выписаны в условии. Тогда пространство элементарных событий Ω состоит из всех перестановок множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Его мощность равна числу этих перестановок: **card** $\Omega = P_5 = 5! = 120$. Событие A , вероятность которого нам нужно найти, состоит из одного элемента: $A = \{(4, 3, 1, 5, 2)\}$ (то есть учебник Бородина стоит на первом месте и т. д.). Таким образом, $\mathbf{P}(A) = \text{card } A / \text{card } \Omega = 1/120$.

Пусть Ω – пространство элементарных событий некоторого случайного эксперимента, $A, B \subset \Omega$ – некоторые события. Множество Ω , очевидно, само является событием. Оно включает в себя все возможные исходы случайного эксперимента и называется **достоверным событием**. Из равенства (1) и условия нормировки получаем: $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Событием, **противоположным** для события A , называется событие $\bar{A}$, состоящее из всех исходов случайного эксперимента, не входящих в A . Таким образом, наступление события $\bar{A}$ означает, что событие A не наступило. Полезна формула: $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$. Событие $\emptyset$, не содержащее ни одного исхода, называется **невозможным**: $\emptyset = \bar{\Omega}$, $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

Произведением событий A и B называется событие AB , включающее в себя все исходы, входящие и в A , и в B , то есть наступление события AB означает, что произошло и событие A , и событие B . События A и B называются **несовместными**, если они не могут произойти одновременно в результате случайного эксперимента: $AB = \emptyset$.

Суммой событий A и B называется событие $A + B$, включающие в себя все исходы, которые входят хотя бы в одно из событий A , B , то есть наступление события $A + B$ означает, что наступило или событие A , или B , или AB . Для вычисления вероятности суммы событий может быть полезна **формула сложения вероятностей**:

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB).$$

Условная вероятность события A относительно события B , $\mathbf{P}(B) > 0$, – это число $\mathbf{P}(A|B)$, вычисляемое по формуле:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Условная вероятность $\mathbf{P}(A|B)$ – это вероятность события A , вычисленная в предположении, что событие B наступило. Аналогично, если $\mathbf{P}(A) > 0$, то $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(A)$. Отсюда вытекает **формула умножения**:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A|B).$$

События A и B называются **независимыми**, если $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$. Последнее равенство эквивалентно равенству $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$, когда $\mathbf{P}(B) > 0$, и равенству $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$, когда $\mathbf{P}(A) > 0$. События $A_1, \dots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого числа m , $2 \leq m \leq n$, и любого набора индексов $k_1, \dots, k_m$, $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$, справедливо равенство:

$$\mathbf{P} \left(\prod_{i=1}^m A_{k_i} \right) = \prod_{i=1}^m \mathbf{P}(A_{k_i}).$$

Задача 1.

Какова вероятность того, что в наудачу выбранном четырёхзначном числе нет повторяющихся цифр?

Задача 2.

В коробке лежат карандаши: двенадцать красных и восемь зеленых. Наудачу извлекают три. Какова вероятность того, что среди извлечённых будет хотя бы один красный карандаш?

Задача 3.

Цифры от 1 до 9 располагаются в случайном порядке. Какова вероятность того, что все нечётные цифры окажутся на нечётных местах?

Задача 4.

Станция метрополитена оборудована тремя независимо работающими эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение дня для первого эскалатора равна 0.9, для второго – 0.8, для третьего – 0.85. Найти вероятность того, что в течение дня произойдет поломка не более одного эскалатора.

Задача 5.

Группа студентов состоит из восьми девушек и семи юношей. Для аттестации случайным образом отбирают троих. Какова вероятность того, что среди них будет ровно одна девушка?

Задача 6.

У распространителя имеется 18 билетов книжной лотереи, среди которых 5 выигрышных. Куплено 3 билета. Найти вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выигрышный.

Задача 7.

Устройство секретного замка включает в себя четыре ячейки. В первой ячейке осуществляется набор одной из пяти букв: A, B, C, D, E , в каждой из трёх остальных – одной из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться). Чему равна вероятность того, что замок будет открыт с первой попытки?

Задача 8.

Студент подготовил к экзамену 25 вопросов из 30. Какова вероятность того, что среди трёх наудачу выбранных вопросов есть не меньше двух, подготовленных студентом?

Задача 9.

Три человека заходят в лифт девятиэтажного дома на первом этаже. Какова вероятность того, что, по крайней мере, двое выйдут на одном этаже, если выбор этажа для каждого случаен и не зависит от выбора других?

Задача 10.

Три баскетболиста делают по одному броску в кольцо. Вероятности попадания для каждого из них равны соответственно $3/5$, $7/10$, $9/10$. Найти вероятность того, что хотя бы два броска окажутся точными.

Задача 11.

Из колоды в 52 карты по очереди наудачу извлекаются две. Какова вероят-

ность того, что первая бьёт вторую (учитывается только ранг карты, то есть, любая восьмёрка бьёт любую шестёрку, любой валет бьёт любую девятку и т. д.)?

Задача 12.

Команда из одиннадцати футболистов разного роста случайным образом выстроилась в шеренгу. Найти вероятность того, что они стоят по ранжиру (то есть самый высокий стоит первым, и далее футболисты упорядочены по росту).

Задача 13.

Обезьяна выкладывает карточки с буквами **К, Р, О, К, О, Д, И, Л** в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что у неё получится выложить слово **КРОКОДИЛ**?

Задача 14.

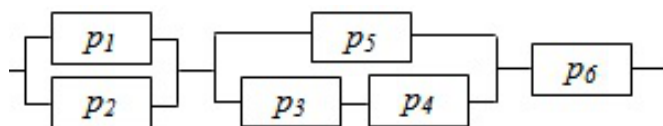
Игральный кубик бросают четыре раза. Какова вероятность того, что все результаты бросаний будут различны?

Задача 15.

При раздаче в покере игрок получает 5 карт (колода состоит из 52-х карт, без джокеров). Какова вероятность появления каре (то есть четырёх карт одного ранга, например, четырёх десятков)?

Задача 16.

Электрическая схема состоит из шести элементов:



Для каждого i , $i = 1, 2, \dots, 6$, число p_i – вероятность того, что i -й элемент не выйдет из строя (во время испытания). События "выход из строя i -го элемента", $i = 1, 2, \dots, 6$, независимы в совокупности. Какова вероятность того, что ток не пройдёт, если $p_1 = p_3 = p_6 = 0.6$, $p_2 = p_5 = 0.7$, $p_4 = 0.9$?

Задача 17.

Стрелок три раза стреляет по мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно $1/2$, $3/5$, $4/5$. Какова вероятность того, что в результате этих трех выстрелов в мишени окажется ровно одна пробоина?

Задача 18.

В связке имеются пять различных ключей, из которых только одним можно отпереть дверь. Наудачу выбирается ключ и делается попытка открыть дверь. Ключ, оказавшийся неподходящим, больше не используется. Найти вероятность того, что для отпираания двери будет использовано не более двух ключей.

Задача 19.

Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет при-

нут первый вызов, равна 0.3, второй – 0.4, третий – 0.5. Найти вероятность того, что корреспондент услышит хотя бы один вызов радиста.

Задача 20.

В коробке лежит семьдесят фруктов, десять из которых испорчены. Наугад берутся четыре. Какова вероятность, что среди них есть и испорченные, и свежие?

Задача 21.

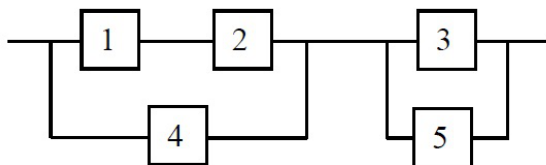
Предприятием послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0.9, на второй – 0.85, на третьей – 0.7, на четвертой – 0.65. Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.

Задача 22.

Из игральной колоды в 36 карт случайно достают три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется пиковая дама.

Задача 23.

Электрическая схема состоит из пяти элементов:



Для каждого i , $i = 1, 2, \dots, 5$, число p_i – вероятность того, что i -й элемент выйдет из строя (во время испытания). События "выход из строя i -го элемента", $i = 1, 2, \dots, 5$, независимы в совокупности. Какова вероятность того, что ток не пройдёт, если $p_1 = p_3 = 0.3$, $p_2 = p_5 = 0.1$, $p_4 = 0.25$?

Задача 24.

Из игральной колоды в 36 карт случайно достают четыре. Какова вероятность того, что среди них будут представлены все масти?

Задача 25.

Имеется коробка с двенадцатью новыми теннисными мячами. Для каждой игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. Мячи выбираются случайно, причём бывшие в употреблении от новых не отличаются. Какова вероятность того, что после четырёх игр в коробке не останется мячей, не побывавших в игре?

Задача 26.

Абонент забыл две последние цифры номера телефона, но помнит, что они разные. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в пять мест, если он набирает забытые цифры наугад.

Задача 27.

Какова вероятность того, что в наудачу выбранном четырёхзначном числе первая и третья цифры совпадают?

Задача 28.

Двое играют в шахматы. Игра проводится до выигрыша одним из игроков двух партий подряд. Вероятности выигрыша любой партии первым и вторым игроком соответственно равны 0.4 и 0.6 и не зависят от исхода предыдущих партий. Найти вероятность того, что игра окончится до четвертой партии.

Задача 29.

При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0.8. Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включать зажигание не более трех раз.

Задача 30.

Игральный кубик бросают пять раз. Какова вероятность того, что в результате появятся только два различных числа, причём одно появится дважды, другое – трижды?

Тема 2. Геометрические вероятности.

Пусть случайный эксперимент состоит в выборе точки в некоторой области Ω на прямой, плоскости или в пространстве. Выбор точки происходит случайно и является равновероятным для всякой точки этой области. Относительно Ω будем предполагать, что $\mu(\Omega) < \infty$. Здесь $\mu(\Omega)$ – мера Лебега области Ω : для прямой это длина, для плоскости – площадь, для пространства – объём. Поставим следующий вопрос. Какова вероятность того, что выбранная точка окажется лежащей внутри некоторой заданной области $A \subset \Omega$ (предполагается, что $\mu(A)$ существует)? Такие вероятности называются **геометрическими** и вычисляются по формуле:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \quad (2)$$

Пример 1. Точка случайным образом бросается в квадрат $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$. Какова вероятность того, что она окажется ниже графика функции $y = \sin x$?

Решение. Мера Лебега области Ω равна площади квадрата со стороной π : $\mu(\Omega) = \pi^2$. Та часть синусоиды, которая соответствует значениям $x \in [0, \pi]$, целиком лежит в квадрате Ω . Поэтому, обозначив интересующую нас область буквой A , напомним

$$\mu(A) = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2.$$

Согласно формуле (2), искомая вероятность $\mathbf{P}(A) = \mu(A)/\mu(\Omega) = 2/\pi^2$.

Задача 1.

Из промежутка $[0, 1]$ наугад выбрали два числа. Какова вероятность того,

что их сумма меньше или равна 1, а их произведение меньше или равно $2/9$?

Задача 2.

Из промежутка $[-2, 2]$ наудачу выбраны два числа ξ_1 и ξ_2 . Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + \xi_1 x + \xi_2 = 0$ будет иметь вещественные корни.

Задача 3.

В центре стола, имеющего форму эллипса с полуосями a и b , расположен магнит. На стол случайным образом бросается булавка, которая притягивается магнитом, если расстояние между ними не превосходит числа r , $r < \min\{a, b\}$. Найти вероятность того, что булавка будет притянута.

Задача 4.

В равносторонний треугольник случайным образом бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанной в треугольник окружности?

Задача 5.

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$ наудачу выбирается точка. Какова вероятность того, что эта точка окажется ниже графика функции $y = x^2$?

Задача 6.

На отрезке наудачу ставятся две точки, разбивающие его на три отрезка. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно составить треугольник?

Задача 7.

На отрезке AB наудачу ставятся две точки M и L . Найти вероятность того, что L будет ближе к точке A , чем к точке M .

Задача 8.

В квадрат $\Omega = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ случайным образом бросается точка. Пусть (ξ, η) — её координаты. Найти вероятность того, что многочлен $x^2 + \xi x + \eta$ не имеет действительных корней.

Задача 9.

В область, ограниченную кардиоидой, имеющей в полярных координатах уравнение $\rho = 2 - 2 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, случайным образом бросается точка. Найти вероятность того, что полярный угол этой точки не превосходит $2\pi/3$.

Задача 10.

Стержень длиной 1 метр наудачу ломается на три части. Найти вероятность того, что хотя бы одна из этих частей будет не больше 10 сантиметров.

Задача 11.

Два парохода должны подойти к одному причалу. Каждый из них может прийти в любое время в течение данных суток, причём время прихода одного не зависит от времени прихода другого. Какова вероятность того, что одному из них придётся ожидать освобождения причала, если время стоянки первого

– один час, второго – три часа?

Задача 12.

В квадрат со стороной a случайным образом бросают точку. Найти вероятность того, что она удалена от ближайшей вершины квадрата на расстояние, не превосходящее $a/2$.

Задача 13.

В прямоугольный треугольник, один из углов которого равен $\pi/6$, случайным образом бросается точка. Какова вероятность того, что она окажется внутри вписанной в треугольник окружности?

Задача 14.

На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наудачу выбирается точка. Какова вероятность того, что проекция точки на ось абсцисс находится от центра окружности на расстоянии, не превышающем $1/2$?

Задача 15.

Точка случайным образом выбирается из полукруга, заданного в полярных координатах неравенствами $\rho \leq 2 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри полукруга $\rho \leq 2 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Задача 16.

В четверть круга $x^2 + y^2 \leq 8$, расположенную в первом квадранте, случайным образом бросается точка. Какова вероятность того, что она окажется ниже графика функции $y = \sqrt{2x}$?

Задача 17.

Даны две концентрические окружности радиусов R и $\sqrt{3}R$. На окружности большего радиуса наудачу ставятся две точки. Какова вероятность того, что хорда, проведённая через эти точки, пересечёт окружность меньшего радиуса?

Задача 18.

Из промежутка $[1, 2]$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что их сумма меньше 3, а произведение больше 2?

Задача 19.

На окружности радиуса R случайным образом выбирается точка, через которую проводится вертикальная хорда. Какова вероятность того, что длина этой хорды больше R ?

Задача 20.

Из промежутка $[-1, 1]$ наудачу выбраны два числа ξ и η . Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + \xi x + \eta = 0$ имеет положительные корни.

Задача 21.

Из отрезка $[0, 1]$ наудачу выбираются три числа. Какова вероятность того, что их сумма не будет превышать единицу?

Задача 22.

На кардиоиду, имеющую в полярных координатах уравнение $\rho = 2 - 2 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, случайным образом ставится точка. Найти вероятность того, что полярный угол этой точки не превосходит $2\pi/3$.

Задача 23.

Из промежутка $[0, 1]$ наудачу выбраны два числа. Какова вероятность того, что сумма их больше единицы, а сумма их квадратов меньше единицы?

Задача 24.

Каждый из двух пациентов приходит на приём к врачу в любое время между 11.00 и 11.40, причём время прихода каждого случайно и не зависит от времени прихода другого. Длительность приема одного пациента – пять минут, другого – десять минут. Найти вероятность того, что ни одному пациенту не придётся ожидать окончания приёма другого.

Задача 25.

На дугу параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что угол, образованный радиус-вектором этой точки с положительным направлением оси абсцисс, не превосходит $\pi/3$.

Задача 26.

Точка случайным образом бросается внутрь квадрата со стороной 8. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей к ней диагонали квадрата больше $\sqrt{2}$?

Задача 27.

На диаметре окружности радиуса R наудачу выбирается точка – середина хорды, перпендикулярной диаметру. Найти вероятность того, что длина этой хорды не превзойдёт $\sqrt{3}R$.

Задача 28.

На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наудачу выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до точки $(1, 0)$ больше единицы.

Задача 29.

Внутри окружности, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$, случайным образом бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка окажется лежащей внутри кардиоды $\rho = 1 - \cos \varphi$?

Задача 30.

Из промежутка $[0, 1]$ наудачу выбираются два числа ξ и η . Какова вероятность того, что $\xi^2 < \eta < \sqrt{\xi}$?

Тема 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Пусть задано пространство элементарных событий Ω . Набор событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ называется *полной группой событий*, если они попарно

несовместны, и их сумма достоверна: $H_i \cdot H_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$.

Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ – полная группа событий, $\mathbf{P}(H_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $A \subset \Omega$ – некоторое событие. Вероятность события A может быть вычислена с помощью **формулы полной вероятности**:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A|H_i).$$

Поставим другой вопрос. Пусть известно, что в результате случайного эксперимента событие A наступило. Какова при этом вероятность того, что наступило одно из событий H_i , $i = 1, 2, \dots, n$? Ответ на этот вопрос даёт **формула Байеса**. Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ – полная группа событий, $\mathbf{P}(H_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $A \subset \Omega$, $\mathbf{P}(A) > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(H_j|A) = \frac{\mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A|H_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A|H_i)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Пример 1. В коробке находится 4 новых и 3 старых теннисных мяча. Для первой игры случайным образом выбрали 2 мяча и после игры положили их обратно. Какова вероятность того, что 2 мяча, взятые для второй игры, оказались новыми? В предположении, что взятые для второй игры мячи оказались новыми, найти вероятность того, что для первой игры были также вытянуты новые.

Решение. Пусть H_i – событие, состоящее в том, что для первой игры было взято ровно i новых мячей, $i = 0, 1, 2$. События H_0, H_1, H_2 , очевидно, составляют полную группу. Пусть A – событие, состоящее в том, что мячи, взятые для второй игры, оказались новыми. Вычислим соответствующие вероятности:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(H_0) &= \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}, \quad \mathbf{P}(H_1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}, \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}, \\ \mathbf{P}(A|H_0) &= \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}, \quad \mathbf{P}(A|H_1) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}, \quad \mathbf{P}(A|H_2) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}. \end{aligned}$$

Теперь, используя формулу полной вероятности, ответим на первый вопрос задачи:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A|H_i) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{21} = \frac{20}{147}.$$

Ответ на второй вопрос даёт формула Байеса:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{\sum_{i=0}^2 P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{21}}{\frac{20}{147}} = \frac{1}{10}.$$

Задача 1.

Два стрелка Иванов и Петров, имеющие по два заряда, поочерёдно стреляют в мишень. Вероятность попадания при одном выстреле равна $2/3$ для Иванова и $5/6$ для Петрова. Первый стрелок определяется по жребию. Для этого кидается монета. Если выпадает герб, то начинает Иванов, если цифра, то первым стреляет Петров. Выигрывает стрелок, попавший первым. Какова вероятность выигрыша для Петрова?

Задача 2.

Два стрелка A и B поочерёдно стреляют в мишень до первого попадания, но не более двух раз каждый. Вероятность попадания при одном выстреле для A равна 0.8 , для B – 0.6 . Первый стрелок определяется по жребию. Для этого кидается игральный кубик. Если выпадает число, кратное трём, то начинает A , иначе первым стреляет B . В результате стрельбы выиграл стрелок B . Какова вероятность, что он стрелял первым?

Задача 3.

Два стрелка стреляют по одному разу, независимо друг от друга выбирая одну из двух мишеней. Вероятность выбора первой мишени для них 0.5 и $2/3$ соответственно, а вероятности попадания в первую мишень 0.8 для первого стрелка и 0.9 для второго стрелка, во вторую мишень соответственно 0.7 и 0.8 . Какова вероятность хотя бы одного попадания в какую-либо мишень?

Задача 4.

Студент едет в университет на первом подошедшем виде транспорта. Автобус подходит первым с вероятностью 0.2 , маршрутное такси – с вероятностью 0.5 , для троллейбуса и трамвая эти вероятности одинаковы и равны 0.15 . Вероятности застрять в пробке для них равны 0.4 , 0.3 , 0.4 , 0.1 соответственно. Найти вероятность того, что студент не застрянет в пробке.

Задача 5.

В двух пакетах находятся конфеты. В первом пакете 16 штук сорта "Белочка" и 8 штук сорта "Жар-птица", во втором – 15 штук сорта "Белочка" и 5 штук сорта "Жар-птица". Из первого пакета во второй переложили две наудачу выбранные конфеты, затем содержимое второго пакета перемешали и вытащили оттуда одну конфету, которая оказалась "Жар-птицей". Какова вероятность того, что из первого пакета во второй переложили одну "Белочку" и одну "Жар-птицу"?

Задача 6.

Берут две колоды карт по 52 карты и из первой во вторую перекладывают случайным образом 2 карты. Затем из второй колоды берётся одна карта. Какова вероятность, что она окажется дамой?

Задача 7.

Среди трёх игровых костей одна фальшивая. На фальшивой кости шестёрка появляется с вероятностью $1/3$. Бросили две случайно выбранные кости. Выпали две шестёрки. Какова вероятность того, что среди брошенных костей была фальшивая?

Задача 8.

Ракета накрывает цель с вероятностью $2/3$. По цели выпущено две ракеты. Известно, что при одном попадании цель поражается с вероятностью $1/2$, а при двух с вероятностью $5/6$. Цель поражена. Какова вероятность, что в неё попала ровно одна ракета?

Задача 9.

Студент едет в университет на первом подошедшем виде транспорта. Автобус подходит первым с вероятностью 0.2, маршрутное такси – с вероятностью 0.5, для троллейбуса и трамвая эти вероятности одинаковы и равны 0.15. Вероятности застрять в пробке для них равны 0.4, 0.3, 0.4, 0.1 соответственно. Найти вероятность того, что первым подошёл троллейбус, если известно, что студент застрял в пробке.

Задача 10.

30% телевизоров поступает в магазин с первой фабрики, 20% – со второй, остальные – с третьей. Брак на этих фабриках составляет 5%, 3%, 4% соответственно. Купленный телевизор оказался бракованным. Какова вероятность того, что он поступил с третьей фабрики?

Задача 11.

Взяли две колоды по 52 карты и случайным образом переложили две карты из первой колоды во вторую. Затем из второй колоды вытащили одну карту, которая оказалась картой пиковой масти. Какова вероятность того, что среди переложённых карт не было карт пиковой масти?

Задача 12.

Готовясь к экзамену, студент должен подготовить ответы на две серии вопросов, каждая из которых содержит по 10 вопросов. Студент выучил 9 вопросов первой серии и 8 вопросов второй серии. Экзаменатор случайно выбирает серию вопросов и два вопроса из нее, на оба из которых студент должен ответить. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?

Задача 13.

В трёх одинаковых урнах находятся шары: в первой – с номерами от 1 до 9, во второй – от 10 до 20, в третьей – от 21 до 30 включительно. Из случайно

выбранной урны берётся шар, и оказывается, что его номер делится на 5. Какова вероятность того, что этот шар взят из первой урны?

Задача 14.

В трёх одинаковых урнах находятся шары: в первой – с номерами от 10 до 25, во второй – от 26 до 32, в третьей – от 33 до 45 включительно. Из случайно выбранной урны берётся шар. Какова вероятность того, что его номер будет простым числом?

Задача 15.

Игроки могут с равной вероятностью играть в одну из двух игр. В первой игре используется одна игральная кость, а в другой – две. Счёт в игре в первом случае равен количеству очков, выпавших на кости, а во втором – сумме очков, выпавших на обеих костях. Вы слышите, что выпало два очка. Какова вероятность, того, что играют в игру с одной костью?

Задача 16.

На трёх дочерей Аню, Катю и Анфису в семье возложена обязанность по мытью тарелок. Аня, как старшая, выполняет 40% всей работы, остальную работу Катя и Анфиса делят пополам. Вероятность того, что Аня разобьёт хотя бы одну тарелку равна 0.02, для Кати эта вероятность равна 0.03, для Анфисы – 0.02. Родители слышали звон разбитой посуды. Какова вероятность, что тарелки мыла Аня?

Задача 17.

Из урны, содержавшей 4 белых и 3 чёрных шара, переложили три наудачу выбранных шара в урну, содержавшую 5 белых и 3 чёрных шара. Найти вероятность вынуть из второй урны белый шар.

Задача 18.

Из урны, содержавшей 4 белых и 3 чёрных шара, переложили два наудачу выбранных шара в урну, содержащую 5 белых и 3 чёрных шара. После этого из второй урны наудачу извлекли шар, который оказался чёрным. Найти вероятность того, что из первой урны переложили два разноцветных шара.

Задача 19.

Имеются три одинаковых ящика. В первом ящике лежат 2 белых и 2 чёрных шара, во втором ящике – 3 чёрных, в третьем – 1 чёрный и 5 белых. Некто случайным образом выбирает ящик, потом наугад вынимает из него шар. Какова вероятность того, что шар окажется белым?

Задача 20.

На шахматную доску 4×4 ставят два коня. Какова вероятность того, что они бьют друг друга?

Задача 21.

На шахматную доску 4×4 ставят два ферзя. Какова вероятность того, что они бьют друг друга?

Задача 22.

На шахматную доску 4×4 ставят два слона. Какова вероятность того, что они бьют друг друга?

Задача 23.

Взяли две колоды по 52 карты и случайным образом переложили две карты из первой колоды во вторую. Затем из второй колоды вытащили одну карту, которая оказалась королём. Какова вероятность того, что среди переложённых карт было два короля?

Задача 24.

В группе спортсменов 10 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятности выполнить квалификационную норму равны: 0.8 для лыжника, 0.9 для велосипедиста, 0.7 для бегуна. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит норму.

Задача 25.

На "жульнической" кости 5 и 6 очков выпадают с вероятностью $1/3$, остальные грани выпадают с равными вероятностями. Какова вероятность выиграть этой костью против "честной" кости, если каждый игрок бросает свою кость один раз?

Задача 26.

Половина всех арбузов поступает в магазин с первой базы, треть – со второй базы, остальные – с третьей базы. Доли арбузов с повышенным содержанием нитратов равны 15%, 10%, 20% соответственно для первой, второй, третьей баз. Какова вероятность купить недоброкачественный арбуз?

Задача 27.

В группе спортсменов 10 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятности выполнить квалификационную норму равны: 0.8 для лыжника, 0.9 для велосипедиста, 0.7 для бегуна. Известно, что выбранный спортсмен выполнил норму. Какова вероятность того, что этот спортсмен – бегун?

Задача 28.

55% обучающихся на факультете – юноши. 75% студентов и 65% студенток имеют пригласительные билеты на студенческий бал. В деканат принесли кем-то потерянный билет. Какова вероятность того, что он принадлежал девушке?

Задача 29.

В пяти одинаковых коробках упакованы ракеты для фейерверка. В трёх из них синий цвет дают 70% ракет, остальные дают оранжевый цвет. В двух других оранжевый цвет дают 60% ракет, остальные – синий. Пиротехник из случайной коробки взял случайную ракету. Какова вероятность того, что она даст синий цвет?

Задача 30.

Из четырёх игральных костей одна фальшивая: на ней 6 очков выпадает с вероятностью $1/3$. При бросании случайно выбранной кости выпала шестёрка. Какова вероятность того, что была выбрана фальшивая кость?

Тема 4. Схема Бернулли.

Пусть проводятся n одинаковых независимых опытов (экспериментов), в каждом из которых событие A может наступить с вероятностью p . **Независимыми** называются такие опыты, для которых любые возникающие в них события, взятые по одному из каждого опыта, независимы в совокупности. Событие A иногда называют успехом. Обозначим $q = 1 - p$ – вероятность того, что событие A не наступает, $B_n(m)$ – событие, состоящее в том, что в n опытах событие A наступит ровно m раз, $m = 0, 1, \dots, n$. Согласно **формуле Бернулли**,

$$\mathbf{P}(B_n(m)) = C_n^m p^m q^{n-m}, m = 0, 1, \dots, n.$$

Отметим, что события $B_n(m)$, $m = 0, 1, \dots, n$, попарно несовместны, поэтому, обозначив $P_n(m_1, m_2)$ – вероятность того, что событие A наступило не менее m_1 и не более m_2 раз, $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq n$, напомним

$$P_n(m_1, m_2) = \mathbf{P}\left(\sum_{m=m_1}^{m_2} B_n(m)\right) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \mathbf{P}(B_n(m)) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (3)$$

Пример 1. Пусть правильная монета бросается 5 раз. Какова вероятность, что появилось больше гербов, чем цифр?

Решение. Здесь событие A – появление герба при одном подбрасывании монеты, $p = P(A) = 1/2$, $q = 1 - p = 1/2$, $n = 5$. Нас интересует величина $P_5(3, 5)$ – вероятность того, что число появившихся гербов заключено между тремя и пятью. Используя формулу (3), напомним

$$P_5(3, 5) = C_5^3 (1/2)^3 (1/2)^2 + C_5^4 (1/2)^4 (1/2)^1 + C_5^5 (1/2)^5 = (10+5+1)/32 = 1/2.$$

Задача 1.

Производится испытание пяти приборов, каждый из которых выходит из строя с вероятностью 0.1. Найти вероятность того, что хотя бы два прибора выйдут из строя при испытании.

Задача 2.

Производится четыре выстрела по мишени, вероятность попадания при каждом выстреле равна $2/3$. Найти вероятность того, что в мишень попадут не менее двух раз.

Задача 3.

Прибор содержит шесть однотипных микросхем, вероятность выхода из строя каждой в течение одного месяца равна 0.2. Найти вероятность того, что в течение этого срока из строя выйдет не более половины микросхем.

Задача 4.

Накопитель снабжает деталями 8 станков с ЧПУ. В течение 20 минут от каждого станка может поступить заявка на деталь с вероятностью $1/5$. Найти вероятность того, что за 20 минут на накопитель поступит не более трех заявок.

Задача 5.

В ралли участвует десять однотипных машин. Вероятность выхода из строя за период соревнований каждой из них равна $1/20$. Найти вероятность того, что к финишу придут не менее восьми машин.

Задача 6.

Имеется 7 партий деталей, каждая из которых содержит 10% бракованных. Из каждой партии извлекают по 1 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей не менее двух бракованных.

Задача 7.

Радиолокационная станция ведет наблюдение за шестью объектами в течение некоторого промежутка времени. Контакт с каждым из них может быть потерян с вероятностью 0.2. Найти вероятность того, что хотя бы с тремя объектами контакт будет поддерживаться в течение этого промежутка времени.

Задача 8.

Прибор состоит из шести однотипных блоков, но может работать при наличии в исправном состоянии не менее трех из них. За год работы каждый из блоков выходит из строя с вероятностью 0.3. Найти вероятность того, что за год работы прибор не выйдет из строя.

Задача 9.

В семье пять детей. Пусть вероятности появления на свет девочки и мальчика равны друг другу. Найти вероятность того, что в семье не более двух девочек.

Задача 10.

Обрабатывающий центр снабжается заготовками от 10 однотипных накопителей, выдающих при поступлении запроса по одной детали. Вероятность того, что на момент запроса в накопителе имеется заготовка, равна 0.9. Экономически достаточная загрузка центра обеспечивается одновременным поступлением по запросам не менее восьми деталей. Найти вероятность того, что при очередном запросе будет обеспечена достаточная загрузка.

Задача 11.

Вероятность поражения самолета средствами ПВО объекта равна 0.6. Найти вероятность того, что из 8 атакующих объект самолетов к нему прорвётся не более шести.

Задача 12.

Транспортные средства оптовой базы обеспечивают за день выполнение не более трех заявок. База обслуживает 7 магазинов. Вероятность заявки от каждого из них в течение дня равна 0.3. Найти вероятность того, что все поступившие на базу в течение дня заявки будут выполнены.

Задача 13.

Производится испытание на "самовозгорание" пяти телевизоров. Прогонка продолжается двое суток. За указанное время каждый из телевизоров перегревается и "самовозгорается" с вероятностью 0.1. Найти вероятность того, что на момент окончания испытаний сгорит не более двух телевизоров.

Задача 14.

Из урны, содержащей 20% белых и 80% черных шаров, наудачу с последующим возвращением извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров будет не менее четырех белых, если процедуру повторяют пять раз.

Задача 15.

На участке пять одинаковых станков. Вероятность того, что в произвольный момент каждый из них свободен и готов к обработке поступившей детали равна $1/5$. На участок для обработки поступают три детали. Найти вероятность того, что хотя бы две из них будут сразу же приняты к обработке.

Задача 16.

Известно, что при прохождении некоторого пролива при плохих метеоусловиях терпит аварию каждое двадцатое судно. Найти вероятность того, что из восьми вошедших в шторм в этот пролив судов не менее шести выйдут из него неповрежденными.

Задача 17.

Караван из 4 судов пересекает минное поле, вероятность подрыва для каждого из судов считается равной 0.1. Найти вероятность того, что не менее половины судов уцелеет.

Задача 18.

Центр наблюдения поддерживает связь с шестью самолетами, выполняющими учебное задание при условии создания противником активных помех. Связь после ее нарушения не восстанавливается. Вероятность потери связи за период выполнения задания равна 0.2. Найти вероятность того, что в момент окончания задания центр потеряет связь не более чем с тремя самолетами.

Задача 19.

Обрабатывающий участок состоит из пяти однотипных станков. Вероятность того, что станок исправен, равна 0.8. Плановое задание может быть выполнено, если исправно не менее трех станков. Найти вероятность того, что плановое задание не будет выполнено.

Задача 20.

Предварительный анализ показал, что для поражения военного объекта противника необходим прорыв к нему четырёх бомбардировщиков. Самолет поражается ПВО объекта с вероятностью 0.8. Атаку ведут восемь самолетов. Найти вероятность того, что объект будет поражен.

Задача 21.

Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 40-го размера, равна 0.4. В обувной отдел вошли пять покупателей. Найти вероятность того, что по крайней мере двум из них потребуется обувь 40-го размера.

Задача 22.

Тест состоит из 7 вопросов. На каждый вопрос дано три возможных ответа, среди которых необходимо выбрать один правильный. Какова вероятность того, что методом простого угадывания удастся правильно ответить по крайней мере на пять вопросов?

Задача 23.

Данные о состоянии погоды в некотором регионе сообщают семь автоматических метеостанций. Для получения уверенной информации для прогноза необходима исправная работа по крайней мере пяти из них. В течение года каждая из станций выходит из строя с вероятностью 0.1. Найти вероятность того, что в течение года центр обработки наблюдений будет получать достаточную для уверенного прогноза информацию.

Задача 24.

На ВЦ от каждого из десяти отделов предприятия в течение рабочего дня с вероятностью 0.2 может поступить заявка на выполнение однотипных расчетов. Расчеты ведутся в ночное время, причем до начала рабочего дня может быть выполнено не более 5 заказов. Найти вероятность того, что не все поступившие на ВЦ заказы будут выполнены.

Задача 25.

Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0.6. Для получения зачета достаточно трех попаданий. Найти вероятность получить зачет по стрельбе, если делается ровно 5 выстрелов.

Задача 26.

Контролёр ОТК проверяет 4 изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0.8 для каждого изделия. Найти вероятность того, что более половины проверенных изделий стандартны.