

# Дифференциальные уравнения

Доценников Никита

2026-01-12

## Содержание

|          |                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Определения</b>                                           | <b>2</b>  |
| 1.1      | Дифференциальное уравнение (done)                            | 2         |
| 1.2      | Решение дифференциального уравнения, общее решение (done)    | 3         |
| 1.3      | Задача Коши (done)                                           | 3         |
| 1.4      | Уравнение с разделяющимися переменными (done)                | 3         |
| 1.5      | Однородная функция (done)                                    | 4         |
| 1.6      | Однородное ДУ первого порядка (done)                         | 4         |
| 1.7      | Линейное ДУ первого порядка (done)                           | 5         |
| 1.8      | Уравнение Бернулли (done)                                    | 5         |
| 1.9      | Уравнение в полных дифференциалах (done)                     | 5         |
| 1.10     | Особое решение ДУ (done)                                     | 6         |
| 1.11     | ДУ высшего порядка, задача Коши для него (done)              | 7         |
| 1.12     | Линейное ДУ $n$ -го порядка. Однородное, неоднородное (done) | 7         |
| 1.13     | Линейная независимость функций                               | 8         |
| 1.14     | Определитель Вронского (done)                                | 8         |
| 1.15     | Фундаментальная система решений (done)                       | 8         |
| 1.16     | Характеристический многочлен (done)                          | 9         |
| 1.17     | Система ДУ, решение системы (done)                           | 9         |
| 1.18     | Линейная однородная и неоднородная система ДУ (done)         | 10        |
| 1.19     | Функция оригинал                                             | 10        |
| 1.20     | Преобразование Лапласа                                       | 10        |
| <b>2</b> | <b>Теоремы</b>                                               | <b>12</b> |
| 2.1      | О существовании решения ДУ                                   | 12        |
| 2.2      | Решение однородного дифференциального уравнения              | 12        |
| 2.3      | О решении линейного однородного уравнения                    | 13        |
| 2.4      | Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной)            | 15        |
| 2.5      | Метод Бернулли                                               | 16        |
| 2.6      | О полном дифференциале                                       | 17        |
| 2.7      | Об интегрирующем множителе                                   | 19        |
| 2.8      | О существовании решения ДУ высших порядков                   | 19        |

|      |                                                                                          |    |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.9  | Замены для уравнений, допускающих понижение порядка                                      | 20 |
| 2.10 | Свойства решений линейного однородного ДУ                                                | 21 |
| 2.11 | Необходимое условие линейной зависимости решений                                         | 21 |
| 2.12 | Достаточное условие линейной зависимости решений                                         | 21 |
| 2.13 | О базисе пространства решений                                                            | 21 |
| 2.14 | Общее решение линейного неоднородного ДУ                                                 | 21 |
| 2.15 | Принцип суперпозиции                                                                     | 22 |
| 2.16 | Метод вариации произвольных постоянных                                                   | 22 |
| 2.17 | О ФСР для различных вещественных корней характеристического многочлена                   | 22 |
| 2.18 | О ФСР для кратных вещественных корней характеристического многочлена                     | 22 |
| 2.19 | Линейное однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами                      | 23 |
| 2.20 | Метод неопределенных коэффициентов                                                       | 24 |
| 2.21 | Метод исключения для решения системы ДУ                                                  | 26 |
| 2.22 | Метод Эйлера для решения однородных линейных систем ДУ при простых<br>собственных числах | 26 |
| 2.23 | Метод Эйлера для решения однородных линейных систем ДУ при кратных<br>собственных числах | 29 |
| 2.24 | Общее решение линейной неоднородной системы ДУ                                           | 29 |
| 2.25 | Свойства преобразования Лапласа                                                          | 29 |
| 2.26 | О дифференцировании изображения                                                          | 30 |
| 2.27 | О дифференцировании оригинала                                                            | 31 |
| 2.28 | Об интегрировании оригинала                                                              | 32 |
| 2.29 | Преобразования Лапласа простейших функций                                                | 32 |

## I Определения

### Definition 1.1

#### 1.1 Дифференциальное уравнение (done)

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называют уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.1)$$

ИЛИ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y = y(x)$  и её производные  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ .

**Definition 1.2****1.2 Решение дифференциального уравнения, общее решение (done)**

Функция  $\varphi$  - решение уравнения, если

$$\begin{aligned}\varphi &\in C^1(a, b); \\ F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) &\equiv 0 \text{ на } (a, b)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Другими словами, решением уравнения называют гладкую функцию  $\varphi$ , определённую на интервале  $(a, b)$ , подстановка которой вместо  $y$  обращает уравнение в тождество на  $(a, b)$ .

Общим решением уравнения называют множество всех его решений.

ИЛИ

Функция  $y = \varphi(x)$  является решением дифференциального уравнения, если её подстановка в уравнение обращает его в тождество.

**Definition 1.3****1.3 Задача Коши (done)**

Задачей Коши или начальной задачей для нормального уравнения

$$y' = f(x, y)\tag{1.3}$$

называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальному условию

$$y(x_0) = y_0.\tag{1.4}$$

Пара чисел  $(x_0, y_0)$  при этом называется начальными данными.

**Definition 1.4****1.4 Уравнение с разделяющимися переменными (done)**

Уравнение в дифференциалах вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0\tag{1.5}$$

называют уравнением с разделёнными переменными.

Такое название мотивировано тем, что каждое его слагаемое зависит только от одной переменной.

Уравнение вида

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0 \quad (1.6)$$

называют уравнением с разделяющимися переменными.

ИЛИ

Если уравнение  $\Phi(x, y, y') = 0$  с помощью алгебраических преобразований удастся привести к виду

$$y' = g(x) \cdot h(y) \quad (1.7)$$

или

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, \quad (1.8)$$

то оно называется уравнением с разделяющимися переменными.

### Definition 1.5

## 1.5 Однородная функция (done)

Функция  $F(x, y)$  называется однородной функцией степени  $\alpha$ , если при всех допустимых  $t, x$  и  $y$  верно равенство

$$F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y). \quad (1.9)$$

Пример однородных функций:  $x + y + z$  (первой степени),  $x^2 + 3xy + y^2$  (второй степени),  $\frac{y}{x} \cos \frac{x}{y}$  (нулевой степени),  $\frac{\sqrt{x+y}}{x^2+y^2}$  (степени  $-\frac{3}{2}$ ).

### Definition 1.6

## 1.6 Однородное ДУ первого порядка (done)

Пусть  $P$  и  $Q$  - однородные функции одинаковой степени. Тогда уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1.10)$$

называется однородным уравнением.

ИЛИ

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно привести к виду:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.11)$$

**Definition 1.7****1.7 Линейное ДУ первого порядка (done)**

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x), \quad (1.12)$$

называется линейным уравнением первого порядка.

Название линейное мотивировано тем, что оно составлено из многочленов первой степени по отношению к символам  $y$  и  $y'$ .

ИЛИ

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1.13)$$

где  $p(x), q(x)$  – заданные функции.

**Definition 1.8****1.8 Уравнение Бернулли (done)**

Уравнением Бернулли называют уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad (1.14)$$

где  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

Разделив данное уравнение на  $y^\alpha$ , находим

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x). \quad (1.15)$$

Отсюда видно, что замена  $z = y^{1-\alpha}$  сводит уравнение к линейному.

ИЛИ

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^a, \quad \text{где } a = \text{const}, a \neq 0, a \neq 1 \quad (1.16)$$

**Definition 1.9****1.9 Уравнение в полных дифференциалах (done)**

Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1.17)$$

называют уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция  $u$ , что

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (1.18)$$

то есть  $u'_x = P, u'_y = Q$ .

ИЛИ

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.19)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции  $u(x, y)$ :

$$Mdx + Ndy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \quad (1.20)$$

Условие того, что  $Mdx + Ndy$  представляет собой полный дифференциал:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (1.21)$$

### Definition 1.10

#### 1.10 Особое решение ДУ (done)

Решение  $y = \varphi(x)$  дифференциального уравнения

$$\Phi(x, y, y') = 0 \quad (1.22)$$

называется особым, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, то есть если через каждую его точку  $(x_0, y_0)$  кроме этого решения проходит и другое решение, имеющее в точке  $(x_0, y_0)$  ту же касательную, что и решение  $y = \varphi(x)$ , но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности  $(x_0, y_0)$ . График особого решения будем называть особой интегральной кривой уравнения.

ИЛИ

Решение  $\varphi$  на  $(a, b)$  уравнения  $y' = f(x, y)$  называется особым, если для любой точки  $x_0 \in (a, b)$  найдется решение  $\psi$  того же уравнения, такое что

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) \quad (1.23)$$

при этом  $\varphi \equiv \psi$  в любой сколь угодно малой окрестности точки  $x_0$ .

Более кратко это выражают словами: интегральная кривая уравнения  $y' = f(x, y)$  является особой, если в каждой её точке нарушается единственность решения задачи Коши.

**Definition 1.11****1.11 ДУ высшего порядка, задача Коши для него (done)**

Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называют уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.24)$$

Функция  $\varphi$  – решение уравнения на  $(a, b)$ , если

$$\begin{aligned} \varphi &\in C^n(a, b); \\ F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) &\equiv 0 \text{ на } (a, b). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Каноническим уравнением будем называть уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.26)$$

разрешённое относительно старшей производной.

Задачей Коши для канонического уравнения называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.27)$$

Набор чисел  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  при этом называют начальными данными.

ИЛИ

Обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка имеет вид

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.28)$$

или в решенном относительно старшей производной  $y^{(n)}$ , вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.29)$$

Всякая функция  $y(x)$ , имеющая непрерывные производные вплоть до  $n$ -го порядка и удовлетворяющая уравнению, называется решением этого уравнения, а сама задача нахождения решений дифференциального уравнения называется задачей интегрирования дифференциального уравнения.

**Definition 1.12****1.12 Линейное ДУ  $n$ -го порядка. Однородное, неоднородное (done)**

Линейным дифференциальным уравнением порядка  $n$  называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = q(t), \quad (1.30)$$

где  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q \in C(a, b)$ .

Если  $q \equiv 0$  на  $(a, b)$ , то уравнение, то есть

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0, \quad (1.31)$$

называется однородным, в противном случае – неоднородным.

ИЛИ

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (1.32)$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка.

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1.33)$$

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка.

### Definition 1.13

## 1.13 Линейная независимость функций

### Definition 1.14

## 1.14 Определитель Вронского (done)

Определителем Вронского (или вронскианом) функций  $y_1, y_2, \dots, y_n \in C^{(n-1)}(a, b)$  называют

$$W(t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)}_1(t) & y^{(n-1)}_2(t) & \dots & y^{(n-1)}_n(t) \end{vmatrix} \quad (1.34)$$

### Definition 1.15

## 1.15 Фундаментальная система решений (done)

Фундаментальной системой решений системы уравнений называется совокупность её  $n$  линейно независимых решений.

ИЛИ

Любой набор из  $n$  линейно независимых решений  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  уравнения  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$  называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

### Definition 1.16

#### 1.16 Характеристический многочлен (done)

Многочлен

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (1.35)$$

называется характеристическим многочленом уравнения  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t)$ , а его корни – характеристическими числами того же уравнения.

### Definition 1.17

#### 1.17 Система ДУ, решение системы (done)

Система дифференциальных уравнений – это набор дифференциальных уравнений, решаемых совместно. Решение системы – это набор функций, который удовлетворяет всем уравнениям системы. Такая форма записи системы называется нормальной формой Коши:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1.36)$$

Решением системы называется совокупность  $n$  функций

$$y_i = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.37)$$

таких, что при подстановке их в уравнения системы эти уравнения обращаются в тождества относительно  $x$ . При этом функции  $\psi_i(x)$  предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

ИЛИ

Нормальной системой дифференциальных уравнений порядка  $n$  называется система уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.38)$$

Если ввести в рассмотрение векторы

$$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t, r) = \begin{pmatrix} f_1(t, r) \\ \dots \\ f_n(t, r) \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

то систему можно компактно записать в виде одного  $n$ -мерного уравнения

$$\dot{r} = f(t, r). \quad (1.40)$$

Вектор-функция  $\varphi$  - решение системы на  $(a, b)$ , если

$$\begin{aligned} \varphi &\in C^1((a, b) \rightarrow \mathbb{R}_n); \\ \dot{\varphi}(t) &\equiv f(t, \varphi(t)) \quad \text{на } (a, b). \end{aligned} \quad (1.41)$$

### Definition 1.18

#### 1.18 Линейная однородная и неоднородная система ДУ (done)

Линейной системой дифференциальных уравнений называют систему вида

$$\dot{r} = P(t)r + q(t), \quad (1.42)$$

где  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ .

Если  $q \equiv 0$  на  $(a, b)$ , то система, то есть

$$\dot{r} = P(t)r, \quad (1.43)$$

называется однородной, в противном случае – неоднородной.

### Definition 1.19

#### 1.19 Функция оригинал

Функцией-оригиналом называется комплекснозначная функция  $f(t)$  вещественной переменной  $t$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- $f(t) = 0$ , если  $t < 0$ ;
- $f(t)$  интегрируема на любом конечном интервале оси  $t$ ;
- с возрастанием  $t$  модуль функции  $f(t)$  растет не быстрее некоторой показательной функции, то есть существуют числа  $M > 0$  и  $s_0 \geq 0$  такие, что для всех  $t$  имеем:

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}. \quad (1.44)$$

### Definition 1.20

#### 1.20 Преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа  $L$  функции-оригинала  $f(t)$ , заданной на  $[0, \infty)$ , называется преобразование вида:

$$(Lf)(p) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (1.45)$$

где образ функции  $f$  будем обозначать за  $F(p)$ . Функцию  $F(p)$  называют изображением функции-оригинала  $f(t)$ .

## II Теоремы

### Theorem 2.1

#### 2.1 О существовании решения ДУ

Уравнение  $y' = f(x)$  имеет бесконечно много решений, поскольку в формулу  $y = \int f(x)dx + C$  входит произвольная постоянная  $C$ .

Для того, чтобы получить единственное решение уравнения  $y' = f(x)$ , подставим в начальное условие, то есть потребуем, чтобы функция  $y$  принимала заданное значение  $y_0$  при  $x = x_0$ :

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad (2.1)$$

Действительно, пусть функция  $f(x)$  непрерывна на некотором интервале  $(a, b)$  и точка  $x_0 \in (a, b)$ . Заменяя в формуле  $y = \int f(x)dx + C$  неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом  $x$  и нижним пределом  $x_0$ , получим:

$$y = \int_{x_0}^x f(t)dt + C. \quad (2.2)$$

Удовлетворим начальному условию. При  $x = x_0$  интеграл обращается в нуль и мы получим:

$$C = y_0. \quad (2.3)$$

Таким образом, уравнение  $y' = f(x)$  при начальном условии **Уравнение (2.1)** имеет единственное решение:

$$y = \int_{x_0}^x f(t)dt + y_0. \quad (2.4)$$

Отметим, что это решение единственно на всем интервале  $(a, b)$ .

### Theorem 2.2

#### 2.2 Решение однородного дифференциального уравнения

Сведем уравнение **Уравнение (2.11)** к уравнению с разделяющимися переменными.

Для этого сделаем замену:

$$\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow y = ux. \quad (2.5)$$

Следовательно,

$$y' = u' \cdot x + u, \quad dy = udx + xdu. \quad (2.6)$$

Подставим  $y$  и  $y'$  в уравнение **Уравнение (2.11)**:

$$\begin{aligned} u' \cdot x + u = f(u) &\Leftrightarrow u' \cdot x = f(u) - u \Leftrightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = f(u) - u \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + \ln C_1 \Leftrightarrow x = e^{\int \frac{du}{f(u) - u}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Как определить, что уравнение однородное?

С помощью метода размерностей.

Припишем функции  $y$ , переменной  $x$  и их дифференциалам некоторые размерности. Например, метры:

$$x \sim \text{м}, \quad y \sim \text{м}, \quad dx \sim \text{м}, \quad dy \sim \text{м}. \quad (2.8)$$

Производная  $y' = \frac{dy}{dx} \sim 1$  – безразмерная величина.

Для трансцендентных функций (то есть функций, не являющихся алгебраическими:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ,  $e^x$ ,  $a^x$ ,  $\ln x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$ ,  $\operatorname{arccot} x$ ) в качестве аргумента должна стоять безразмерная величина:  $e^{\frac{y}{x}}$ ,  $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$  и так далее.

Уравнение будет однородным, если в нем складываются величины одной размерности.

Например:

$$\begin{aligned} (x^2 + xy)y' &= x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2, \\ (\text{м}^2 + \text{м} \cdot \text{м}) \cdot 1 &= \text{м} \cdot \sqrt{\text{м}^2 - \text{м}^2} + \text{м} \cdot \text{м} + \text{м}^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следовательно, уравнение однородное.

### Theorem 2.3

## 2.3 О решении линейного однородного уравнения

Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение при  $q(x) = 0$ :

$$\tilde{y}' + p(x)\tilde{y} = 0. \quad (2.10)$$

Переменные здесь разделяются:

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} + p(x)\tilde{y} = 0 \quad \left| \cdot \frac{dx}{\tilde{y}} \right. \leftarrow \text{здесь мы предполагаем, что } \tilde{y} \neq 0. \quad (2.11)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + p(x)dx = 0 \Leftrightarrow \ln|\tilde{y}| = - \int p(x)dx \Leftrightarrow \tilde{y} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}. \quad (2.12)$$

Здесь на постоянную  $C$  мы не накладываем никаких ограничений. Делается это для того, чтобы решение  $\tilde{y} = 0$  вошло в ответ (**Уравнение (2.12)**). Заменяем неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом:

$$\tilde{y} = C \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dx}. \quad (2.13)$$

Если есть начальное условие:

$$\tilde{y} \big|_{x=x_0} = y_0, \quad (2.14)$$

то  $C = y_0$ . Для интегрирования уравнения  $y' + p(x)y = q(x)$  воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Будем искать решение этого уравнения в следующем виде:

$$y = u \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad (2.15)$$

считая  $u$  не постоянной, а некоторой функцией от  $x$ . Дифференцируя, находим

$$y' = u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)). \quad (2.16)$$

Подставив  $y'$  в уравнение  $y' + p(x)y = q(x)$ , получим:

$$\begin{aligned} u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)) + p(x)u \cdot e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u' \cdot e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \Leftrightarrow du = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u &= \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx + C. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Подставляя  $u$  в формулу **Уравнение (2.15)**, получим:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left( \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx + C \right). \quad (2.18)$$

Заменяем неопределенные интегралы на интегралы с переменными верхним пределом:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(u)du} \cdot \left( \int_{x_0}^x q(v) \cdot e^{\int_{x_0}^v p(u)du} \cdot dv + C \right). \quad (2.19)$$

Для ясности мы обозначаем переменные интегрирования различными буквами  $u$  и  $v$ , отличными от буквы  $x$ .

Если задано начальное условие:  $y \big|_{x=x_0} = y_0$ , то  $C = y_0$  и формула **Уравнение (2.19)** принимает вид:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(u)du} \cdot \left( \int_{x_0}^x q(v) \cdot e^{\int_{x_0}^v p(u)du} \cdot dv + y_0 \right). \quad (2.20)$$

$$y(x) = \underbrace{y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(u)du}}_{\tilde{y}} + \underbrace{e^{-\int_{x_0}^x p(u)du} \cdot \int_{x_0}^x q(v) \cdot e^{\int_{x_0}^v p(u)du} \cdot dv}_{Y}, \quad (2.21)$$

то есть  $y = \tilde{y} + Y$ .

**Theorem 2.4****2.4 Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной)**

Рассмотрим уравнение второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \quad (2.22)$$

Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (2.23)$$

где  $y_1, y_2$  – линейно независимые решения однородного уравнения,  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Будем искать частное решение ЛНДУ (Уравнение (2.22)) в следующем виде:

$$Y = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2. \quad (2.24)$$

Здесь  $u_1(x), u_2(x)$  – некоторые функции, которые нам нужно найти.

Отметим сходство формул Уравнение (2.23) и Уравнение (2.24). Мы варьируем произвольные постоянные  $C_1, C_2$ , в формуле Уравнение (2.23) и получаем вместо них некоторые функции  $u_1(x), u_2(x)$ .

Найдем производные  $Y', Y''$  и подставим их в уравнение Уравнение (2.22).

$$Y' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'. \quad (2.25)$$

Так как мы ищем частное решение уравнение, наложим на функции  $u_1, u_2$  дополнительное ограничение:

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0. \quad (2.26)$$

Тогда  $Y'$  примет вид:

$$Y' = u_1 y_1' + u_2 y_2'. \quad (2.27)$$

Соответственно,

$$Y'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''. \quad (2.28)$$

Подставим  $Y, Y', Y''$  в исходное уравнение Уравнение (2.22):

$$\begin{aligned} u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' + a_1 u_1 y_1' + a_1 u_2 y_2' + a_2 u_1 y_1 + a_2 u_2 y_2 &= f(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_1 \underbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1}_{=0(y_1 - \text{решение ЛОДУ})} + u_2 \underbrace{y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2}_{=0(y_2 - \text{решение ЛОДУ})} + u_1' y_1' + u_2' y_2' &= f(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_1' y_1' + u_2' y_2' &= f(x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Учитывая введенные ранее ограничения Уравнение (2.26), получаем систему уравнений для функций  $u_1', u_2'$ :

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x). \end{cases} \quad (2.30)$$

Определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке в силу линейной независимости решений  $y_1, y_2$ .

Следовательно, система **Уравнение (2.30)** разрешима единственным образом и при любой правой части. Пусть её решения имеют вид:

$$\begin{cases} u'_1 = \varphi_1(x) \\ u'_2 = \varphi_2(x). \end{cases} \quad (2.31)$$

Тогда функции  $u_1(x), u_2(x)$  находятся интегрированием:

$$\begin{cases} u_1 = \int \varphi_1(x) dx \\ u_2 = \int \varphi_2(x) dx. \end{cases} \quad (2.32)$$

2) Рассмотрим уравнение  $n$ -го порядка:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x). \quad (2.33)$$

Здесь все построения аналогичны.

Решение ЛОДУ имеет вид:

$$\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n. \quad (2.34)$$

Частное решение ЛНДУ ищем в виде:

$$Y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \dots + u_n(x)y_n(x). \quad (2.35)$$

Следуя описанной процедуре, получаем следующую систему уравнений для функций  $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ :

$$\begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 + \dots + u'_n y_n = 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + \dots + u'_n y'_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + u'_n y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \quad (2.36)$$

Определитель этой системы – это определитель Вронского:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ни в одной точке.} \quad (2.37)$$

Следовательно, система **Уравнение (2.36)** разрешима единственным образом и при любой правой части. Решая её, находим  $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ . Функции  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  находятся интегрированием.

## Theorem 2.5

### 2.5 Метод Бернулли

Напомним, что уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^a, \quad \text{где } a = \text{const}, a \neq 0, a \neq 1. \quad (2.38)$$

Его решение можно получить двумя способами.

**I.** Сведение к линейному уравнению.

Разделим обе части уравнения **Уравнение (2.38)** на  $y^a$ :

$$\frac{y'}{y^a} + p(x)y^{1-a} = q(x). \quad (2.39)$$

Сделаем замену:  $z = y^{1-a}$ .

Соответственно,

$$z' = (1-a) \cdot y^{-a} \cdot y' \Leftrightarrow \frac{y'}{y^a} = \frac{z'}{1-a}. \quad (2.40)$$

Подставим  $z$  и  $z'$  в исходное уравнение:

$$\frac{1}{1-a}z' + p(x)z = q(x). \quad (2.41)$$

Мы получили линейное уравнение.

**II.** (сведение к уравнению с разделяющимися переменными)

Сделаем замену переменной как в линейном уравнении:

$$y = u \cdot e^{-\int p(x)dx}. \quad (2.42)$$

Тогда

$$y' = u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)). \quad (2.43)$$

Подставим  $y$  и  $y'$  в уравнение **Уравнение (2.38)**:

$$\begin{aligned} u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)) + p(x)u \cdot e^{-\int p(x)dx} &= \\ &= q(x)u^a \cdot e^{-a \int p(x)dx} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u' \cdot e^{-\int p(x)dx} &= q(x)u^a \cdot e^{-a \int p(x)dx} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow du &= q(x)u^a \cdot e^{(1-a) \int p(x)dx} \cdot dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{du}{u^a} &= q(x) \cdot e^{(1-a) \int p(x)dx} \cdot dx. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными.

## Theorem 2.6

### 2.6 О полном дифференциале

Если  $Mdx + Ndy$  представляет собой полный дифференциал, то восстановить функцию  $u(x, y)$  с точностью до константы по её известному полному дифференциалу

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (2.45)$$

можно с помощью криволинейного интеграла. А именно зафиксируем некоторую точку  $(x_0, y_0)$ . Тогда криволинейный интеграл

$$u(x, y) = \int_L (M(x, y)dx + N(x, y)dy) \quad (2.46)$$

по произвольной кривой от точки  $(x_0, y_0)$  до текущей точки  $(x, y)$  даст значение функции  $u(x, y)$ , дифференциал которой имеет вид [Уравнение \(2.45\)](#). Изменение начальной точки  $(x_0, y_0)$  приводит к добавлению постоянной (функция  $u(x, y)$  находится с точностью до константы).

Формула [Уравнение \(2.46\)](#) принимает более удобный вид, если кривую  $L$  выбрать в виде ломаной, показанной на [Рис. 2.1](#).

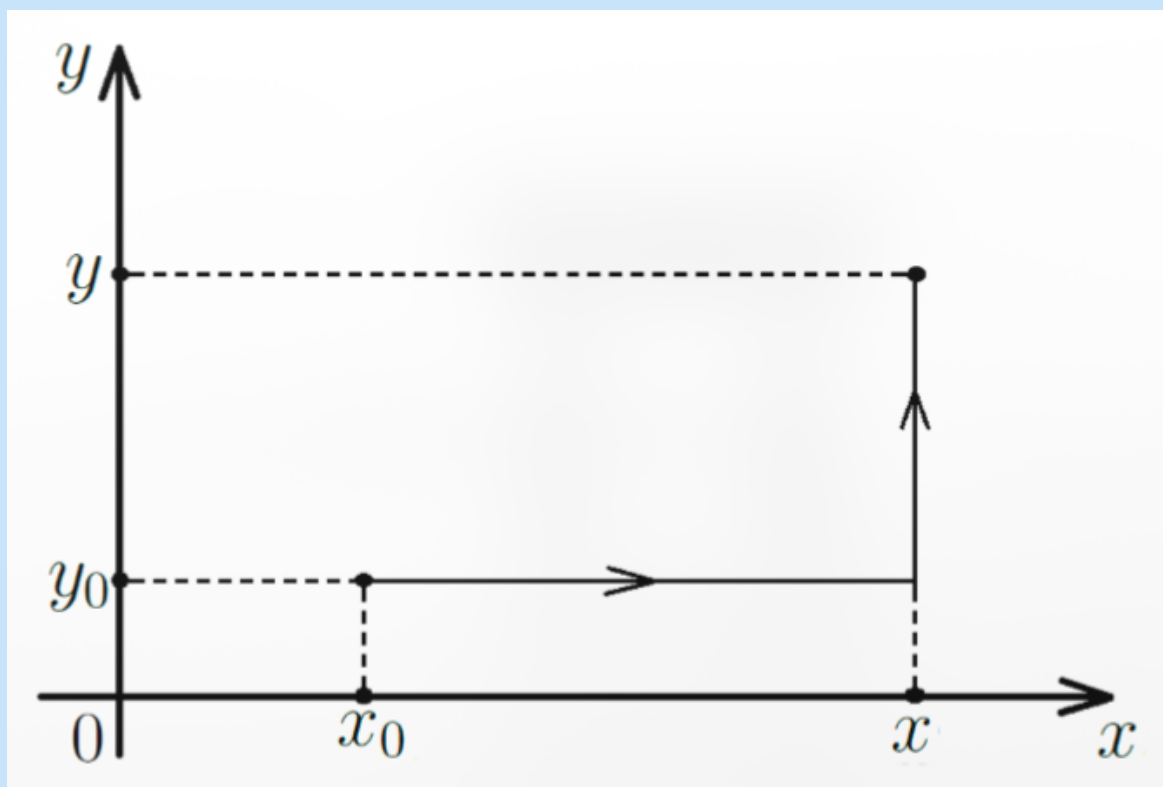


Рис. 2.1. Кривая интегрирования  $L$ .

При таком выборе  $L$  имеем:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy. \quad (2.47)$$

Соответственно, решение уравнения:

$$u(x, y) = C. \quad (2.48)$$

**Theorem 2.7****2.7 Об интегрирующем множителе**

Напомним вид интегрирующего множителя:

$$du = \mu M dx + \mu N dy. \quad (2.49)$$

Напишем условие того, что  $du$  является полным дифференциалом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N \cdot \underbrace{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}}_{\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}} - M \cdot \underbrace{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x}}_{\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}} &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N \cdot \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \cdot \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Таким образом, для нахождения интегрирующего множителя мы получим уравнение в частных производных. Иногда удастся найти его решение. Если  $\mu = \mu(x)$ , то  $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$  и уравнение **Уравнение (2.50)** примет вид:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \quad (2.51)$$

Если правая часть уравнения не зависит от  $y$ , то  $\ln \mu$  находится интегрированием.

**Theorem 2.8****2.8 О существовании решения ДУ высших порядков**

Пусть функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  однозначна, непрерывна и имеет непрерывные частные производные по  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  при значениях аргументов  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  и всех значениях, достаточно близких к ним. Тогда уравнение  $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям  $\begin{cases} y|_{x=x_0} = y_0 \\ y'|_{x=x_0} = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$

**Theorem 2.9**

## 2.9 Замены для уравнений, допускающих понижение порядка

1. Уравнения вида  $y^{(n)} = f(x)$ .

Уравнение  $y^{(n)} = f(x)$  решается с помощью  $n$ -кратного интегрирования.

2. Уравнения вида  $\Phi(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ .

Здесь уравнение не содержит функции  $y$  и её нескольких последовательных производных  $y', y'', \dots, y^{(k-1)}$ .

Сделаем замену:

$$z(x) = y^{(k)}. \quad (2.52)$$

Тогда порядок уравнения понизится на  $k$  единиц:

$$\Phi(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (2.53)$$

Если мы найдем общий интеграл этого последнего уравнения

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}), \quad (2.54)$$

то  $y$  определится из уравнения:

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}). \quad (2.55)$$

3. Уравнения вида  $\Phi(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ .

Здесь уравнение не содержит независимой переменной  $x$ .

Примем  $y$  за независимую переменную и сделаем замену:

$$y' = p(y). \quad (2.56)$$

Этим мы понизим порядок уравнения на 1. В ответе получим функцию  $x = x(y)$ .

Найдем, как преобразуются старшие производные при такой замене.

$$y'' = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (p(y)) = \frac{dp}{dy} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_p = p \cdot \frac{dp}{dy}. \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} y''' = \frac{d}{dx} (y'') &= \frac{d}{dx} \left( p(y) \cdot \frac{dp}{dy} \right) = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} + p(y) \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{dp}{dy} \right) = \\ &= p \cdot \left( \frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \cdot \frac{d^2 p}{dy^2}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

4. Уравнения вида  $\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$ .

Здесь левая часть уравнения представляет собой полную производную по  $x$ .

Проинтегрировав уравнение, мы понизим его порядок на 1.

5. Уравнения вида  $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , где  $\Phi$  – однородная функция относительно  $y, y', \dots, y^{(n)}$ .

$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)})$  называется однородной функцией  $k$ -го порядка относительно переменных  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , если она удовлетворяет следующему свойству:

$$\Phi(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k \cdot \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}). \quad (2.59)$$

При  $y \neq 0$  сделаем замену переменных:

$$z = \frac{y'}{y}. \quad (2.60)$$

Тогда производные преобразуются по следующему правилу:

$$\begin{aligned} y' &= zy, \\ y'' &= z'y + zy' = z'y + z^2y. \end{aligned} \quad (2.61)$$

И так далее. Таким образом, порядок уравнения понизится на 1. Функцию  $y = 0$  следует рассмотреть отдельно.

#### Theorem 2.10

### 2.10 Свойства решений линейного однородного ДУ

#### Theorem 2.11

### 2.11 Необходимое условие линейной зависимости решений

#### Theorem 2.12

### 2.12 Достаточное условие линейной зависимости решений

#### Theorem 2.13

### 2.13 О базисе пространства решений

#### Theorem 2.14

### 2.14 Общее решение линейного неоднородного ДУ

Общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

### Theorem 2.15

#### 2.15 Принцип суперпозиции

Докажите, что если  $\varphi_1$  – решение системы  $\dot{r} = P(t)r + q_1(t)$ ,  $\varphi_2$  – решение системы  $\dot{r} = P(t)r + q_2(t)$ , то  $\varphi_1 + \varphi_2$  – решение системы  $\dot{r} = P(t)r + q_1(t) + q_2(t)$ .

### Theorem 2.16

#### 2.16 Метод вариации произвольных постоянных

### Theorem 2.17

#### 2.17 О ФСР для различных вещественных корней характеристического многочлена

Таким образом, если все корни характеристического уравнения кратности  $n$  вещественны, то фундаментальная система решений состоит из следующих функций:

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}. \quad (2.62)$$

### Theorem 2.18

#### 2.18 О ФСР для кратных вещественных корней характеристического многочлена

Если среди корней есть кратные, то для каждого из них нужно найти столько линейно независимых решений, какова его кратность. Рассмотрим эту ситуацию для уравнения второго порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (2.63)$$

Напишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \quad (2.64)$$

Пусть  $\lambda_1$  – корень второй кратности характеристического уравнения. Тогда дискриминант уравнения равен нулю:  $D = a_1^2 - 4a_2 = 0$ . Следовательно,

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2}. \quad (2.65)$$

Одно из решений уравнения **Уравнение (2.63)** – это  $e^{\lambda_1 x}$ . Найдем второе решение, линейно независимое с ним. Будем искать его в виде:

$$y_2 = u(x) \cdot e^{\lambda_1 x}. \quad (2.66)$$

Тогда:

$$y_2' = e^{\lambda_1 x}(u' + \lambda_1 u), \quad (2.67)$$

$$y_2'' = e^{\lambda_1 x}(u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2 u). \quad (2.68)$$

Подставим  $y_2, y_2', y_2''$  в исходное уравнение **Уравнение (2.63)**:

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 x}(u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2 u) + a_1 e^{\lambda_1 x}(u' + \lambda_1 u) + a_2 u e^{\lambda_1 x} = 0 \\ \Leftrightarrow & e^{\lambda_1 x} \left( u'' + \underbrace{(2\lambda_1 + a_1)}_{=0 \text{ (в силу } \lambda_1 = -\frac{a_1}{2})}} u' + \underbrace{(\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_2)}_{=0 \text{ (в силу } \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0)} u \right) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow u'' = 0 \Leftrightarrow u = C_1 x + C_2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Выберем функцию  $u$  следующим образом:  $u = x$ . Тогда:

$$y_2 = x \cdot e^{\lambda_1 x}. \quad (2.70)$$

Проверим, что решения  $y_1$  и  $y_2$  будут линейно независимы:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x} \neq 0. \quad (2.71)$$

Таким образом фундаментальная система решений для уравнения **Уравнение (2.63)** имеет вид:

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}. \quad (2.72)$$

...

### Theorem 2.19

#### 2.19 Линейное однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

### Theorem 2.20

## 2.20 Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов работает только для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью  $f(x)$  специального вида.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (2.73)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – некоторые постоянные.

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения удастся подобрать. Составим таблицу видов частных решений для различных видов правых частей  $f(x)$ .

| Правая часть дифференциального уравнения                   | Корни характеристического уравнения                                                       | Виды частного решения                                                         |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| $P_m(x)$                                                   | 1) Число 0 не является корнем характеристического уравнения                               | $\tilde{P}_m(x)$                                                              |
|                                                            | 2) Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности $s$                    | $x^s \tilde{P}_m(x)$                                                          |
| $P_m(x)e^{\alpha x}$                                       | 1) Число $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения                        | $\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$                                                  |
|                                                            | 2) Число $\alpha$ является корнем характеристического уравнения кратности $s$             | $x^s \tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$                                              |
| $P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x$                | 1) Числа $\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения                   | $\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x$                   |
|                                                            | 2) Числа $\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности $s$        | $x^s (\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x)$             |
| $e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$ | 1) Числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения            | $(\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x)e^{\alpha x}$     |
|                                                            | 2) Числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности $s$ | $x^s (\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x)e^{\alpha x}$ |

Табл. 2.2. Таблица видов частных решений для различных видов правых частей

$k$  – наибольшая из степеней  $m$  и  $n$ .  $\tilde{P}_m(x)$  – это полином степени  $m$  с неопределенными коэффициентами.

Если правая часть уравнения  $f(x)$  есть сумма двух правых частей специального вида:  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , то частное решение следует искать в виде суммы двух решений:  $Y_1 + Y_2$ , где  $Y_1$  отвечает правой части  $f_1$ , а  $Y_2$  отвечает правой части  $f_2$ .

**Theorem 2.21**

## 2.21 Метод исключения для решения системы ДУ

Метод исключения аналогичен соответствующему алгебраическому методу.

Если одно из уравнений системы позволяет выразить одну из неизвестных функций через другие, то сделаем это и подставим данное выражение в остальные уравнения. Мы получим систему из  $(n - 1)$ -го уравнения с  $(n - 1)$ -ой неизвестной функцией. Однако, порядок уравнений возрастет. Повторяем эту процедуру до тех пор, пока не придем к одному уравнению  $n$ -го порядка. Решаем это уравнение и через его решение выражаем остальные искомые функции.

Проиллюстрируем этот метод на примере системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = ay_1 + by_2 + f(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = cy_1 + dy_2 + g(x). \end{cases} \quad (2.74)$$

Здесь  $a, b, c, d$  – постоянные коэффициенты, а  $f(x)$  и  $g(x)$  – заданные функции.  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  – искомые функции.

Выразим  $y_2$  из первого уравнения системы **Уравнение (2.74)**:

$$y_2 = \frac{1}{b} \cdot \left( \frac{dy_1}{dx} - ay_1 - f(x) \right). \quad (2.75)$$

Подставим во второе уравнение системы **Уравнение (2.74)** вместо  $y_2$  правую часть **Уравнение (2.75)**, получаем уравнение второго порядка относительно  $y_1(x)$ :

$$A \frac{d^2 y_1}{dx^2} + B \frac{dy_1}{dx} + Cy_1 + P(x) = 0, \quad (2.76)$$

где  $A, B, C$  – некоторые постоянные.

Решая уравнение **Уравнение (2.76)**, находим  $y_1 = y_1(x)$ . Подставим найденное выражение для  $y_1$  и  $\frac{dy_1}{dx}$  в **Уравнение (2.75)**, найдем  $y_2$ .

### Theorem 2.22

## 2.22 Метод Эйлера для решения однородных линейных систем ДУ при простых собственных числах

Матричный метод применим только для линейных однородных систем уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{cases} \quad (2.77)$$

где  $a_{ij}$  – некоторые постоянные коэффициенты.

Система уравнений **Уравнение (2.77)** может быть записана в матричном виде:

$$Y' = AY, \quad (2.78)$$

где введены следующие обозначения:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Матрица-столбец

$$Y = \delta y_1 \delta y_2 \delta \dots \delta y_n \quad (2.80)$$

называется частным решением матричного уравнения **Уравнение (2.78)** на интервале  $(a, b)$ , если ее подстановка в уравнение обращает его в тождество для любых  $x \in (a, b)$ .

Система  $n$  частных решений уравнения **Уравнение (2.78)**

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(1)}(x) \end{pmatrix}, \dots, Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(n)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

называется фундаментальной на интервале  $(a, b)$ , если функции  $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$  линейно независимы.

Линейная независимость решений  $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$  уравнения **Уравнение (2.78)** эквивалентна тому, что определитель

$$\begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \dots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_2^{(n)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \forall x \in (a, b) \quad (2.82)$$

Без доказательства.

Заметим, что верхние индексы  $(1), (2), \dots, (n)$  – это номер частного решения (а не порядок производной).

Общее решение матричного дифференциального уравнения **Уравнение (2.78)** есть линейная комбинация фундаментальной системы решений с произвольными коэффициентами  $C_1, C_2, \dots, C_n$ :

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \dots + C_n Y_n(x). \quad (2.83)$$

В обычной записи это дает решение системы **Уравнение (2.77)**:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 y_1^{(1)}(x) + C_2 y_1^{(2)}(x) + \dots + C_n y_1^{(n)}(x) \\ \dots \\ y_n(x) = C_1 y_n^{(1)}(x) + C_2 y_n^{(2)}(x) + \dots + C_n y_n^{(n)}(x) \end{cases} \quad (2.84)$$

*Proof.* Для того, чтобы проверить, что **Уравнение (2.83)** есть общее решение, нужно убедиться в том, что для любых начальных условий  $y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)$  можно найти значения  $C_1, C_2, \dots, C_n$  такие, что решение **Уравнение (2.83)** будет им удовлетворять:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = C_1 y_1^{(1)}(x_0) + \dots + C_n y_1^{(n)}(x_0) \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x_0) = C_1 y_n^{(1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n)}(x_0). \end{cases} \quad (2.85)$$

Система **Уравнение (2.85)** – это неоднородная линейная система алгебраических уравнений относительно  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Её определитель отличен от нуля при любом  $x$  (формула **Уравнение (2.82)**), поэтому система **Уравнение (2.85)** однозначно разрешима при любых  $y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$ , что и доказывает теорему. ■

В соответствии с теоремой, для решения системы **Уравнение (2.77)** нам требуется найти фундаментальную систему решений уравнения **Уравнение (2.78)**. Будем искать решения в следующем виде:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x}, \quad \xi_i \in \mathbb{R} \quad (2.86)$$

Подставим **Уравнение (2.86)** в **Уравнение (2.78)**:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \lambda e^{\lambda x} = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} e^{\lambda x}. \quad (2.87)$$

Сокращая на  $e^{\lambda x}$ , приходим к алгебраическому матричному уравнению:

$$\begin{aligned} AX &= \lambda X, \quad \text{где } X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (A - I\lambda)X = \mathbb{O}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Мы получили задачу о собственных векторах и собственных значениях матрицы  $A$ . Условие существования нетривиального решения уравнения **Уравнение (2.88)** таково:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.89)$$

Корни  $\lambda_i$  этого алгебраического уравнения  $n$ -ой степени – это собственные значения матрицы  $A$ , а нетривиальные решения уравнения **Уравнение (2.88)**, соответствующие  $\lambda = \lambda_i$  – это собственные векторы.

Подстановка собственного вектора и собственного значения в формулу **Уравнение (2.86)** даст нам решение  $Y(x)$  матричного уравнения **Уравнение (2.78)** (или системы **Уравнение (2.77)**). Таким образом, линейно независимые собственные векторы матрицы  $A$  дают нам вектор-функции из фундаментальной системы решений.

Для того, чтобы получить всю фундаментальную систему, требуется найти  $n$  линейно независимых решений.

При рассмотрении теории систем дифференциальных уравнений мы обозначали независимую переменную через  $x$ , а функции через  $y_1, y_2, \dots, y_n$  для того, чтобы продемонстрировать сходство с теорией отдельных дифференциальных уравнений. При решении задач мы будем использовать для независимой переменной более традиционное обозначение  $t$ , а для функций – обозначения  $x, y, z$  во избежание излишней индексации.

### Theorem 2.23

#### 2.23 Метод Эйлера для решения однородных линейных систем ДУ при кратных собственных числах

Если корень  $\lambda = \lambda_0$  имеет кратность  $s$ , то ему должны соответствовать  $s$  линейно независимых решений. Одной функции  $e^{\lambda_0 t}$  будет недостаточно. В этом случае ищем решение в виде:

$$Y_1 e^{\lambda_0 t} + Y_2 t e^{\lambda_0 t} + \dots + Y_s t^{s-1} e^{\lambda_0 t}. \quad (2.90)$$

Для определения координат векторов  $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$  подставляем **Уравнение (2.90)** в исходную систему уравнений и в каждом из уравнений приравниваем коэффициенты при линейно независимых функциях.

### Theorem 2.24

#### 2.24 Общее решение линейной неоднородной системы ДУ

### Theorem 2.25

#### 2.25 Свойства преобразования Лапласа

1.  $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$  – линейность;

Доказательство очевидно в силу линейности интеграла.

2.  $L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0$  – теорема подобия;

*Proof.*

$$L(f(at)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(at) dt. \quad (2.91)$$

Замена:  $s = at \Rightarrow ds = a dt$ .

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}s} f(s) \frac{1}{a} ds = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \quad (2.92)$$

■

3.  $L(e^{at} f(t)) = F(p - a)$  – теорема смещения;

*Proof.*

$$L(e^{at} f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} f(t) dt = F(p - a). \quad (2.93)$$

■

4.  $L(f(t - a)) = e^{-ap} F(p)$ ,  $a > 0$  – теорема запаздывания;

*Proof.*

$$L(f(t - a)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - a) dt = \quad (2.94)$$

Замена:  $s = t - a \Rightarrow ds = dt$ .

$$= \int_{-a}^{\infty} e^{-ps} e^{-ap} f(s) ds = \quad (2.95)$$

$f(s) = 0$  при  $s < 0$

$$= e^{-ap} \int_0^{\infty} e^{-ps} f(s) ds = e^{-ap} F(p). \quad (2.96)$$

■

## Theorem 2.26

### 2.26 О дифференцировании изображения

$$L(tf(t)) = -\frac{d}{dp} F(p) \quad (2.97)$$

$$L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \quad (2.98)$$

*Proof.* Продифференцируем по параметру  $p$  формулу **Уравнение (2.45)** из определения преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \\ \frac{d}{dp} F(p) &= - \int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt = -L(tf(t)). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Соответственно,

$$\frac{d^n}{dp^n} F(p) = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n f(t) dt = (-1)^n L(t^n f(t)). \quad (2.100)$$

■

### Theorem 2.27

#### 2.27 О дифференцировании оригинала

$$L(f'(t)) = pF(p) - f(0). \quad (2.101)$$

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (2.102)$$

*Proof.*

$$L(f'(t)) = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt \ominus \quad (2.103)$$

$$u = e^{-pt}, \quad du = -pe^{-pt} dt, \quad v = f(t), \quad dv = f'(t) dt \quad (2.104)$$

$$\ominus f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p). \quad (2.105)$$

Формула для  $f^{(n)}(t)$  доказывается по индукции.

База проверена ( $n = 1$ ). Переход  $n \rightarrow n + 1$ :

$$L(f^{(n+1)}(t)) = \int_0^{\infty} f^{(n+1)}(t)e^{-pt} dt \ominus \quad (2.106)$$

$$u = e^{-pt}, \quad du = -pe^{-pt} dt, \quad v = f^{(n)}(t), \quad dv = f^{(n+1)}(t) dt \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} &\ominus f^{(n)}(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f^{(n)}(t)e^{-pt} dt = \\ &= -f^{(n)}(0) + p(p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)) = \\ &= p^{n+1} F(p) - p^n f(0) - p^{n-1} f'(0) - \dots - f^{(n)}(0). \end{aligned} \quad (2.108)$$

■

**Theorem 2.28****2.28 Об интегрировании оригинала**

$$L\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(p)}{p}. \quad (2.109)$$

*Proof.* Введем функцию Хевисайда по следующему правилу:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.110)$$

Тогда:

$$L\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = L\left(\int_0^\infty \underbrace{\theta(1-\tau)}_{=1 \text{ при } 0 \leq \tau \leq t} \cdot f(\tau) d\tau\right) = L(\theta * f) = L(\theta)L(f) = \frac{1}{p}F(p). \quad (2.111)$$

■

**Theorem 2.29****2.29 Преобразования Лапласа простейших функций**

Преобразование Лапласа определено только для функций, обращающихся в ноль при  $t < 0$ . Поэтому выписывая таблицу изображений, будем считать, что функции-оригиналы обращаются в ноль на отрицательной полуоси.

$$1. L(1) = \frac{1}{p};$$

*Proof.*

$$L(1) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot 1 dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p}. \quad (2.112)$$

■

$$2. L(e^{at}) = \frac{1}{p-a};$$

*Proof.*

$$L(e^{at}) = L(e^{at} \cdot 1) = \frac{1}{p-a}. \quad (2.113)$$

■

$$3. L(\sin at) = \frac{a}{p^2 + a^2};$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} L(\sin at) &= L\left(\frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})\right) = \\ &= \frac{1}{2i}(L(e^{iat}) - L(e^{-iat})) = \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - ia} - \frac{1}{p + ia}\right) = \frac{1}{2i} \frac{2ia}{p^2 + a^2} = \frac{a}{p^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

■

$$4. L(\cos at) = \frac{p}{p^2 + a^2};$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} L(\cos at) &= L\left(\frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat})\right) = \\ &= \frac{1}{2}(L(e^{iat}) + L(e^{-iat})) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - ia} + \frac{1}{p + ia}\right) = \frac{1}{2} \frac{2p}{p^2 + a^2} = \frac{p}{p^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

■

$$5. L(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

*Proof.*

$$L(t^n) = L(t^n \cdot 1) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \frac{1}{p} = \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (2.116)$$

■