

Формула полной вероятности.

Полная вероятность.

2. 45% телевизоров, имеющих в магазине, изготовлены на I-ом заводе, 15% — на II-ом, остальные — на III-ем заводе. Вероятности того, что телевизоры не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны 0,96; 0,84; 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

Решение: Пусть событие A - телевизор выдержит гарантию. B_i - сделан на заводе $i \in \{I, II, III\}$.

$$P(B_1) = 0.45, \quad P(B_2) = 0.15, \quad P(B_3) = 1 - 0.45 - 0.15 = 0.40$$

$$P(A | B_1) = 0.96, \quad P(A | B_2) = 0.84 \quad P(A | B_3) = 0.90$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A | B_i) = \\ &= P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + P(B_3)P(A | B_3) = \\ &= 0.45 \cdot 0.96 + 0.15 \cdot 0.84 + 0.40 \cdot 0.90 = 0.432 + 0.126 + 0.360 = 0.918 \end{aligned}$$

Ответ: 0.918

3. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,25% брака, второй — 0,4%, третий — 0,6%. Какова вероятность попадания на сборку доброкачественной детали, если с первого автомата поступило 2000, со второго — 1500 и с третьего — 1300 деталей?

Решение: Пусть G - событие “деталь годная”, B_i - автомат i . Поступило $N_1 = 2000$, $N_2 = 1500$, $N_3 = 1300$, $N = 4800$, доля брака $q_1 = 0.0025$, $q_2 = 0.004$, $q_3 = 0.006$, доля годных $p_1 = 0.9975$, $p_2 = 0.996$, $p_3 = 0.994$.

Доли деталей по автоматам:

$$P(B_1) = \frac{N_1}{N} = \frac{2000}{4800} = \frac{5}{12}, \quad P(B_2) = \frac{1500}{4800} = \frac{5}{16}, \quad P(B_3) = \frac{1300}{4800} = \frac{13}{48}$$

По закону полной вероятности:

$$P(G) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(G | B_i)$$

Перепишем:

$$P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(\overline{G} | B_i).$$

Здесь $P(\overline{G} | B_i) = q_i$.

$$q_1 = \frac{1}{400}, \quad q_2 = \frac{1}{250}, \quad q_3 = \frac{3}{500}.$$

Тогда:

$$P(\overline{G}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{400} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{250} + \frac{13}{48} \cdot \frac{3}{500} = \frac{47}{12000}.$$

Значит:

$$P(G) = 1 - \frac{47}{12000} = \frac{11953}{12000} \approx 0.996083$$

Ответ: 0.996083

4. Вероятность того, что контрольную работу с первого раза напишет отличник, равна 0,9; хорошист – 0,7; троечник – 0,4. Найти вероятность того, что наудачу выбранный ученик напишет контрольную работу, если соотношение отличников, хорошистов и троечников в классе 1:3:5.

Решение: Пусть событие A - ученик напишет контрольную с первого раза. Категории B_1 - отличник, B_2 - хорошист, B_3 - троечник. Условные вероятности $P(A | B_1) = 0.9$, $P(A | B_2) = 0.7$, $P(A | B_3) = 0.4$.

Соотношение в классе 1 : 3 : 5. Сумма долей $1 + 3 + 5 = 9$, значит

$$P(B_1) = \frac{1}{9}, \quad P(B_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad P(B_3) = \frac{5}{9}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A | B_i) = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{9} \approx 0.556$$

Ответ: 0.556

5. Студент знает 24 билета из 30. В каком случае вероятность вытащить счастливый билет для него больше, если он идет сдавать экзамен первым или если — вторым?

Решение: Если идти первым, то вероятность “счастливого” билета равна:

$$P_{1-й} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

Пусть K - первый вытянул “известный” нашему студенту билет. $\bar{K}$ - первый вытянул “неизвестный”.

Тогда

$$P_{2-й} = P(K) \cdot P(\text{успех} \mid K) + P(\bar{K}) \cdot P(\text{успех} \mid \bar{K})$$

$$P(K) = \frac{24}{30}, \quad P(\bar{K}) = \frac{6}{30}$$

Если K случилось, осталось 29 билетов, из них “известных” 23, значит $P(\text{успех} \mid K) = \frac{23}{29}$.

Если $\bar{K}$ случилось, осталось “известных” 24 из 29: $P(\text{успех} \mid \bar{K}) = \frac{24}{29}$

Подставив, получим:

$$P_{2-й} = \frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} + \frac{6}{30} \cdot \frac{24}{29} = \frac{4}{5}$$

Ответ: вероятность одинакова и равна $\frac{4}{5}$

6. В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от 1 до 9, во второй от 10 до 20 и в третьей от 21 до 30. Из случайно выбранной урны берется шар. Какова вероятность того, что его номер делится на 3?

Решение: три урны выбираются равновероятно, затем из каждой берется случайный шар. Пусть U_1 - урна с числами 1, ..., 9, U_2 - урна с числами 10, ..., 20, U_3 урна с числами 21, ..., 30. A - событие “номер делится на 3”.

В U_1 : кратные 3 - 3, 6, 9, то есть $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$:

$$P(A \mid U_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

В U_2 : кратные 3 - 12, 15, 18, то есть $\frac{3}{11}$:

$$P(A \mid U_2) = \frac{3}{11}$$

В U_3 : кратные 3 - 21, 24, 27, 30, то есть $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$:

$$P(A \mid U_3) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

По закону полной вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{3}(P(A \mid U_1) + P(A \mid U_2) + P(A \mid U_3)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{11} + \frac{2}{5}\right) \approx 0.33535$$

Ответ: 0.33535

7. Из ящика, содержащего 4 белых и 6 черных шаров, утеряно два шара. Какова вероятность извлечь после этого два шара черного цвета?

8. В первом ящике 5 белых и 5 черных шаров, а во втором – 4 белых и 4 черных шара. Из первого во второй перекладывают 2 шара. Определить вероятность извлечения белого шара из второго ящика.

9. Три стрелка случайным образом распределяют между собой 3 заряда, один из которых холостой. Стрелки попадают в мишень с вероятностями $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{8}$ соответственно. Какова вероятность хотя бы одного попадания в мишень?

10. Два стрелка стреляют по одному разу, независимо друг от друга, выбирая одну из двух мишеней. Вероятность выбора первой мишени для первого стрелка 0,5, а для второго – 0,6. Вероятность попадания в выбранную мишень для каждого стрелка равна 0,8 и 0,9 соответственно. Какова вероятность ровно одного попадания во вторую мишень?

Формула Байеса.

11. Предположим, что 5% мужчин и 0,25% женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек мужчина.

12. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно и 1 — плохо. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, подготовленный хорошо — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен: а. отлично; б. плохо.

13. Из четырех игральных костей одна фальшивая — на ней 6 очков выпадает с вероятностью $\frac{1}{3}$. При бросании случайно выбранной кости выпала шестерка. Какова вероятность того, что была выбрана фальшивая кость?

14. Игроки могут с равной вероятностью играть в одну из двух игр. В одной игре используется одна игральная кость, и счет в игре равен количеству выпавших очков. В другой игре используются две игральные кости, и счет в игре равен сумме выпавших очков. Вы слышите, что выпало 4 очка. В какую игру вероятнее всего играли?

Домашняя работа.

1. Из 1000 ламп 100 принадлежит первой партии, 250 — второй и остальные — третьей партии. В первой партии 6%, во второй — 5%, в третьей — 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Какова вероятность того, что выбранная лампа бракованная?

2. Автомобиль на перекрестке может поехать прямо, а может свернуть направо или налево. Вероятность попадания в «пробку» при проезде прямо равна 0,5; направо — 0,3; налево — 0,2. Определить вероятность беспрепятственного проезда.

3. В торговую фирму поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении 5:2:3. Телевизоры не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96%, 92% и 94% случаев. Найти вероятность того, что купленный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

4. Имеются три одинаковых ящика. В первом лежат 2 белых и 2 черных шара; во втором — 3 черных шара; в третьем — 1 черный и 5 белых шара. Некто случайным образом вынимает шар из наугад выбранного ящика. Какова вероятность, что шар будет белый?

5. В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от 10 до 25, во второй от 26 до 32 и в третьей от 33 до 45 включительно. Из случайно выбранной урны берется шар. Какова вероятность того, что его номер будет простым числом?

6. Берут две колоды по 36 карт. Из первой колоды во вторую перекладывают 2 карты. Затем из второй колоды берется одна карта. Какова вероятность того, что это дама?

7. В альбоме 7 негашеных и 6 гашеных марок. Из них наудачу извлекаются 2 марки, подвергаются гашению и возвращаются в альбом. После чего вновь извлекают 3 марки. Определить вероятность того, что все 3 марки чистые.

8. Среди трех игральных костей одна фальшивая. На фальшивой кости шестерка появляется с вероятностью $\frac{1}{3}$. Бросили две игральные кости. Определить вероятность того, что выпали две шестерки.