

Определения

1. Дифференциальное уравнение

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называют уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0.$$

ИЛИ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и её производные $y', y'', \dots, y(n)$.

2. Решение дифференциального уравнения, общее решение

Функция φ - решение уравнения, если

$$\begin{aligned} \varphi &\in C^1(a, b); \\ F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) &\equiv 0 \text{ на } (a, b) \end{aligned}$$

Другими словами, решением уравнения называют гладкую функцию φ , определённую на интервале (a, b) , подстановка которой вместо y обращает уравнение в тождество на (a, b) .

Общим решением уравнения называют множество всех его решений.

ИЛИ

Функция $y = \varphi(x)$ является решением дифференциального уравнения, если её подстановка в уравнение обращает его в тождество.

3. Задача Коши

Задачей Коши или начальной задачей для нормального уравнения

$$y' = f(x, y)$$

называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальному условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Пара чисел (x_0, y_0) при этом называется начальными данными.

4. Уравнение с разделяющимися переменными

Уравнение в дифференциалах вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

называют уравнением с разделёнными переменными.

Такое название мотивировано тем, что каждое его слагаемое зависит только от одной переменной.

Уравнение вида

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

называют уравнением с разделяющимися переменными.

ИЛИ

Если уравнение $\Phi(x, y, y') = 0$ с помощью алгебраических преобразований удается привести к виду

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

или

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0,$$

то оно называется уравнением с разделяющимися переменными.

5. Однородная функция

Функция $F(x, y)$ называется однородной функцией степени α , если при всех допустимых t , x и y верно равенство

$$F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y).$$

Пример однородных функций: $x + y + z$ (первой степени), $x^2 + 3xy + y^2$ (второй степени), $\frac{y}{x} \cos \frac{x}{y}$ (нулевой степени), $\frac{\sqrt{x+y}}{x^2+y^2}$ (степени $-\frac{3}{2}$).

6. Однородное ДУ первого порядка

Пусть P и Q - однородные функции одинаковой степени. Тогда уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется однородным уравнением.

ИЛИ

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно привести к виду:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

7. Линейное ДУ первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x),$$

называется линейным уравнением первого порядка.

Название линейное мотивировано тем, что оно составлено из многочленов первой степени по отношению к символам y и y' .

ИЛИ

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $p(x), q(x)$ – заданные функции.

8. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называют уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha,$$

где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Разделив данное уравнение на y^α , находим

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x).$$

Отсюда видно, что замена $z = y^{1-\alpha}$ сводит уравнение к линейному.

ИЛИ

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^a, \quad \text{где } a = \text{const}, a \neq 0, a \neq 1$$

9. Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называют уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция u , что

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

то есть $u'_x = P, u'_y = Q$.

ИЛИ

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$:

$$Mdx + Ndy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Условие того, что $Mdx + Ndy$ представляет собой полный дифференциал:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

10. Особое решение ДУ

Решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения

$$\Phi(x, y, y') = 0$$

называется особым, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, то есть если через каждую его точку (x_0, y_0) кроме этого решения проходит и другое решение, имеющее в точке (x_0, y_0) ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности (x_0, y_0) . График особого решения будем называть особой интегральной кривой уравнения.

ИЛИ

Решение φ на (a, b) уравнения $y' = f(x, y)$ называется особым, если для любой точки $x_0 \in (a, b)$ найдется решение ψ того же уравнения, такое что

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0)$$

при этом $\varphi \equiv \psi$ в любой сколь угодно малой окрестности точки x_0 .

Более кратко это выражают словами: интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$ является особой, если в каждой её точке нарушается единственность решения задачи Коши.

11. ДУ высшего порядка, задача Коши для него

Дифференциальным уравнением n -го порядка называют уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Функция φ – решение уравнения на (a, b) , если

$$\begin{aligned} \varphi &\in C^n(a, b); \\ F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) &\equiv 0 \text{ на } (a, b). \end{aligned}$$

Каноническим уравнением будем называть уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

разрешённое относительно старшей производной.

Задачей Коши для канонического уравнения называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Набор чисел $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ при этом называют начальными данными.

ИЛИ

Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка имеет вид

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

или в решенном относительно старшей производной $y^{(n)}$, вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Всякая функция $y(x)$, имеющая непрерывные производные вплоть до n -го порядка и удовлетворяющая уравнению, называется решением этого уравнения, а сама задача нахождения решений дифференциального уравнения называется задачей интегрирования дифференциального уравнения.

12. Линейное ДУ n -го порядка. Однородное, неоднородное

Линейным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = q(t),$$

где $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q \in C(a, b)$.

Если $q \equiv 0$ на (a, b) , то уравнение, то есть

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = 0,$$

называется однородным, в противном случае – неоднородным.

ИЛИ

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением n -го порядка.

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением n -го порядка.

13. Линейная независимость функций

14. Определитель Вронского

Определителем Вронского (или вронскианом) функций $y_1, y_2, \dots, y_n \in C^{(n-1)}(a, b)$ называют

$$W(t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

15. Фундаментальная система решений

Фундаментальной системой решений системы уравнений называется совокупность её n линейно независимых решений.

ИЛИ

Любой набор из n линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

16. Характеристический многочлен

Многочлен

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

называется характеристическим многочленом уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y + a_0y = f(t)$, а его корни – характеристическими числами того же уравнения.

17. Система ДУ, решение системы

Система дифференциальных уравнений – это набор дифференциальных уравнений, решаемых совместно. Решение системы – это набор функций, который удовлетворяет всем уравнениям системы. Такая форма записи системы называется нормальной формой Коши:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Решением системы называется совокупность n функций

$$y_i = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

таких, что при подстановке их в уравнения системы эти уравнения обращаются в тождества относительно x . При этом функции $\psi_i(x)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

ИЛИ

Нормальной системой дифференциальных уравнений порядка n называется система уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Если ввести в рассмотрение векторы

$$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t, r) = \begin{pmatrix} f_1(t, r) \\ \dots \\ f_n(t, r) \end{pmatrix},$$

то систему можно компактно записать в виде одного n -мерного уравнения

$$\dot{r} = f(t, r).$$

Вектор-функция φ – решение системы на (a, b) , если

$$\begin{aligned}\varphi \in C^1((a, b) \rightarrow \mathbb{R}_n); \\ \dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t)) \text{ на } (a, b).\end{aligned}$$

18. Линейная однородная и неоднородная система ДУ

Линейной системой дифференциальных уравнений называют систему вида

$$\dot{r} = P(t)r + q(t),$$

где $P \in M_n(C(a, b))$, $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

Если $q \equiv 0$ на (a, b) , то система, то есть

$$\dot{r} = P(t)r,$$

называется однородной, в противном случае – неоднородной.

19. Функция оригинал

Функцией-оригиналом называется комплекснозначная функция $f(t)$ вещественной переменной t , удовлетворяющая следующим условиям:

- $f(t) = 0$, если $t < 0$;
- $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t ;
- с возрастанием t модуль функции $f(t)$ растет не быстрее некоторой показательной функции, то есть существуют числа $M > 0$ и $s_0 \geq 0$ такие, что для всех t имеем:

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t}.$$

20. Преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа L функции-оригинала $f(t)$, заданной на $[0, \infty)$, называется преобразование вида:

$$(Lf)(p) = F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt,$$

где образ функции f будем обозначать за $F(p)$. Функцию $F(p)$ называют изображением функции-оригинала $f(t)$.

Теоремы

1. О существовании решения ДУ

Если функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y в области Ω , то через каждую точку, принадлежащую Ω , проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Или: то для любой точки $(x_0, y_0) \in \Omega$ существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения, удовлетворяющее условию: $y|_{x=x_0} = y_0$.

2. Решение однородного дифференциального уравнения
3. О решении линейного однородного уравнения
4. Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной)
5. Метод Бернулли
6. О полном дифференциале
7. Об интегрирующем множителе
8. О существовании решения ДУ высших порядков
9. Замены для уравнений, допускающих понижение порядка
10. Свойства решений линейного однородного ДУ
11. Необходимое условие линейной зависимости решений
12. Достаточное условие линейной зависимости решений
13. О базисе пространства решений
14. Общее решение линейного неоднородного ДУ
15. Принцип суперпозиции
16. Метод вариации произвольных постоянных
17. О ФСР для различных вещественных корней характеристического многочлена
18. О ФСР для кратных вещественных корней характеристического многочлена
19. Линейное однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами
20. Метод неопределенных коэффициентов
21. Метод исключения для решения системы ДУ
22. Метод Эйлера для решения однородных линейных систем ДУ при простых собственных числах
23. Метод Эйлера для решения однородных линейных систем ДУ при кратных собственных числах
24. Общее решение линейной неоднородной системы ДУ
25. Свойства преобразования Лапласа
26. О дифференцировании изображения
27. О дифференцировании оригинала
28. Об интегрировании оригинала
29. Преобразования Лапласа простейших функций