

Тема # 5

НЕКОТОРЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Задание_ 01.

Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найдите вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течении 4 суток не превысит нормы.

Задание_ 02.

Симметричную монету подбрасывают 10 раз. Определите вероятность выпадения "герба": 1) ровно пять раз; 2) не более пяти раз; 3) хотя бы один раз.

Задание_ 03.

Вероятность выигрыша на один лотерейный билет равна 0,01. Определить, сколько билетов нужно купить, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша в лотерею была не менее 0,9.

Задание_ 04.

В коробке лежит 200 конденсаторов, причем два из них нужной емкости. Случайным образом из коробки вынимают один конденсатор и после определения его емкости возвращают обратно в коробку. Выяснить, сколько раз нужно осуществить указанную операцию, чтобы вероятность хотя бы один встретить конденсатор нужной емкости была не менее 0,95.

Теорема 1 (теорема Пуассона)

Пусть в схеме Бернулли число испытаний $n \rightarrow \infty$ и при этом $np \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda > 0$. Тогда для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ выполнено

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

В упрощенной форме, теорему Пуассона можно интерпретировать как:

Если число испытаний n по схеме Бернулли "велико", а вероятность успеха p "мала", причем "мАло" также значение $\lambda = np$, тогда $P_n(m)$ можно приближенно найти по формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = \overline{0, n}.$$

Совокупность вероятностей $\{P_n(m)\}_{m=0}^n$ или также обозначаемую за $\{P(m; \lambda)\}_{m=0}^n$ называют распределением Пуассона.

Тема # 05. Некоторые распределения случайных величин

о приближенные значения распределения Пуассона: $P(m; \lambda) \approx \lambda^m e^{-\lambda} / m!$

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	18394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007
8										00001

m	λ									
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	08422	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	08924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	00076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	00014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	10326
9	00002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00006	00018	00047	00109	00223

Тема # 05. Некоторые распределения случайных величин

о формула Пуассона: $P(m; \lambda) \approx \lambda^m e^{-\lambda} / m!$

Задание_ 05.

Вероятность выпуска бракованного сверла равна 0,015. Сверла укладывают в коробки по 100 штук. Найдите вероятность того, что в коробке, выбранной наудачу, не окажется ни одного бракованного сверла.

Задание_ 06.

Вероятность того, что у автомобиля во время движения спускает колесо, равна 0,0004. Найдите вероятность того, что из 10 000 движущихся автомобилей такая проблема возникнет меньше чем у трех автомобилей.

Задание_ 07.

Пусть имеются 1000 деталей с вероятностью брака 0,001. Найти вероятность того, что в партии одна бракованная деталь

Задание_ 08.

Вероятность сбоя в работе банкомата при каждом запросе равна 0,0019. Банкомат обслуживает 2000 клиентов за неделю. Определить вероятность того, что при этом число сбоев не превзойдет 3.

Если в схеме испытаний Бернулли значение количества испытаний n "велико", причем "велики" также вероятности успеха p и неудачи q , то для любого $m \leq n$ имеем, что

$$\sqrt{npq} \cdot P_n(m) \approx \varphi(x),$$

где

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Функцию $\varphi(x)$ называют плотностью стандартного нормального (или гауссова) распределения.

Более габаритно, приближенную формулу вероятности можно представить как

$$P_n(m) \approx \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi npq}}$$

Тема # 05. Некоторые распределения случайных величин

о значениях плотности стандартного нормального (гауссова) распределения: $\varphi(x)$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394

Задание_ 09.

Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Определить вероятность того, что при 400 выстрелах произойдет ровно 300 попаданий.

Задание_ 10.

Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Задание_ 11.

Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле составляет 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

Задание_ 12.

Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Если в схеме испытаний Бернулли значение количества испытаний n "велико", причем "велики" также вероятности успеха p и неудачи q , то имеет место

интегральная формула Муавра-Лапласа:

$$P\{m_1 \leq m \leq m_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Функцию $\Phi(x)$ называют функцией стандартного нормального (или гауссова) распределения. Также справедлива приближенная формула:

$$P\{m_1 \leq m \leq m_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

где

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy \quad - \quad \text{интеграл Лапласа.}$$

Тема # 05. Некоторые распределения случайных величин

о некоторые значения функции стандартного нормального распределения

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,01	0,0040	0,60	0,2257	1,80	0,4641
0,05	0,0199	0,70	0,2580	1,90	0,4713
0,10	0,0398	0,80	0,2881	2,00	0,4772
0,15	0,0596	0,90	0,3159	2,20	0,4861
0,20	0,0793	1,00	0,3413	2,50	0,4938
0,25	0,0987	1,20	0,3849	2,75	0,4969
0,30	0,1179	1,30	0,4032	3,00	0,4986
0,35	0,1368	1,40	0,4192	3,50	0,4997
0,40	0,1554	1,50	0,4332	4,00	0,4999
0,45	0,1736	1,60	0,4452	4,50	0,4999
0,50	0,1915	1,70	0,4554	5,00	0,4999

Задание_ 13.

Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найдите вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется неисправленных от 70 до 100 деталей.

Задание_ 14.

Найдите вероятность того, что при 600 бросаниях игральной кости выпадет от 90 до 120 "шестерок" .

Задание_ 15.

На факультете обучаются 300 студентов. Предполагая, что вероятность родиться в каждый день года одинакова, найдите вероятность того, что ровно 80 студентов факультета будут праздновать дни рождения летом.

Задание_ 16.

Вероятность искажения одного символа при передаче сообщения по линии связи равна 0,001. Сообщение считают принятым, если в нем отсутствуют искажения. Найдём вероятность того, что будет принято сообщение, состоящее из 20 слов по 100 символов каждое.

Тема # 05. Некоторые распределения случайных величин

о некоторые условные рекомендации по применению формул

Если число испытаний $n = \overline{10, 20}$, то приближенные формулы используют для грубых прикидочных расчетов. При этом формулу Пуассона применяют в том случае, когда $\lambda = np$ или $\lambda' = nq$ изменяются в пределах от 0 до 2 (при $n = 10$) и от 0 до 3 (при $n = 20$); в противном случае необходимо пользоваться формулами Муавра-Лапласа.

При $n = \overline{20, 100}$ приближенные формулы уже можно использовать для прикладных инженерных расчетов. Формулу Пуассона рекомендуется применять, когда λ или λ' заключены в пределах от 0 до 3 (при $n = 20$) и от 0 до 7 (при $n = 100$).

Если $n = \overline{100, 1000}$, то практически в любых инженерных расчетах можно обойтись приближенными формулами. Формулу Пуассона используют в случае, когда λ или λ' изменяются в пределах от 0 до 7 (при $n = 100$) и от 0 до 15 (при $n = 1000$).

Наконец, при $n > 1000$ даже специальные таблицы рассчитывают с помощью приближенных формул (правда, для увеличения точности используют специальные поправки). В этом случае для применения формулы Пуассона необходимо, чтобы λ или λ' лежали в пределах от 0 до α , где $\alpha = 15$ при $n = 1000$ и увеличивается с ростом n .

Тема # 05. Некоторые распределения случайных величин

о некоторые условные рекомендации по применению формул: проверяем на примерах

Задание_ 17.

Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок других магазинов. Найдите вероятность того, что в день поступит четыре заявки.

Задание_ 18.

Известно, что 40% автомобилей, следующих по шоссе, у развилки поворачивают направо и 60% — налево. Какова вероятность того, что из 400 автомобилей, проехавших по шоссе, ровно 250 повернули налево?

Задание_ 19.

Известно, что на выпечку 1000 булочек с изюмом ужно израсходовать 10000 изюмин. Найдите вероятность того, что: а) наудачу выбранная булочка не будет содержать изюма; б) среди пяти выбранных наудачу булочек две не будут содержать изюма, а в остальных будет хотя бы по одной изюмине.

Задание_ 20.

Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. Вероятность того, что в течение минуты какому-либо абоненту понадобится соединение, равна 0,0007. Вычислите вероятность того, что за минуту на телефонную станцию поступит не менее трех вызовов.