Задания ЛР1. Команда 3

Тема 1. Непосредственный подсчет вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

3. *Цифры от* 1 *до* 9 *располагаются в случайном порядке. Какова вероятность того, что все нечетные цифры окажутся на нечетных местах?*

Решение: мы можем расставить 9 цифр на 9 местах 9! способами. 5 нечетных цифр на 5 нечетных позициях 5! способами. 4 четных цифры на 4 четных позиции 4! способами. То есть совместное количество способов $4! \cdot 5! = 2880$.

Итоговая вероятность:

$$P = \frac{2880}{362880} = \frac{1}{126}$$

Ответ: $\frac{1}{126}$

---

13. *Обезьяна выкладывает карточки с буквами* ***К, Р, О, К, О, Д, И, Л*** *в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что у нее получится выложить слово* ***КРОКОДИЛ****?*

Решение: Всего 8 букв, но буквы ‘К’ и ‘О’ повторяются по 2 раза каждая. Тогда по формуле для количества перестановок с повторяющимися элементами:

$$\frac{8!}{2! \cdot 2!} = \frac{40320}{4} = 10080$$

Так как нам нужна одна конкретная комбинация, то получим:

$$P = \frac{1}{10080}$$

Ответ: $\frac{1}{10080}$

Тема 2. Геометрические вероятности.

3. *В центре стола, имеющего форму эллипса с полуосями* a *и* b*, распололжен магнит. На стол случайным образом бросается булавка, которая притягивается магнитом, если расстояние между ними не превосходит числа* $r, \ \ r < \min\{a, b\}$*. Найти вероятность того, что булавка будет притянута.*

Решение: Площадь эллипса с полуосями a и b:

$$S_{\text{элл}} = \pi ab$$

Площадь круга радиуса r:

$$S_{\text{кр}} = \pi r^2$$

Так как по условию $r < \min(a, b)$, круг радиуса r целиком лежит внутри эллипса. Вероятность того, что случайно брошенная булавка попадет в круг равна отношению площадей:

$$P = \frac{S_{\text{кр}}}{S_{\text{элл}}} = \frac{\pi r^2}{\pi ab} = \frac{\pi r^2}{\pi ab} = \frac{r^2}{ab}$$

Ответ: $\frac{r^2}{ab}$

---

13. *В прямоугольный треугольник, один из углов которого равен $\frac{\pi}{6}$, случайным образом бросается точка. Какова вероятность того, что она окажется внутри вписанной в треугольник окружности?*

Решение: Пусть гипотенуза - c, катеты - a и b.

$$\frac{a}{b} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = \sqrt{3}a$$

Площадь:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a\left(\sqrt{3}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

По формуле радиуса вписанной окружности в прямоугольном треугольнике:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Подставим $b = \sqrt{3}a$:

$$c = \sqrt{a^2+3a^2} = 2a$$
$$r = \frac{a+\sqrt{3}a-2a}{2} = \frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

Площадь вписанной окружности:

$$S_{\text{окр}} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\right)^2 = \pi a^2\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

Вероятность

$$P = \frac{S_{\text{окр}}}{S_{\triangle}} = \frac{\pi a^2\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{\pi\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} \approx 0.48$$

Ответ: 0.48

Тема 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

3. *Два стрелка стреляют по одному разу, независимо друг от друга выбирая одну из двух мишеней. Вероятность выбора первой мишени для них* 0.5 *и* $\frac{2}{3}$ *соответственно, а вероятности попадания в первую мишень* 0.8 *для первого стрелка и* 0.9 *для второго стрелка, во вторую мишень соответственно* 0.7 *и* 0.8*. Какова вероятность хотя бы одного попадания в какую-либо мишень?*

Решение:

$$P(\text{хотя бы один попадет}) = 1 - P(\text{оба промахнутся})$$

Для первого стрелка: если он выбрал первую мишень ($\frac{1}{2}$), промах = $1-0.8 = 0.2$; если выбрал вторую ($\frac{1}{2}$), промах = $1-0.7 = 0.3$.

Посчитав по формуле полной вероятности, получим:

$$P(\text{промах первого}) = 0.5\cdot0.2 + 0.5\cdot0.3 = 0.25$$

Для второго стрелка: если он выбрал первую мишень ($\frac{2}{3}$), промах = $1 - 0.9 = 0.1$; если выбрал вторую ($\frac{1}{3}$), промах = $1 - 0.8 = 0.2$.

Посчитав по формуле полной вероятности, получим:

$$P(\text{промах второго}) = \frac{2}{3} \cdot 0.1 + \frac{1}{3} \cdot 0.2 = \frac{2}{15}$$

Вероятность того, что оба промахнутся:

$$P(\text{оба промахнутся}) = P(\text{промах первого}) \cdot P(\text{промах второго}) = 0.25 \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{30}.$$

Тогда ответ:

$$P(\text{хотя бы один попадет}) = 1 - P(\text{оба промахнутся}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

Ответ: $\frac{29}{30}$

---

13. *В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой - с номерами от* 1 *до* 9*, во второй - от* 10 *до* 20*, в третьей - от* 21 *до* 30 *включительно. Из случайно выбранной урны берется шар, и оказывается, что его номер делится на* 5*. Какова вероятность того, что этот шар взят из первой урны?*

Решение: Пусть события A_1, A_2, A_3 - выбрана первая, вторая и третья урны соответственно. Так как урны выбираются случайно, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$. Пусть B - событие "выпал номер, делящийся на 5".

По формуле Байеса:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3)}$$

Найдем $P(B \mid A_i)$.

В урне 1 есть только одно число, кратное 5, то есть $P(B \mid A_1) = \frac{1}{9}$ (так как всего чисел 9).

В урне 2 есть 3 числа, кратных 5, то есть $P(B \mid A_2) = \frac{3}{11}$ (всего чисел 11).

В урне 3 есть 2 числа, кратных 5, то есть $P(B \mid A_3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ (всего 10 чисел).

При подстановке всего в формулу выше и опустив расчеты, получим:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{55}{289}$$

Ответ: $\frac{55}{289}$

Тема 4. Схема Бернулли.

3. *Прибор содержит шесть однотипных микросхем, вероятность выхода из строя каждой в течение одного месяца равна* 0.2*. Найти вероятность того, что в течение этого срока из строя выйдет не более половины микросхем.*

Решение:

Ответ:

---

13. Производится испытание на “самовозгорание” пяти телевизоров. Прогонка продолжается двое суток. За указанное время каждый из телевизоров перегревается и “самовозгорается” с вероятностью 0.1. Найти вероятность того, что на момент окончания испытаний сгорит не более двух телевизоров.

Решение:

Ответ: