Формула полной вероятности.

Полная вероятность.

2. 45% *телевизоров, имеющихся в магазине, изготовлены на I-ом заводе,* 15% *— на II-ом, остальные — на III-ем заводе. Вероятности того, что телевизоры не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны* $0.96; 0.84; 0.9$ *соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.*

Решение: Пусть событие A - телевизор выдержит гарантию. B_i - сделан на заводе $i \in \{I, II, III\}$.

$$P(B_1) = 0.45, \quad P(B_2) = 0.15, \quad P(B_3) = 1 - 0.45 - 0.15 = 0.40$$

$$P(A \mid B_1) = 0.96, \quad P(A \mid B_2) = 0.84 \quad P(A \mid B_3) = 0.90$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) P(A \mid B_i) =$$

$$= P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + P(B_3)P(A \mid B_3) =$$

$$= 0.45 \cdot 0.96 + 0.15 \cdot 0.84 + 0.40 \cdot 0.90 = 0.432 + 0.126 + 0.360 = 0.918$$

Ответ: 0.918

---

3. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0.25% *брака, второй —* 0.4%*, третий —* 0.6%*. Какова вероятность попадания на сборку доброкачественной детали, если с первого автомата поступило* 2000*, со второго —* 1500 *и с третьего —* 1300 *деталей?*

Решение: Пусть G - событие “деталь годная”, B_i - автомат i. Поступило $N_1 = 2000,\ N_2 = 1500,\ N_3 = 1300,\ N = 4800$, доля брака $q_1 = 0.0025,\ q_2 = 0.004,\ q_3 = 0.006$, доля годных $p_1 = 0.9975,\ p_2 = 0.996,\ p_3 = 0.994$.

Доли деталей по автоматам:

$$P(B_1) = \frac{N_1}{N} = \frac{2000}{4800} = \frac{5}{12}, \quad P(B_2) = \frac{1500}{4800} = \frac{5}{16}, \quad P(B_3) = \frac{1300}{4800} = \frac{13}{48}$$

По закону полной вероятности:

$$P(G) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) P(G \mid B_i)$$

Перепишем:

$$P(G) = 1 - P\left(\overline{G}\right) = 1 - \sum_{i=1}^{3} P(B_i) P\left(\overline{G} \mid B_i\right).$$

Здесь $P\left(\overline{G} \mid B_i\right) = q_i$.

$$q_1 = \frac{1}{400}, \quad q_2 = \frac{1}{250}, \quad q_3 = \frac{3}{500}.$$

Тогда:

$$P\left(\overline{G}\right) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{400} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{250} + \frac{13}{48} \cdot \frac{3}{500} = \frac{47}{12000}.$$

Значит:

$$P(G) = 1 - \frac{47}{12000} = \frac{11953}{12000} \approx 0.996083$$

Ответ: 0.996083

---

4. Вероятность того, что контрольную работу с первого раза напишет отличник, равна 0.9*; хорошист –* 0.7*; троечник –* 0.4*. Найти вероятность того, что наудачу выбранный ученик напишет контрольную работу, если соотношение отличников, хорошистов и троечников в классе* $1 : 3 : 5$*.*

Решение: Пусть событие A - ученик напишет контрольную с первого раза. Категории B_1 - отличник, B_2 - хорошист, B_3 - троечник. Условные вероятности $P(A \mid B_1) = 0.9,\ P(A \mid B_2) = 0.7,\ P(A \mid B_3)0.4$. Соотношение в классе $1 : 3 : 5$. Сумма долей $1 + 3 + 5 = 9$, значит

$$P(B_1) = \frac{1}{9}, \quad P(B_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad P(B_3) = \frac{5}{9}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) P(A \mid B_i) = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{9} \approx 0.556$$

Ответ: 0.556

---

5. Студент знает 24 *билета из* 30. *В каком случае вероятность вытащить счастливый билет для него больше, если он идет сдавать экзамен первым или если — вторым?*

Решение: Если идти первым, то вероятность “счастливого” билета равна:

$$P_{\text{1-й}} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

Пусть K - первый вытянул “известный” нашему студенту билет. $\overline{K}$ - первый вытянул “неизвестный”.

Тогда

$P_{\text{2-й}} = P(K) \cdot P(\text{успех} \mid K) + P\left(\overline{K}\right) \cdot P\left(\text{успех} \mid \overline{K}\right)$

$P(K) = \frac{24}{30},\ P\left(\overline{K}\right) = \frac{6}{30}$

Если K случилось, осталось 29 билетов, из них “известных” 23, значит $P(\text{успех} \mid K) = \frac{23}{29}$.

Если $\overline{K}$ случилось, осталось “известных” 24 из 29: $P\left(\text{успех} \mid \overline{K}\right) = \frac{24}{29}$

Подставив, получим:

$$P_{\text{2-й}} = \frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} + \frac{6}{30} \cdot \frac{24}{29} = \frac{4}{5}$$

Ответ: вероятность одинакова и равна $\frac{4}{5}$

---

6. В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от 1 *до* 9, *во второй от* 10 *до* 20 *и в третьей от* 21 *до* 30. *Из случайно выбранной урны берется шар. Какова вероятность того, что его номер делится на* 3*?*

Решение: три урны выбираются равновероятно, затем из каждой берется случайный шар. Пусть U_1 - урна с числами $1, ..., 9$, U_2 - урна с числами $10, \ldots, 20$, U_3 урна с числами $21, \ldots, 30$. A - событие "номер делится на 3".

В U_1: кратные 3 - 3, 6, 9, то есть $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$:

$$P(A \mid U_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

В U_2: кратные 3 - 12, 15, 18, то есть $\frac{3}{11}$:

$$P(A \mid U_2) = \frac{3}{11}$$

В U_3: кратные 3 - 21, 24, 27, 30, то есть $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$:

$$P(A \mid U_3) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

По закону полной вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{3}(P(A \mid U_1) + P(A \mid U_2) + P(A \mid U_3)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{11} + \frac{2}{5}\right) \approx 0.33535$$

Ответ: $\boxed{0.33535}$

---

7. Из ящика, содержащего 4 *белых и* 6 *черных шаров, утеряно два шара. Какова вероятность извлечь после этого два шара черного цвета?*

Решение: Представим, что все 10 шаров перемешали, и первые 2 утеряны. В случайной перестановке любой набор из двух позиций равновероятно сожержит любую пару шаров. Значит вероятность того, что именно позиции 3 и 4 окажутся черными - такая же, как если бы мы просто сразу вытащили 2 шара из 10 без всяких потерь.

Получим:

$$P(\text{оба черные}) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\boxed{\frac{1}{3}}$

---

8. В первом ящике 5 белых и 5 черных шаров, а во втором – 4 белых и 4 черных шара. Из первого во второй перекладывают 2 шара. Определить вероятность извлечения белого шара из второго ящика.

Решение: Пусть K число белых шаров, переложенных из первого ящика во второй ($K \in \{0, 1, 2\}$).

В первом ящике изначально 5 белых и 5 черных, перекладываем 2 шара:

$$P(K = 0) = \frac{C_5^0 C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9},$$
$$P(K = 1) = \frac{C_5^1 C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9},$$
$$P(K = 2) = \frac{C_5^2 C_5^0}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

Во втором ящике было 4 белых и 4 черных. После перекладки там становится $8 + 2 = 10$ шаров, из них белых $4 + K$. При случайном вытягивании шара из второго ящика:

$$P(\text{белый} \mid K) = \frac{4 + K}{10}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(\text{белый}) = \sum_{k=0}^{2} P(K = k) \frac{4 + k}{10} = \frac{1}{10} \left(\frac{2}{9} \cdot 4 + \frac{5}{9} \cdot 5 + \frac{2}{9} \cdot 6 \right) =$$
$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{8 + 25 + 12}{9} = \frac{1}{10} \cdot \frac{45}{9} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

---

9. Три стрелка случайным образом распределяют между собой 3 заряда, один из которых холостой. Стрелки попадают в мишень с вероятностями $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{8}$ соответственно. Какова вероятность хотя бы одного попадания в мишень?

Решение: Пусть есть 3 стрелка: S_1, S_2, S_3. Они имеют вероятности попадания $p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{3}{4}\ p_3 = \frac{7}{8}$. Есть 3 заряда, из них 2 боевых и 1 холостой. Заряды случайно распределяются между стрелками: это то же самое, что случайно выбрать, кто получит холостой. Все 3 варианта равновероятны.

Рассмотрим все случаи:

1) Холостой у S_1, стреляют S_2, S_3.

Вероятность хотя бы одного попадания:

$$1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

2) Холостой у S_2, стреляют S_1, S_3.

$$1 - (1 - p_1)(1 - p_3) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

3) Холостой у S_3, стреляют S_1, S_2.

$$1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(\text{хотя бы одно попадание}) = \frac{1}{3}\left(\frac{31}{32} + \frac{15}{16} + \frac{7}{8}\right) = 0.9271$$

Ответ: 0.9271

---

10. Два стрелка стреляют по одному разу, независимо друг от друга, выбирая одну из двух мишеней. Вероятность выбора первой мишени для первого стрелка 0.5*, а для второго —* 0.6*. Вероятность попадания в выбранную мишень для каждого стрелка равна* 0.8 *и* 0.9 *соответственно. Какова вероятность ровно одного попадания во вторую мишень?*

Решение: Пусть $H_{2,1}$ - первый стрелок попал во вторую мишень, $H_{2,2}$ - второй стрелок попал во вторую мишень. Искомое событие: ровно одно попадание во вторую мишень - это

$$\left(H_{2,1} \cap \overline{H_{2,2}}\right) \cup \left(\overline{H_{2,1}} \cap H_{2,2}\right)$$

а события для разных стрелков независимы.

2. Вероятность попасть именно во вторую мишень для каждого:

Первый выбирает вторую с вероятностью 0.5 и, выбрав её, попадает с 0.8:

$$P\left(H_{2,1}\right) = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4$$

Второй выбирает вторую с вероятностью 0.4 (потому что первую он выбирает 0.6) и попадает с 0.9:

$$P\left(H_{2,2}\right) = 0.4 \cdot 0.9 = 0.36$$

Тогда

$$P(\text{ровно одно попадание во 2-ю}) = P\left(H_{2,1}\right)\left(1 - P\left(H_{2,1}\right)\right)P\left(H_{2,2}\right) =$$

$$= 0.4 \cdot (1 - 0.36) + (1 - 0.4) \cdot 0.36 = \frac{59}{125}$$

Ответ: 0.472

Формула Байеса.

11. Предположим, что 5% мужчин и 0.25% женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек мужчина.

Решение: Пусть M - человек - мужчина, W - человек - женщина, D - человек - дальтоник. Тогда:

$$P(M) = P(W) = \frac{1}{2}, \quad P(D \mid M) = 0.05 \quad P(D \mid W) = 0.0025$$

По Байесу:

$$P(M \mid D) = \frac{P(M)P(D \mid M)}{P(M)P(D \mid M) + P(W)P(D \mid W)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.05}{\frac{1}{2} \cdot 0.05 + \frac{1}{2} \cdot 0.0025} = 0.95238$$

Ответ: 0.95238

---

12. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно и 1 — плохо. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, подготовленный хорошо— на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен: a. отлично; b. плохо.

В группе 10 студентов: 3 - “отлично”, 4 - “хорошо”, 2 - “посредственно”, 1 - “плохо”. Это априорные вероятности выбора студента:

$$P(O) = \frac{3}{10}, \quad P(H) = \frac{4}{10} \quad P(M) = \frac{2}{10}, \quad P(P) = \frac{1}{10}$$

Из 20 экзаменационных вопросов студент “знает” k штук:

$$k_O = 20, \quad k_H = 16, \quad k_M = 10, \quad k_P = 5$$

Экзаменатор задает 3 вопроса наугад (без возвращения) из 20. Студент “ответил на 3 вопроса” = ответил на все 3 заданных.

Если студент знает k из 20, то вероятность, что все 3 заданных попадут в известные, равна

$$P(\text{ответил } 3 \mid k) = \frac{C_k^3}{C_{20}^3}$$

Подставляем:

$$C_{20}^3 = 1140,$$
$$P(\text{ответил } 3 \mid O) = 1,$$
$$P(\text{ответил } 3 \mid H) = \frac{C_{16}^3}{1140} = \frac{560}{1140} = \frac{28}{57}$$
$$P(\text{ответил } 3 \mid M) = \frac{C_{10}^3}{1140} = \frac{120}{1140} = \frac{2}{19}$$
$$P(\text{ответил } 3 \mid P) = \frac{C_5^3}{1140} = \frac{10}{1140} = \frac{1}{114}$$

Ненормированные веса

$$w_O = P(O)P(\text{ответил } 3 \mid O) = \frac{3}{10},$$

$$w_H = \frac{4}{10} \cdot \frac{28}{57} = \frac{56}{285},$$

$$w_M = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{19} = \frac{2}{95} w_P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{114} = \frac{1}{1140}$$

Сумма весов:

$$W = w_O + w_H + w_M + w_P = \frac{197}{380}.$$

Апостериорные вероятности (делим каждый вес на W):

$$P(O \mid \text{ответил } 3) = \frac{w_O}{W} = \frac{114}{197} \approx 0.579,$$

$$P(H \mid \text{ответил } 3) = \frac{w_H}{W} = \frac{224}{591} \approx 0.379,$$

$$P(M \mid \text{ответил } 3) = \frac{w_M}{W} = \frac{8}{197} \approx 0.041,$$

$$P(P \mid \text{ответил } 3) = \frac{w_P}{W} = \frac{1}{591} \approx 0.00169.$$

Ответ: $\text{a)} \quad \frac{114}{197} = 0.579; \ \text{b)} \quad \frac{1}{591} \approx 0.00169$

---

13. Из четырех игральных костей одна фальшивая — на ней 6 очков выпадает с вероятностью $\frac{1}{3}$. При бросании случайно выбранной кости выпала шестерка. Какова вероятность того, что была выбрана фальшивая кость?

Решение: Пусть F - выбрана фальшивая кость, N - выбрана нормальная кость, S - выпала шестерка.

Дано:

$$P(F) = \frac{1}{4}, \quad P(N) = \frac{3}{4}$$

Вероятности выпадения шестерки:

$$P(S \mid F) = \frac{1}{3}, \quad P(S \mid N) = \frac{1}{6}$$

По формуле общей вероятности:

$$P(S) = P(F)P(S \mid F) + P(N)P(S \mid N) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$$

Вычислим:

$$P(S) = \frac{1}{12} + \frac{3}{24} = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

По формуле Байеса:

$$P(F \mid S) = \frac{P(F)P(S \mid F)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{24}} = 0.4$$

Ответ: 0.4

---

14. Игроки могут с равной вероятностью играть в одну из двух игр. В одной игре используется одна игральная кость, и счет в игре равен количеству выпавших очков. В другой игре используются две игральные кости, и счет в игре равен сумме выпавших очков. Вы слышите, что выпало 4 очка. В какую игру вероятнее всего играли?

Решение: Пусть G_1 - игра с одной костью, G_2 - с двумя. Приоры равны: $P(G_1) = P(G_2) = \frac{1}{2}$, S - счет равен 4.

Если G_1: $P(S \mid G_1) = P(\text{выпало 4 на d6}) = \frac{1}{6}$. Если G_2: $P(S \mid G_2) = P(\text{сумма 2d6} = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

$$P(G_1 \mid S) \propto \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}, \quad P(G_2 \mid S) \propto \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

Нормируем:

$$P(G_1 \mid S) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{24}} = \frac{2}{3}, \quad P(G_2 \mid S) = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{24}} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: С вероятностью $\frac{2}{3}$ играли одной костью, а двумя - $\frac{1}{3}$

Домашняя работа.

1. Из 1000 *ламп* 100 *принадлежит первой партии,* 250 *— второй и остальные — третьей партии. В первой партии* 6% *, во второй —* 5%*, в* *третьей — 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Какова вероятность того, что выбранная лампа бракованная?*

Решение: Пусть B - лампа бракована. P_1, P_2, P_3 - лампа из 1-й, 2-й, 3-й партии.

Тогда:

$$P(P_1) = \frac{100}{1000} = 0.1, \quad P(P_2) = \frac{250}{1000} = 0.25, \quad P(P_3) = \frac{650}{1000} = 0.65$$

$$P(B \mid P_1) = 0.06, \quad P(B \mid P_2) = 0.05, \quad P(B \mid P_3) = 0.04$$

По формуле полной вероятности:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(P_i)P(B \mid P_i) =$$

$$= 0.1 \cdot 0.06 + 0.25 \cdot 0.05 + 0.65 \cdot 0.04 = \frac{89}{2000}$$

Ответ: $\boxed{\frac{89}{2000}}$

---

2. Автомобиль на перекрестке может поехать прямо, а может свернуть направо или налево. Вероятность попадания в «пробку» при проезде прямо равна 0.5; направо – 0.3; налево – 0.2. Определить вероятность беспрепятственного проезда.

Решение: Пусть направления выбираются равновероятно:

$$P(\text{без пробки}) = \frac{1}{3}(1 - 0.5 + 1 - 0.3 + 1 - 0.2) = 0.667$$

Ответ: $\boxed{0.667}$

---

3. В торговую фирму поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении 5:2:3. Телевизоры не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96%, 92% и 94% случаев. Найти вероятность того, что купленный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Решение:

$$P(F_1) = \frac{5}{10} = 0.5, \quad P(F_2) = \frac{2}{10} = 0.2, \quad P(F_3) = \frac{3}{10} = 0.3$$

Надежности:

$$P(A \mid F_1) = 0.96, \quad P(A \mid F_2) = 0.92, \quad P(A \mid F_3) = 0.94$$

где A - не потребует ремонтажа.

Тогда

$$P(A) = \sum_i P(F_i) P(A \mid F_i) = 0.5 \cdot 0.96 + 0.2 \cdot 0.92 + 0.3 \cdot 0.94 = 0.946$$

Ответ: $\boxed{0.946}$

---

4. Имеются три одинаковых ящика. В первом лежат 2 белых и 2 черных шара; во втором — 3 черных шара; в третьем — 1 черный и 5 белых шара. Некто случайным образом вынимает шар из наугад выбранного ящика. Какова вероятность, что шар будет белый?

Решение: Три ящика, выбираются равновероятно — значит, $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$.

Состав:

Ящик	**Белые**	**Чёрные**	**Всего**	$P(\text{белый} \mid B_i)$
1	2	2	4	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
2	0	3	3	0
3	5	1	6	$\frac{5}{6}$

По формуле полной вероятности:

$$P(\text{белый}) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) P(\text{белый} \mid B_i)$$

$$P(\text{белый}) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + 0 + \frac{5}{6} \right) = \frac{4}{9}$$

Ответ: $\boxed{\frac{4}{9}}$

5. В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от 10 до 25, во второй от 26 до 32 и в третьей от 33 до 45 включительно. Из случайно выбранной урны берется шар. Какова вероятность того, что его номер будет простым числом?

Решение:

Обозначим A — “номер простое число”, U_1, U_2, U_3 — выбор 1-й, 2-й, 3-й урны.

Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{3}(P(A \mid U_1) + P(A \mid U_2) + P(A \mid U_3)).$$

По формуле условной вероятности:

Урна 1: числа 10…25. Простые: $11, 13, 17, 19, 23$.

$$P(A \mid U_1) = \frac{5}{16}$$

Урна 2: числа 26…32. Простые: $29, 31$.

$$P(A \mid U_2) = \frac{2}{7}$$

Урна 3: числа 33…45. Простые: $37, 41, 43$.

$$P(A \mid U_3) = \frac{3}{13}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{16} + \frac{2}{7} + \frac{3}{13}\right) \approx 0.2763$$

Ответ: $\boxed{0.2763}$

---

6. Берут две колоды по 36 *карт. Из первой колоды во вторую перекладывают* 2 *карты. Затем из второй колоды берется одна карта. Какова вероятность того, что это дама?*

Решение: Во второй колоде изначально 4 дамы из 36 карт. Из первой колоды перекладываем 2 случайные карты. В первой колоде доля дам $\frac{4}{36}$, значит ожидаемое число дам среди переложенных двух равно

$E[K] = 2 \cdot \frac{4}{36} = \frac{2}{9}$

Тогда ожидаемое число дам во второй колоде после перекладки:

$$4 + E[K] = 4 + \frac{2}{9} = \frac{38}{9}$$

После перекладки во второй колоде 38 карт, и мы вытягиваем одну наугад. Безусловная вероятность вытянуть даму равна

$$E\left[\frac{4+K}{38}\right] = \frac{E[4+K]}{38} = \frac{4+\frac{2}{9}}{38} = \frac{\frac{38}{9}}{38} = \frac{1}{9}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$

---

7. В альбоме 7 негашеных и 6 гашеных марок. Из них наудачу извлекаются 2 марки, подвергаются гашению и возвращаются в альбом. После чего вновь извлекают 3 марки. Определить вероятность того, что все 3 марки чистые.

Решение: В альбоме изначально 7 чистых и 6 гашеных, всего 13. Достаем 2 наугад, гасим их и возвращаем. Пусть К - сколько из этих двух были чистыми. Тогда $K \in \{0, 1, 2\}$.

$$P(K=0) = \frac{C_7^0 C_6^2}{C_{13}^2} = \frac{15}{78} = \frac{5}{26},$$

$$P(K=1) = \frac{C_7^1 C_6^1}{C_{13}^2} = \frac{42}{78} = \frac{7}{13},$$

$$P(K=2) = \frac{C_7^2 C_6^0}{C_{13}^2} = \frac{21}{78} = \frac{7}{26}$$

После этого в альбоме все те же 13 марок, но чистых осталось $7 - K$.

Теперь тянем 3 марки. Условная вероятность, что все 3 - чистые, при фиксированном $K = k$:

$$P(\text{все 3 чистые} \mid K = k) = \frac{C_{7-k}^3}{C_{13}^3}$$

Вычислим нужные комбинации:

$$C_{13}^3 = 286, \quad C_7^3 = 35, \quad C_6^3 = 20, \quad C_5^3 = 10$$

Значит:

$$P(\text{все 3} \mid K = 0) = \frac{35}{286},$$
$$P(\text{все 3} \mid K = 1) = \frac{20}{286},$$
$$P(\text{все 3} \mid K = 2) = \frac{10}{286}$$

По формуле полной вероятности:

$$P = \sum_{k=0}^{2} P(K = k) P(\text{все 3} \mid K = k) = 0.0706$$

Ответ: 0.0706

---

8. Среди трех игральных костей одна фальшивая. На фальшивой кости шестерка появляется с вероятностью $\frac{1}{3}$. Бросили две игральные кости. Определить вероятность того, что выпали две шестерки.

Решение: 3 кости: 2 честные, 1 фальшивая.

У честной кости: $P(6) = \frac{1}{6}$

У фальшивой кости: $P(6) = \frac{1}{3}$

Пусть C - честная кость, F - фальшивая.

Возможные пары:

Пара брошенных костей	**Вероятность выбора**	**# шестерок**
C, C	$\frac{C_2^2}{C_3^2} = \frac{1}{3}$	обе честные
C, F	$\frac{C_2^1 C_1^1}{C_3^2} = \frac{2}{3}$	одна честная, одна фальшивая

Если обе честные:

$$P(6,6 \mid C,C) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

Если одна честная и одна фальшивая:

$$P(6,6 \mid C,F) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

Формула полной вероятности:

$$P(6,6) = P(C,C) \cdot P(6,6 \mid C,C) + P(C,F) \cdot P(6,6 \mid C,F) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{36} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{18} = 0.0463$$

Ответ: 0.0463