Дифференциальные уравнения

Конспект лекций онлайн-курса
https://openedu.ru/course/ITMOUniversity/DIFEQ/

Составитель: М. В. Бабушкин

24 января 2021 г.

Содержание

Введение

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Предположим, что мы изучаем какое-либо явление окружающего нас мира. Пусть в этом явлении нас интересует некоторая величина, которую мы обозначим через y. Это может быть температура какого-то тела, атмосферное давление, количество особей в биологической популяции или напряжение на участке электрической цепи. Во всех этих примерах величина y зависит от некоторых параметров, например, от момента времени или положения в пространстве. Другими словами, это не просто число, а функция.

Определить эту функцию непосредственно удаётся не всегда. Но часто бывает возможно установить связь между этой функцией, её производными и независимой переменной. Уравнение, выражающее такую связь, называется *дифференциальным уравнением.*

Рассмотрим простую модель, описывающую изменение численности биологической популяции. Обозначим через $y(t)$ количество её особей в момент времени t. Предположим, проведённый эксперимент показал, что прирост числа особей пропорционален их количеству в данный момент, то есть при малом изменении времени Δt

$$y(t+\Delta t)-y(t)=ky(t)\Delta t.$$

Разделив обе части на Δt, мы получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=ky.$$

Поскольку численность особей меняется с течением времени, то данное уравнение выполняется лишь приближённо. Естественно предположить, что оно будет тем точнее, чем меньше шаг Δt. Устремляя Δt к нулю, находим

$$y'=ky.$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение. Функция, описывающая численность популяции, которую мы ищем основываясь на исходных предположениях о приросте числа особей, должна удовлетворять этому уравнению.

Что означают слова «функция удовлетворяет уравнению»? Если взять, например, функцию $\varphi(t)=kt$ и подставить её в полученное уравнение вместо y, то придём к равенству

$$k=k^2t,$$

которое верно при $t=1/k$, и только при таком значении t. Однако, в рассматриваемом примере, конечно, нас интересует закон, справедливый при *любых* значениях t. Другими словами, искомая функция должна при подстановке обращать уравнение в *тождество.*

Легко убедиться, что при подстановке функции $\varphi(t) = e^{kt}$ вместо y получается тождество (верное при $t \in \mathbb{R}$), то есть φ является его решением. Но такая функция не единственная: всевозможные решения даются формулой

$$y = Ce^{kt},$$

где C — произвольная постоянная (рис. 1). Для того, чтобы её вычислить, нужно иметь некоторую дополнительную информацию.

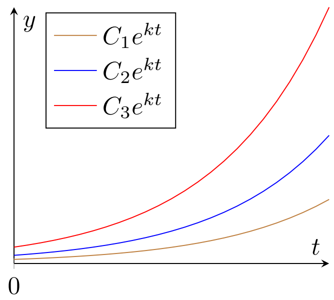


Рис. 1. Графики некоторых решений уравнения $y' = ky$

Рассмотрим более конкретный пример.

Пример 1. Пусть масса дрожжей, помещённых в раствор сахара, в начальный момент времени была 25 грамм. Через полчаса их масса стала 42 грамма. В какой момент времени масса дрожжей будет в два раза больше изначальной?

Решение. Для получения ответа на данный вопрос воспользуемся только что построенной моделью. А именно, будем предполагать, что масса дрожжей $m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$m' = km,$$

а значит, $m = Ce^{kt}$. Поскольку мы знаем, что $m(0) = 25$, то постоянная $C = m(0) = 25$, следовательно,

$$m(t) = 25e^{kt}.$$

Найдём ещё коэффициент k. Из условия $m(30) = 42$ получаем

$$k = \frac{\ln(42/25)}{30} \approx 0{,}0173.$$

Таким образом, масса дрожжей в момент времени t равна

$$m(t) = 25e^{0{,}0173t}.$$

Требуется найти такое значение t_2, что $m(t_2) = 2 \cdot 25 = 50$.

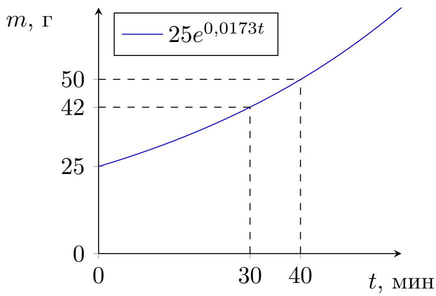


Рис. 2. Зависимость массы дрожжей от времени

Имеем $50 = 25\exp(0{,}0173t_2)$, отсюда

$$t_2 = \frac{\ln 2}{0{,}0173} \approx 40,$$

то есть примерно через 40 минут следует ожидать удвоение массы дрожжей. □

На рис. 2 изображён график зависимости массы дрожжей от времени из примера 1. Конечно, эта зависимость имеет ограниченную область применимости. Например, значения $m(t)$ могут быть сколь угодно большими, если t устремить к бесконечности. Ясно, что в реальной жизни масса дрожжей не может неограниченно возрастать. Дифференциальное уравнение было решено верно, а причина неполного соответствия полученной зависимости и настоящей в том, что само исходное уравнение описывает действительность лишь приближённо. Многие факторы не были учтены при его выводе. Поэтому пользоваться найденной функцией можно лишь до тех пор, пока влияние этих факторов незначительно.

Многие законы физики формулируются в виде дифференциальных уравнений. Например, второй закон Ньютона

$$F = ma,$$

связывающий ускорение тела a, его массу m и приложенные силы F, есть ни что иное, как дифференциальное уравнение второго порядка, поскольку ускорение — это вторая производная от перемещения тела.

Пример 2. Рассмотрим пружину с коэффициентом упругости k, один конец которой закреплён, а к другому подвешен груз массой m (рис. 3). Пружину оттягивают на небольшое расстояние и отпускают. Найти закон движения груза.

Решение. Направим ось Ox вертикально вниз, а за начало отсчёта примем положение равновесия груза. В любой момент времени на груз действует сила тяжести mg, а также сила упругости пружины $-k\Delta x$, по закону Гука пропорциональная величине растяжения $\Delta x = x - x_0$, где x_0 — координата свободного конца пружины в нерастянутом положении.

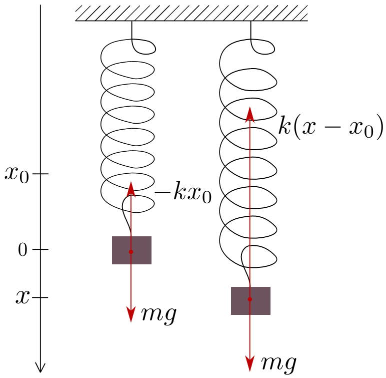


Рис. 3. Колебания пружины

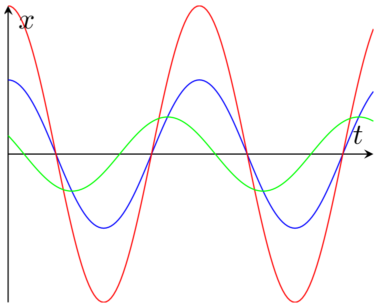


Рис. 4. Графики некоторых решений уравнения $mx'' = -kx$.

Применяя второй закон Ньютона, находим уравнение движения груза

$$mx'' = -k(x - x_0) + mg.$$

Если груз покоится в положении равновесия, то

$$0 = -k(0 - x_0) + mg,$$

поэтому $kx_0 = -mg$. Исключая mg из уравнения движения, находим

$$mx'' = -kx.$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что в качестве решений подходят функции вида

$$x(t) = C_1 \cos\left(t\sqrt{k/m} + C_2\right). \qquad \square$$

В отличие от предыдущего примера, здесь две произвольных постоянных. Причина этого в том, что полученное уравнение движения содержит вторую производную. Постоянные C_1 и C_2 однозначно определятся, если будут известны *начальные условия*, то есть положение груза и скорость в момент, когда его отпустили.

Дифференциальные уравнения возникают во многих областях знания, где приходится изучать эволюцию какого-либо процесса. В данном курсе изучаются методы нахождения решений некоторых типов таких уравнений.

Глава 1

Уравнения первого порядка. Основные понятия

§1.1. Уравнение первого порядка и его решение

В общем случае ***дифференциальным уравнением*** называют уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные. Если искомая функция зависит только от одной переменной, то уравнение называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***, а если искомая функция зависит от нескольких переменных, то уравнение называется ***дифференциальным уравнением в частных производных.***

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и её производную $y'(x)$, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка***.

Решением уравнения (1.1) на интервале (a, b) называется функция φ, обладающая свойствами:

- φ непрерывно дифференцируема на (a, b);
- $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ для любого $x \in (a, b)$.

Замечание 1.1. Решения также рассматривают на отрезках и полуинтервалах. В этом случае под производной в крайних точках промежутка необходимо понимать одностороннюю производную.

Процесс отыскания решения обыкновенного дифференциального уравнения связан с нахождением интегралов, поэтому иногда он называется интегрированием дифференциального уравнения.

График решения называют ***интегральной кривой***. Множество всех решений образует ***общее решение*** уравнения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = x.$$

Ясно, что его решением будет любая первообразная правой части[1]:

$$y = \int x\,dx + C = \frac{x^2}{2} + C.$$

Таким образом, мы получили целое семейство решений (рис. 1.1), заданных на всей вещественной оси.

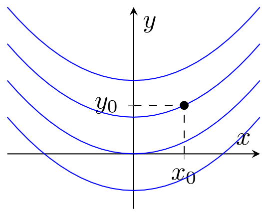


Рис. 1.1. Семейство решений уравнения $y' = x$

В рассмотренном примере

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2, \quad y_3(x) = \frac{x^2}{2} - 5$$

представляют различные ***частные решения*** этого уравнения; семейство

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

является его ***общим решением***.

Во многих случаях решение уравнения (1.1) не выражается в явном виде, а задаётся неявно из некоторого уравнения

$$\Phi(x, y) = 0,$$

которое при этом называют ***частным интегралом*** уравнения.

Уравнение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

которое при каждом допустимом значении параметра C неявно задаёт некоторое частное решение дифференциального уравнения, мы будем называть ***общим интегралом*** этого уравнения.

Замечание 1.2. Общий интеграл не всегда описывает *общее решение* уравнения[2]. Множество всех решений может быть шире, чем множество решений, определяемых общим интегралом.

[1] Под символом $\int f(x)\,dx$ мы всегда будем понимать какую-нибудь одну первообразную, не важно какую, а постоянную интегрирования приписывать отдельно в качестве слагаемого.

[2] Существуют и другие определения понятий «общее решение» и «общий интеграл». В нашем курсе мы будем придерживаться определений, данных в этой главе.

Для уравнения $y' = x$ соотношение

$$x^2 - 2y + C = 0$$

является его ***общим интегралом***, поскольку при каждом конкретном значении C получаем его ***частный интеграл***, определяющий частное решение.

§1.2. Формы записи уравнения первого порядка

Если дифференциальное уравнение первого порядка записано в виде

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

где $f(x, y)$ — функция, непрерывная в некоторой области D на плоскости Oxy, то его называют ***уравнением, разрешённым относительно производной***, или уравнением, записанным в ***нормальной форме***.

Если представить производную как отношение дифференциалов, то уравнение (1.2) запишется в виде

$$f(x, y)dx - dy = 0.$$

Такая форма записи является частным случаем ***уравнения в дифференциалах***

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{1.3}$$

Его ещё называют ***уравнением в симметричной форме***, поскольку переменные x и y в нём равноправны. ***Решениями уравнения в дифференциалах*** являются как функции вида $y(x)$, так и функции вида $x(y)$, непрерывно дифференцируемые на некотором интервале и обращающие уравнение в тождество на этом интервале.

Если графики решений уравнения (1.3) образуют единую гладкую кривую, то такую кривую будем называть ***интегральной кривой*** уравнения (1.3).

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение $x\,dx + y\,dy = 0$. Убедимся подстановкой, что функция $y = \sqrt{C^2 - x^2}$ — при любом $C > 0$ является его решением на интервале $(-C, C)$. Действительно, эта функция имеет непрерывную производную на $(-C, C)$. Её дифференциал

$$dy = \frac{-x}{\sqrt{C^2 - x^2}}\,dx.$$

При подстановке в исходное уравнение получаем

$$x\,dx + \sqrt{C^2 - x^2}\frac{-x}{\sqrt{C^2 - x^2}}\,dx = 0 \quad \text{для всех } x \in (-C, C).$$

Аналогично устанавливается, что решением будет функция $y = -\sqrt{C^2 - x^2}$, а также функции $x = \pm\sqrt{C^2 - y^2}$. При одинаковом значении C графики всех этих функций являются частями одной гладкой кривой — окружности радиуса C с центром в начале координат.

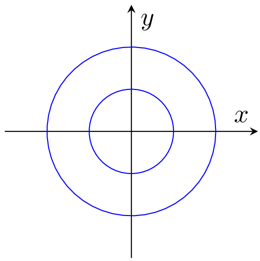


Рис. 1.2. Интегральные кривые уравнения $x\,dx + y\,dy = 0$

§1.3. Поле направлений и приближённое решение

Рассмотрим геометрическую интерпретацию уравнения (1.2). Допустим, что функция $y = \varphi(x)$ является его решением, то есть при любом x из некоторого интервала (a, b) справедливо равенство

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Зафиксируем некоторую точку на интегральной кривой с координатами (x_0, y_0), где $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Таким образом, значение функции f в точке (x_0, y_0) определяет тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в этой точке (рис. 1.3).

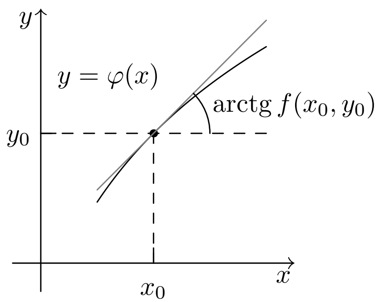


Рис. 1.3. Правая часть уравнения определяет тангенс угла наклона касательной

Если каждой точке (x, y) области, где определена функция f, поставить в соответствие вектор, направленный под углом $\operatorname{arctg} f(x, y)$, то получится так называемое ***поле направлений*** уравнения (1.2). Задачу нахождения его решений тогда можно сформулировать так: найти все гладкие кривые, которые в каждой точке касаются вектора поля направлений, проведённого в этой точке (рис. 1.4).

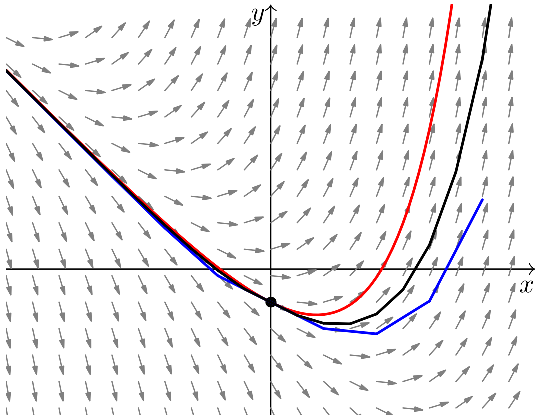


Рис. 1.4. Поле направлений уравнения $y' = y + x$; интегральная кривая, проходящая через точку $x_0 = 0$, $y_0 = -1/2$ (красным цветом); ломаные Эйлера с шагом $h = 0{,}8$ (синим цветом) и $h = 0{,}4$ (чёрным цветом), проходящие через эту же точку

Векторное поле даёт представление о том, как примерно ведут себя интегральные кривые. Оно может быть использовано для предварительного качественного исследования дифференциального уравнения, построения эскизов интегральных кривых и для контроля найденных решений.

Взяв некоторую точку (x_0, y_0) в качестве начальной, будем двигаться вправо от неё по направлению поля до точки с абсциссой $x_1 = x_0 + h$, ординату которой обозначим через y_1. От точки (x_1, y_1) продолжим движение вправо до точки (x_2, y_2), где $x_2 = x_1 + h$, но теперь по направлению поля в (x_1, y_1). Продолжая этот процесс дальше, получаем ***ломаную Эйлера***. Аналогично она строится и влево от точки (x_0, y_0).

Ломаная Эйлера даёт приближение интегральной кривой исходного уравнения, проходящей через точку (x_0, y_0). Приближение тем точнее, чем меньше берётся шаг h (рис. 1.4). Описанный выше процесс построения приближающей ломаной задаётся в виде формул

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 + kh, \\ y_k &= y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})h. \end{aligned}$$

§1.4. Задача Коши

Одной из важнейших задач теории дифференциальных уравнений является ***начальная задача*** или ***задача Коши***. Для уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной, она формулируется так: найти решение уравнения

$$y' = f(x, y),$$

которое при значении аргумента x_0 принимает значение y_0, другими словами, удовлетворяет ***начальному условию*** $y(x_0) = y_0$. Числа x_0 и y_0 при этом называют ***начальными данными***. С геометрической точки зрения это задача отыскания среди всех интегральных кривых той, которая проходит через точку с координатами (x_0, y_0) (рис. 1.1).

Естественно возникают вопросы: всегда ли существует решение задачи Коши? Может ли быть более одного решения?

Будем говорить, что задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.4}$$

имеет единственное решение, если она имеет решение φ и для любого другого её решения $\widetilde{\varphi}$ найдётся окрестность точки x_0, в которой $\widetilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$. В противном случае будем говорить, что в точке (x_0, y_0) нарушается единственность решения задачи Коши.

Простые достаточные условия существования и единственности даёт следующая теорема, которую мы приведём без доказательства.

Теорема 1.1 (Пикар, существование и единственность решения задачи Коши для уравнения первого порядка). *Пусть функция f и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в области G. Тогда для любых начальных данных $(x_0, y_0) \in G$ существует единственное решение задачи*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

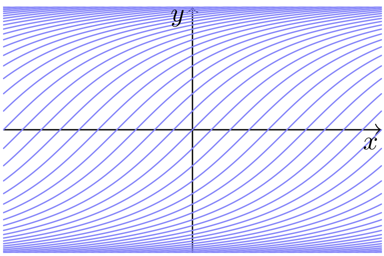


Рис. 1.5. Интегральные кривые уравнения $y' = \cos^2 y$ в области $G = \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что через каждую точку области G проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$. Другими словами, вся область G покрыта интегральными кривыми, которые нигде не пересекаются между собой (рис. 1.5).

Пример 1.2. Решить задачу Коши $y' = 2x$, $y(1) = 2$.

Решение. Интегрируя правую часть, получим общее решение

$$y = x^2 + C.$$

Положим здесь $y = 2$, $x = 1$. Тогда получим

$$2 = 1 + C,$$

откуда $C = 1$. Подставляя найденное значение C в общее решение, находим

$$y = x^2 + 1.$$

Это и есть частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. □

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

может иметь интегральную кривую, в каждой точке которой нарушается единственность. То есть через каждую её точку проходит ещё одна интегральная кривая, не совпадающая с данной в любой сколь угодно малой окрестности этой точки. Соответствующее решение называют ***особым решением***.

В предыдущих примерах мы получали общее решение в виде семейства функций, зависящих от одного параметра. Как правило, особые решения, если они есть, не входят в подобные семейства ни при каких значениях параметра.

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}. \tag{1.5}$$

Так как правая часть данного уравнения и её частная производная

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3\sqrt[3]{y^2}\right) = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

удовлетворяют условиям теоремы 1.1 во всех точках плоскости Oxy, за исключением точек, лежащих на оси Ox, то через любую точку (x_0, y_0) при условии $y_0 \neq 0$ проходит единственная интегральная кривая. Легко проверить подстановкой в исходное уравнение, что эта кривая задаётся формулой

$$y = (x + C)^3. \tag{1.6}$$

Однако, непосредственно видно, что подставив $y = 0$ в исходное уравнение, мы получим тождество. Это означает, что $y = 0$ также является решением данного уравнения. Оно не может быть получено из семейства (1.6) ни при каком значении постоянной C. При этом оно является особым, так как в каждой точке прямая $y = 0$ пересекается с кривыми (1.6) (рис. 1.6).

Общее решение уравнения (1.5) имеет сложную структуру. Оно является не просто объединением семейства (1.6) и функции $y = 0$. Общее решение содержит ещё составные решения, то есть такие функции, графики которых составлены из частей различных интегральных кривых (рис. 1.6).

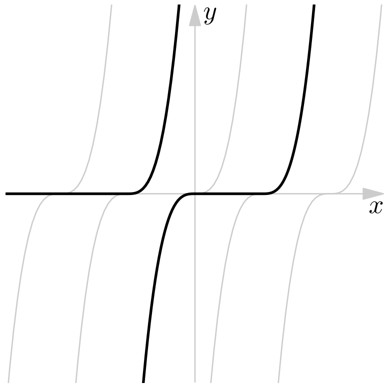


Рис. 1.6. Составные решения

Подчеркнём ещё раз, что мы вкладываем особый смысл в слова *задача Коши имеет единственное решение*. Рассмотрим, например, такую задачу:

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(1) = 1.$$

Полагая $C = 0$ в (1.6), получаем решение $y = x^3$. Но можно указать ещё одно:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ x^3, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Это разные функции, однако, существует окрестность точки $x_0 = 1$ (например, интервал $(0, 2)$), в которой они совпадают. Таким образом, единственность, о которой говорится в теореме 1.1, носит *локальный* характер.

Замечание 1.3. Можно доказать утверждение, усиливающее теорему 1.1 в части единственности. А именно, если графики решений задачи Коши (1.4) целиком лежат в области, где выполнены условия теоремы 1.1, то они будут совпадать не только в некоторой окрестности x_0, а вообще на всём множестве, на котором они оба определены.

§1.5. Простейшие типы уравнений первого порядка

1.5.1. Уравнение вида $y' = f(x)$

Уравнение первого порядка $y' = f(x)$, в котором правая часть зависит только от переменной x (*неполное* уравнение), относится к самым простым типам уравнений. Если функция f непрерывна на интервале (a, b), то его общее решение даётся формулой

$$y = \int f(x)\,dx + C, \quad x \in (a, b), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ранее мы уже встречались с такими уравнениями (см. пример 1.2).

1.5.2. Уравнение вида $y' = f(y)$

Уравнение $y' = f(y)$ также является неполным, поскольку правая часть зависит только от одного аргумента, но теперь его роль играет искомая функция.

Предположим, что f непрерывна и не обращается в ноль на интервале (c, d). В этом случае, если $y(x)$ — решение данного уравнения, то его производная также не обращается в ноль. Таким образом, для функции $y(x)$ имеется обратная функция $x(y)$, а их производные связаны формулой $x'_y = 1/y'_x$.

Разделив обе части уравнения $y' = f(y)$ сначала на $f(y)$, а затем на y', получаем ему равносильное

$$x' = \frac{1}{f(y)}.$$

Это уравнение предыдущего типа, в котором x и y поменялись ролями. Его общий интеграл

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

неявно задаёт решения исходного уравнения.

Пример 1.3. Найти общий интеграл уравнения $y' = 1 + y^2$.

Решение. Правая часть уравнения не обращается в ноль ни при каких значениях y. Разделив обе части на $y'(1 + y^2) \neq 0$, имеем

$$\frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{y'},$$

то есть

$$x' = \frac{1}{1+y^2}.$$

Отсюда, интегрируя по y, находим

$$x = \operatorname{arctg} y + C, \quad C \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Рассмотрим теперь случай, когда правая часть уравнения $y' = f(y)$ может обратиться в ноль. Если $f(y_0) = 0$, то $y \equiv y_0$ — решение, в чём убеждаемся подстановкой. При этом оно может оказаться особым. Для дальнейшего поиска интегральных кривых плоскость Oxy необходимо разбить на две части и рассматривать каждую из них в отдельности (рис. 1.7). Если функция f имеет не один, а больше корней, то и соответствующих областей будет больше.

Изучим подробно уравнение, которое уже встречалось нам во введении.

Пример 1.4. Найти общее решение уравнения $y' = y$.

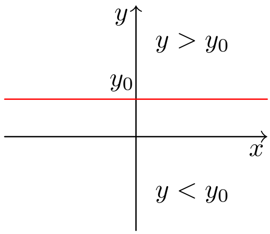


Рис. 1.7. Области поиска интегральных кривых в случае $f(y_0) = 0$

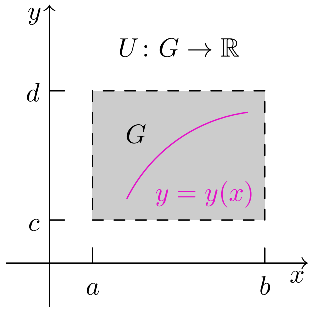


Рис. 1.8. Область поиска интегральных кривых уравнения (1.8)

Решение. Правая часть $f(y) = y$ имеет корень $y_0 = 0$, поэтому тождественный ноль является решением.

Далее будем искать интегральные кривые, лежащие в полуплоскости, где $y > 0$. Разделив обе части на y, а затем на y', находим

$$x' = \frac{1}{y}.$$

Интегрируя правую часть, получаем

$$x = \ln|y| + C = \ln y + C. \tag{1.7}$$

Функция y отсюда выражается явно:

$$y = e^{x-C} = e^{-C}e^x = C_1 e^x,$$

где $C_1 > 0$ — произвольная положительная постоянная.

Легко понять, что в полуплоскости, где $y < 0$, решения определяются той же формулой, но при $C_1 < 0$. Рассуждения в этой области те же, лишь в формуле (1.7) модуль раскроется со знаком минус.

Ни одна из найденных интегральных кривых не пересекается с осью Ox, а значит, решение $y \equiv 0$ не является особым. Кроме того, оно получается из общего интеграла при $C_1 = 0$.

Таким образом, приходим к общему решению:

$$y = Ce^x, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad C \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

1.5.3. Уравнение с разделёнными переменными

Уравнение в дифференциалах вида

$$X(x)\,dx = Y(y)\,dy \tag{1.8}$$

называют ***уравнением с разделёнными переменными***, поскольку каждое его слагаемое зависит только от одной переменной.

Найдём общий интеграл этого уравнения. Пусть X непрерывна на интервале (a, b), а Y — на интервале (c, d). Выберем произвольно $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$ и рассмотрим функцию двух переменных

$$U(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} X(s)\, ds - \int\limits_{y_0}^{y} Y(s)\, ds.$$

Предположим, что $y(x)$ — решение (1.8). Его график лежит в области определения функции U (рис. 1.8). Тогда, принимая во внимание формулу для производной сложной функции, находим

$$\frac{d}{dx} U(x, y(x)) = U'_x x'_x + U'_y y'_x = X(x) - Y(y) y'.$$

Записывая производную через отношение дифференциалов, получаем

$$X(x) - Y(y) \frac{dy}{dx} = \frac{X(x)\, dx - Y(y)\, dy}{dx} = 0.$$

Последнее равенство выполняется всюду, где определено решение $y(x)$. Следовательно, для таких x будет $(U(x, y(x)))'_x = 0$, то есть $U(x, y(x)) \equiv \mathrm{const}$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для решения вида $x(y)$. Поэтому уравнение

$$\int\limits_{x_0}^{x} X(s)\, ds = \int\limits_{y_0}^{y} Y(s)\, ds + C$$

неявно определяет решения уравнения (1.8). Так как числа x_0 и y_0 выбирались произвольно, то полученный результат можно записать и в виде

$$\int X(x)\, dx = \int Y(y)\, dy + C.$$

Таким образом, чтобы получить общий интеграл уравнения (1.8), достаточно формально приписать с обеих сторон знаки интегралов. Возникающая при этом постоянная, вообще говоря, не может быть произвольной, что демонстрирует следующий пример.

Пример 1.5. Найти общий интеграл уравнения $x\, dx + y\, dy = 0$.

Решение. Формально записывая знаки интегралов, находим

$$\int x\, dx = -\int y\, dy + C.$$

Отсюда получаем общий интеграл

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

где $r^2 = 2C > 0$. □

Глава 2

Некоторые типы уравнений первого порядка

§2.1. Уравнение с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$f_1(x)\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\varphi_2(y)\,dy = 0 \tag{2.1}$$

называется ***уравнением с разделяющимися переменными***. Разделив обе его части на произведение

$$\varphi_1(y)f_2(x),$$

получим уравнение *с разделёнными переменными*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = 0, \tag{2.2}$$

которое обсуждалось в предыдущей главе.

Будем предполагать функции f_1 и f_2 непрерывными на интервале (a, b), а функции φ_1 и φ_2 — на интервале (c, d). Пусть, кроме того, φ_1 и f_2 нигде не обращаются в ноль. Тогда уравнения (2.1) и (2.2) равносильны. Напомним, что общий интеграл уравнения (2.2) имеет вид

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = C.$$

Более сложной является ситуация, когда хотя бы одна из функций, φ_1 или f_2, в некоторой точке равна нулю.

Пусть, например, $\varphi_1(y_0) = 0$, тогда $y(x) \equiv y_0$, $x \in (a, b)$ — решение исходного уравнения. Для поиска других интегральных кривых всю область $(a, b) \times (c, d)$ требуется разбить на две подобласти с общей границей $y = y_0$.

Аналогично, если $f_2(x_0) = 0$, то $x(y) \equiv x_0$, $y \in (c, d)$ — решение исходного уравнения. Далее область задания $(a, b) \times (c, d)$ разбивается на подобласти с общей границей $x = x_0$.

Разбив область задания уравнения на необходимое количество частей (рис. 2.1), нужно рассмотреть исходное уравнение на каждой части отдельно. На каждой

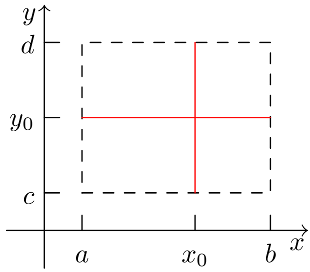


Рис. 2.1. Области поиска интегральных кривых, если $\varphi_1(y_0) = 0$, $f_2(x_0) = 0$

такой подобласти уравнение можно разделить на $\varphi_1(y)f_2(x)$, не опасаясь получить ноль в знаменателе.

Общее решение на исходной области может иметь сложную структуру. Интегральные кривые из различных подобластей могут оказаться частями единой интегральной кривой, а решения вида $y \equiv y_0$ или $x \equiv x_0$ могут быть особыми.

Пример 2.1. Найти общий интеграл уравнения

$$yy' = \frac{x(1+y^2)}{1+x^2}.$$

Решение. Записывая производную как отношение дифференциалов и умножая обе части уравнения на dx, находим

$$y\,dy = \frac{x}{1+x^2}(1+y^2)\,dx.$$

Разделим обе части уравнения на $(1+y^2) \neq 0$:

$$\frac{y}{1+y^2}\,dy = \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Отсюда

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx + C,$$

то есть

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Представим постоянную C в виде $C = (1/2)\ln C_1$, где $C_1 > 0$. Тогда

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln\left(C_1(1+x^2)\right).$$

Умножая обе части на 2 и избавляясь от логарифмов, получаем

$$1+y^2 = C_1(1+x^2).$$

Ответ: $1+y^2 = C(1+x^2)$, $C > 0$. □

Пример 2.2. Найти общее решение уравнения

$$\sin x\,dy - y\ln y\,dx = 0$$

в области D: $-\pi < x < \pi$, $y > 0$.

Решение. Перенесём слагаемое с dx в правую часть:

$$\sin x\,dy = y\ln y\,dx. \tag{2.3}$$

Переменные разделятся, если обе части уравнения поделить на $\sin x \cdot y\ln y$. Это выражение может обращаться в ноль в области D: $\sin x = 0$ при $x = 0$, $\ln y = 0$ при $y = 1$. Отсюда следует, что $x \equiv 0$ и $y \equiv 1$ — интегральные кривые уравнения. Далее область поиска других интегральных кривых разбивается на четыре части (рис. 2.2).

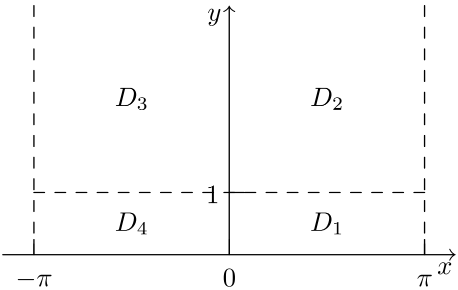


Рис. 2.2. Области поиска интегральных кривых уравнения $\sin x\,dy = y\ln y\,dx$

Рассмотрим область D_1. Разделив уравнение (2.3) на $\sin x \cdot y\ln y$, находим

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}. \tag{2.4}$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} + C.$$

Левая часть:

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{d\ln y}{\ln y} = \ln|\ln y| + C_1.$$

Интеграл в правой части:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\,(\operatorname{tg}(x/2))}{\operatorname{tg}(x/2)} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C_2.$$

Таким образом,

$$\ln|\ln y| + C_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C_2.$$

Упростим эту формулу. Для этого запишем $C_2 - C_1 = \ln C_3$, где $C_3 > 0$. Тогда

$$\ln|\ln y| = \ln\left(C_3\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right).$$

Избавляясь от логарифмов, и переобозначая C_3 через C, получаем общее решение в области D_1:

$$|\ln y| = C\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|, \quad C > 0. \tag{2.5}$$

Поскольку при $(x, y) \in D_1$ будет $\ln y < 0$ и $\operatorname{tg}(x/2) > 0$, то можно ещё упростить формулу, избавившись от модулей:

$$-\ln y = C\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

то есть

$$y = e^{-C\operatorname{tg}(x/2)}, \quad x \in (0, \pi), \quad C > 0.$$

Заметим, что рассуждения, приведшие к формуле (2.5) для области D_1, остаются такими же и для областей D_2, D_3, D_4. Выбор области влияет лишь на раскрытие модулей. В результате имеем

$$\begin{aligned}
D_2: &\quad y = e^{C\operatorname{tg}(x/2)}, \quad x \in (0, \pi),\\
D_3: &\quad y = e^{-C\operatorname{tg}(x/2)}, \quad x \in (-\pi, 0),\\
D_4: &\quad y = e^{C\operatorname{tg}(x/2)}, \quad x \in (-\pi, 0).
\end{aligned}$$

при этом во всех формулах C — произвольная *положительная* постоянная. Приведём графики некоторых решений (рис. 2.3).

Сделаем несколько замечаний относительно полученного результата. Во-первых, на интервале $(0, \pi)$ семейства решений $y = e^{C\operatorname{tg}(x/2)}$, $y = e^{-C\operatorname{tg}(x/2)}$, а также решение $y \equiv 1$ объединяются одной формулой

$$y = e^{C\operatorname{tg}(x/2)}, \tag{2.6}$$

если считать, что C может принимать не только положительные, а вообще любые вещественные значения. То же относится и к решениям на промежутке $(-\pi, 0)$. Формула при этом получается такой же, что и на $(0, \pi)$.

Во-вторых, если различные интегральные кривые уравнения (2.4) входят в точку $(0, 1)$ под одним углом, то их можно объединить в одну интегральную кривую уравнения (2.3). В данном случае эти кривые задаются единой формулой (2.6) на всём интервале $(-\pi, \pi)$. Одна из таких кривых изображена на рис. 2.3 красным цветом.

В-третьих, интегральная кривая $x \equiv 0$ не получается из формулы (2.6) ни при каком значении постоянной C, поэтому в ответе выпишем её отдельно.

Ответ: $y(x) = e^{C\operatorname{tg}(x/2)}$ при $x \in (-\pi, \pi)$, $C \in \mathbb{R}$; $x(y) = 0$ при $y \in (0, +\infty)$. □

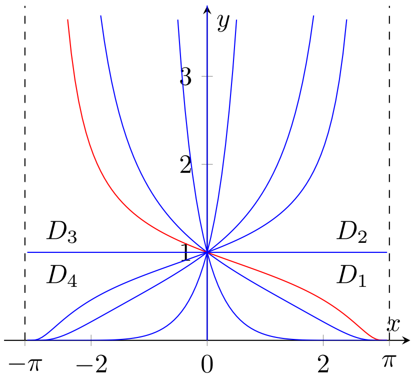


Рис. 2.3. Интегральные кривые уравнения $\sin x\, dy - y \ln y\, dx = 0$

Два дифференциальных уравнения называются ***эквивалентными***, если они имеют одинаковые множества решений. Таким образом, исходное уравнение (2.3) и уравнение (2.4), полученное в ходе решения, эквивалентны в каждой из областей D_1, D_2, D_3, D_4, но не эквивалентны во всей области D.

Рассмотрим, например, функцию $y(x) = e^{\operatorname{tg}(x/2)}$, полученную из общего решения при $C = 1$. При её подстановке в (2.3) после элементарных преобразований имеем

$$\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Это равенство верно при всех $x \in (-\pi, \pi)$, а значит, $y(x) = e^{\operatorname{tg}(x/2)}$ — решение (2.3) на $(-\pi, \pi)$ по определению.

Однако, подставив эту функцию в (2.4), приходим к равенству

$$\frac{1}{\cos(x/2) \cdot \operatorname{tg}(x/2)} = \frac{1}{\sin(x/2)},$$

которое не является тождеством на интервале $(-\pi, \pi)$, поскольку при $x = 0$ получаем ноль в знаменателях левой и правой части. Следовательно, функция $y(x) = e^{\operatorname{tg}(x/2)}$, заданная на $(-\pi, \pi)$, не входит в множество решений уравнения (2.4) (входят лишь её сужения на интервалы $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$).

§2.2. Однородные уравнения

Уравнение вида

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{2.7}$$

называется ***однородным уравнением*** первого порядка, если M и N — однородные функции одинаковой степени однородности.

Напомним, что функция $f(x, y)$ называется ***однородной*** функцией степени однородности $\alpha \in \mathbb{R}$, если для любого допустимого значения t верно

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

Например, функция $f(x, y) = x^2 + 2xy$ является однородной второй степени однородности. Действительно,

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + 2(tx)(ty) = t^2(x^2 + 2xy) = t^2 f(x, y).$$

Заметим, что к уравнению (2.7) приводится уравнение

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

и поэтому оно тоже называется однородным.

Покажем, что однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи подстановки

$$u = \frac{y}{x}, \tag{2.8}$$

где u — новая неизвестная функция. При этом необходимо исключить из рассмотрения точки, в которых $x = 0$.

Имеем

$$dy = u\,dx + x\,du.$$

Тогда исходное уравнение принимает вид

$$M(x, xu)\,dx + N(x, xu)\,(u\,dx + x\,du) = 0.$$

В силу однородности $M(x, y)$ и $N(x, y)$, получаем

$$x^\alpha\left(M(1, u) + uN(1, u)\right)\,dx + x^{\alpha+1}N(1, u)\,du = 0.$$

При делении на $x^\alpha \neq 0$ приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$\left(M(1, u) + uN(1, u)\right)\,dx + xN(1, u)\,du = 0.$$

Пример 2.3. Решить уравнение

$$(x^2 - xy)\,dy + y^2\,dx = 0.$$

Решение. Данное уравнение — однородное, поскольку коэффициенты при dx и dy суть однородные функции второй степени. Будем рассматривать уравнение в полуплоскости, где $x > 0$. Воспользуемся подстановкой

$$u = \frac{y}{x},$$

тогда $dy = x\,du + u\,dx$. Уравнение преобразуется к виду

$$x^3(1-u)\,du + x^2 u\,dx = 0.$$

Разделив обе части на $x^3 \neq 0$ и перенеся слагаемое с dx в правую часть, находим

$$(1-u)\,du = -\frac{u}{x}\,dx. \tag{2.9}$$

Прежде, чем делить на u, отметим, что $u \equiv 0$ является решением данного уравнения. При $u > 0$ имеем

$$\frac{1-u}{u}\,du = -\frac{dx}{x}.$$

Вычисляя интегралы от правой и левой части, получаем

$$\ln|u| - u = -\ln|x| + C_1. \tag{2.10}$$

Потенцируя и раскрывая модули, находим

$$ue^{-u} = \frac{C}{x},$$

где $C = e^{C_1} > 0$.

В области $u < 0$ модуль в левой части уравнения (2.10) раскроется с противоположным знаком. Таким образом, семейство интегральных кривых уравнения (2.9) задаётся формулой

$$ue^{-u} = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Возвращаясь к прежней переменной $y = xu$, находим

$$ye^{-y/x} = C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Рассуждения в области $x < 0$ такие же, отличие лишь в знаке при раскрытии модуля в правой части (2.10). При этом общий интеграл (2.11) не изменится.

До этого момента прямая $x = 0$ исключалась из рассмотрения. Она может быть интегральной кривой исходного уравнения, и в данном случае это действительно так, в чём убеждаемся непосредственной подстановкой.

Может оказаться, что полученные интегральные кривые гладко сшиваются в точках прямой $x = 0$, образуя составные решения. Более детальный анализ формулы (2.11) показывает, что эта ситуация также реализуется для данного уравнения (составные кривые проходят через начало координат, рис. 2.4). □

Однородное уравнение не изменится, если в нём вместо x и y подставить, соответственно, λx и λy. Это преобразование соответствует растяжению (при $\lambda > 1$) или сжатию (при $0 < \lambda < 1$) всей плоскости относительно начала координат (гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом λ). Следовательно, такое преобразование плоскости любую интегральную кривую однородного уравнения переводит в другую интегральную кривую того же уравнения.

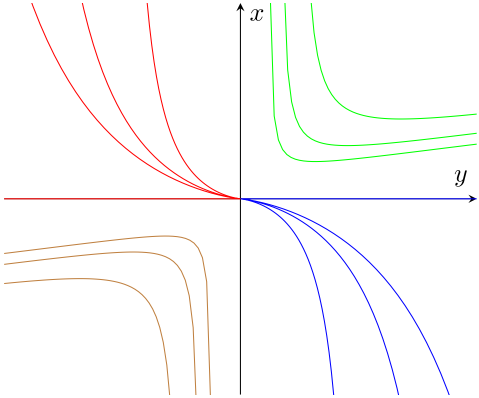


Рис. 2.4. Интегральные кривые уравнения $(x^2 - xy)\,dy + y^2\,dx = 0$.

§2.3. Линейные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{2.12}$$

называется ***линейным уравнением*** первого порядка. Название *линейное* мотивировано тем, что это уравнение составлено из многочленов первой степени по отношению к символам y и y'.

Коэффициенты p и q предполагаются непрерывными на интервале (a, b). В этом случае выполнены условия теоремы существования и единственности решения в полосе $(a, b) \times \mathbb{R}$.

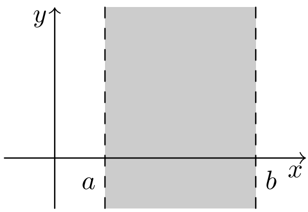


Рис. 2.5. Через каждую точку выделенной полосы проходит ровно одна интегральная кривая уравнения (2.12)

Если функция $q(x) \equiv 0$, то уравнение называется ***однородным***, а иначе — ***неоднородным*** линейным уравнением.

2.3.1. Линейное однородное уравнение

Оформим в виде леммы утверждение, которым будем часто пользоваться в дальнейшем.

Лемма 2.1 (общее решение линейного однородного уравнения). *Пусть функция p непрерывна на (a, b). Тогда общее решение уравнения*

$$y' = p(x)y \tag{2.13}$$

имеет вид

$$y = Ce^{\int p(x)\,dx}, \quad x \in (a, b), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Представляя производную как отношение дифференциалов, запишем уравнение в виде

$$dy = p(x)y\,dx.$$

Заметим, что функция $y \equiv 0$ на (a, b), является его решением.

В области $y > 0$ исходное уравнение равносильно

$$\frac{dy}{y} = p(x)\,dx.$$

Интегрируя обе части, приходим к равенству

$$\ln|y| = \int p(x)\,dx + C_1.$$

Полагая $C_1 = \ln C$ и потенцируя, находим

$$|y| = Ce^{\int p(x)\,dx}, \quad C > 0.$$

В предположении $y > 0$ модуль можно убрать. Аналогичный результат получается и в области $y < 0$. Изменится лишь знак при раскрытии модуля на последнем шаге. Таким образом, решения имеют вид

$$y = Ce^{\int p(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Все они заданы на (a, b). Особых решений нет в силу теоремы 3.1. □

2.3.2. Метод Лагранжа

Для отыскания общего решения линейного неоднородного уравнения

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{2.14}$$

рассмотрим сначала вспомогательное однородное уравнение

$$y' = p(x)y.$$

По лемме 2.1 его решения описываются формулой

$$y = Ce^{\int p(x)\,dx}. \tag{2.15}$$

Метод Лагранжа состоит в отыскании решения уравнения (2.14) в виде

$$y = u(x)e^{\int p(x)dx}, \tag{2.16}$$

где $u(x)$ — неизвестная функция. Данная подстановка по форме совпадает с общим решением (2.15) соответствующего однородного уравнения. Отличие лишь в том, что на место произвольной постоянной C поставлена функция $u(x)$. Поэтому метод Лагранжа также называют *методом вариации постоянной.*

Мы будем вместо $u(x)$ писать $C(x)$, то есть будем искать решение уравнения (2.14) в виде

$$y = C(x)e^{\int p(x)dx}. \tag{2.17}$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, находим

$$C'(x)e^{\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{\int p(x)\,dx} = C(x)e^{\int p(x)dx}p(x) + q(x).$$

Отсюда

$$C'(x) = q(x)e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Следовательно,

$$C(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)\,dx}\,dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Подставляя найденное для $C(x)$ выражение в (2.17), получаем

$$y = \left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + C_1\right)e^{\int p(x)dx}, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Опираясь на теорему 3.1 нетрудно показать, что эта формула в действительности описывает все возможные решения линейного уравнения (2.14). Однако, на практике при нахождении решений используют не формулу (2.18), а повторяют только что проведённую схему рассуждений.

Пример 2.4. При $x > -1$ найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{2y}{x+1} = x + 1.$$

Решение. Перенесём слагаемое $\frac{2y}{x+1}$ в правую часть:

$$y' = \frac{2}{x+1}y + x + 1.$$

Сопоставляя данное уравнение с общим видом уравнения (2.14), находим

$$p(x) = \frac{2}{x+1}, \quad q(x) = x + 1.$$

Таким образом, данное уравнение — линейное неоднородное. Будем решать его методом Лагранжа.

По лемме 2.1 соответствующее однородное уравнение

$$y' = \frac{2}{x+1}y$$

имеет решение

$$y = Ce^{\int p(x)\,dx} = C\exp\left(\int \frac{2}{x+1}\,dx\right) = C\exp\left(2\ln|x+1|\right) = C(x+1)^2.$$

Теперь «варьируем постоянную», то есть будем искать общее решение исходного уравнения в виде

$$y = C(x)(x+1)^2. \tag{2.19}$$

Найдём y':

$$y' = C'(x+1)^2 + C\cdot 2(x+1).$$

При подстановке y и y' в исходное уравнение имеем

$$C'(x+1)^2 + C\cdot 2(x+1) - \frac{2C(x+1)^2}{x+1} = x+1.$$

Отсюда

$$C' = \frac{1}{x+1},$$

следовательно,

$$C = \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C_1.$$

Полагая $C_1 = \ln C_2$ и избавляясь от модуля (по условию $x > -1$), получаем

$$C = \ln(C_2(x+1)), \quad C_2 > 0.$$

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в формулу (2.19), записываем общее решение исходного уравнения

$$y(x) = (x+1)^2\ln(C_2(x+1)), \quad x > -1, \quad C_2 > 0. \qquad \square$$

2.3.3. Метод Бернулли

Рассмотрим ещё один метод нахождения решений линейного уравнения первого порядка — метод Бернулли. Будем искать решение уравнения

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{2.20}$$

в виде произведения двух функций

$$y = uv.$$

Тогда $y' = u'v + uv'$. При подстановке y и y' в (2.20), получаем

$$u(v' - pv) + u'v = q. \tag{2.21}$$

Выберем функцию v так, чтобы обратился в ноль множитель при u:

$$v' - pv = 0.$$

По лемме 2.1 решением этого уравнения будет любая функция вида

$$v = Ce^{\int p(x)dx}.$$

Положим $C = 1$. Подставляя v в (2.21), находим уравнение для u:

$$u'e^{\int p(x)\,dx} = q.$$

Отсюда

$$u' = qe^{-\int p(x)\,dx},$$

то есть

$$u(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тогда общее решение исходного уравнения

$$y = uv = \left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + C\right)e^{\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Мы пришли к формуле (2.18), полученной ранее методом Лагранжа.

Пример 2.5. При $x > -1$ найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{2y}{x+1} = x + 1.$$

Решение. Ищем общее решение в виде $y = uv$. Подставляя в исходное уравнение, находим

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x+1} = x + 1,$$

отсюда

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x+1}\right) = x + 1.$$

Подберём функцию v, обнуляющую множитель при u:

$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0.$$

По лемме 2.1

$$v = C\exp\left(\int \frac{2}{x+1}\,dx\right) = C(x+1)^2.$$

Положим $C = 1$, тогда $v = (x+1)^2$.

Для функции u имеем уравнение

$$u'(x+1)^2 = (x+1).$$

Разделив обе части на $x+1 > 0$, получаем

$$u' = \frac{1}{x+1},$$

значит,

$$u = \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + \ln C = \ln\left(C(x+1)\right), \quad C > 0.$$

Окончательно имеем

$$y = uv = (x+1)^2 \ln\left(C(x+1)\right), \quad x > -1, \quad C > 0. \qquad \square$$

§2.4. Уравнение Бернулли

К линейному уравнению приводится уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha. \tag{2.22}$$

Здесь p и q — непрерывные функции от x, а α — вещественное число. Будем предполагать $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ (иначе имеем линейное уравнение).

При $y > 0$ разделим обе части уравнения (2.22) на y^α. Получаем

$$y^{-\alpha}y' = p(x)y^{1-\alpha} + q(x). \tag{2.23}$$

Введём новую искомую функцию

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Тогда $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, откуда

$$y^{-\alpha}y' = \frac{z'}{1-\alpha}.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (2.22) и умножая обе части на $(1-\alpha)$, находим

$$z' = (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x).$$

Таким образом, замена $z = y^{1-\alpha}$ сводит уравнение Бернулли к линейному.

Пример 2.6. При $x > 0$, $y > 0$ найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}.$$

Найти также решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 4$.

Решение. Имеем уравнение Бернулли с параметром $\alpha = 1/2$.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{y}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{y}}{x} + x. \tag{2.24}$$

Введём новую функцию $z = y^{1-1/2} = \sqrt{y}$. Тогда

$$z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}.$$

Подставляя в (2.24), находим

$$z' = \frac{2z}{x} + \frac{x}{2}. \tag{2.25}$$

Воспользуемся методом Лагранжа. Вспомогательное однородное уравнение

$$z' = \frac{2z}{x}$$

по лемме 2.1 имеет общее решение

$$z = C\exp\left(\int \frac{2}{x}\,dx\right) = Cx^2.$$

Далее ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$z = C(x)x^2. \tag{2.26}$$

При подстановке в (2.25) получаем

$$C' = \frac{1}{2x},$$

откуда

$$C = \int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln x + C_1.$$

Принимая во внимание (2.26), имеем

$$z = \left(\ln\sqrt{x} + C_1\right)x^2, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

Так как $z = \sqrt{y}$, то решения (2.27) рассматриваются лишь при тех значениях x, когда $z(x) > 0$, то есть при $x > e^{-2C_1}$.

Возвращаясь к y, получаем общее решение исходного уравнения

$$y = \left(\ln\sqrt{x} + C\right)^2 x^4, \quad x > e^{-2C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Для нахождения решения, удовлетворяющего условию $y(1) = 4$, подставим в общий интеграл $x = 1$, $y = 4$ и найдём значение постоянной C:

$$4 = (\ln 1 + C)^2 \cdot 1^4,$$

отсюда $C = \pm 2$. Условию $x > e^{-2C}$ при $x = 1$ удовлетворяет только $C = 2$. Следовательно, искомое частное решение

$$y = (\ln\sqrt{x} + 2)^2 x^4, \quad x > e^{-4}. \qquad \square$$

Замечание 2.1. Уравнение Бернулли так же, как и линейное, можно решать при помощи подстановки $y = uv$ (см. п. 2.3.3).

§2.5. Уравнение в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \tag{2.28}$$

если его левая часть — полный дифференциал некоторой функции двух переменных $u(x,y)$, то есть

$$du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{2.29}$$

Функцию u, для которой верно (2.29), будем называть ***потенциалом*** уравнения (2.28). Потенциал определяется с точностью до прибавления произвольной постоянной.

Если потенциал u известен, то общий интеграл уравнения (2.28) имеет вид

$$u(x,y) = C.$$

Действительно, пусть $y = \varphi(x)$ — решение (2.28) на (a,b), $x_0, x_1 \in (a,b)$, $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi(x_1) = y_1$. Вычисляя криволинейный интеграл второго рода вдоль интегральной кривой, находим

$$u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \big(P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\big)\,dx = 0.$$

Таким образом, значение потенциала u вдоль фиксированной интегральной кривой не изменяется.

Как по коэффициентам P и Q уравнения определить, что оно является уравнением в полных дифференциалах? Каким образом найти потенциал?

Пусть P и Q непрерывно дифференцируемы в односвязной области D (то есть области без «дыр»). Известно, что тогда существование потенциала u в области D равносильно выполнению равенства

$$P'_y = Q'_x. \tag{2.30}$$

В то же время условие (2.30) является необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

от пути интегрирования $\gamma \subset D$. При этом функция

$$u(\xi,\eta) = \int_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi,\eta)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

является потенциалом уравнения (2.28). При нахождении u удобно в качестве кривой, соединяющей точки (ξ_0, y_0) и (ξ,η), взять ломаную, звенья которой параллельны координатным осям (рис. 2.6).

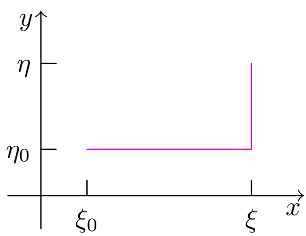


Рис. 2.6. Путь интегрирования при вычислении потенциала

Пример 2.7. Доказать, что дифференциальное уравнение

$$2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Найти его общий интеграл, а также выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(1,2)$.

Решение. Положим

$$P(x,y) = 2xy^3, \quad Q(x,y) = 3x^2y^2.$$

Область задания уравнения — область, в которой непрерывны функции P и Q. В данном случае это вся плоскость, являющаяся односвязной областью.

Частные производные

$$P'_y = 6xy^2, \quad Q'_x = 6xy^2.$$

Значит, условие $P'_y = Q'_x$ выполнено во всей плоскости Oxy. Таким образом, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Потенциал u найдём, вычисляя криволинейный интеграл вдоль ломаной с вершинами $(0,0)$, $(\xi,0)$, (ξ,η):

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \int\limits_{(0,0)}^{(\xi,\eta)} 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy \\ &= \int_{(0,0)}^{(\xi,0)} 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy + \int_{(\xi,0)}^{(\xi,\eta)} 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy \\ &= 0 + \int\limits_0^{\eta} 3\xi^2y^2\,dy = \xi^2\eta^3. \end{aligned}$$

Заменяя ξ на x, а η на y, запишем общий интеграл: $u(x,y) = C$, то есть

$$x^2y^3 = C.$$

Теперь найдём кривую, проходящую через точку $(1,2)$. Подставляя начальные данные, получаем $C = 1^2 \cdot 2^3 = 8$. Поэтому искомая кривая задаётся уравнением $x^2y^3 = 8$ или

$$y = \frac{2}{x^{2/3}}, \quad x > 0. \qquad \square$$

Глава 3

Уравнения высших порядков

§3.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением** n**-го порядка называют уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.1}$$

Порядок уравнения определяется порядком входящей в него старшей производной искомой функции.

Всякая функция φ называется ***решением*** уравнения (3.1) на интервале (a, b), если она непрерывно дифференцируема n раз на (a, b) и обращает данное уравнение в тождество:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Допустим, что уравнение (3.1) можно разрешить относительно старшей производной, то есть записать в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{3.2}$$

В этом случае говорят, что дифференциальное уравнение записано в ***нормальной форме.*** Для такого уравнения ***начальная задача (задача Коши)*** формулируется следующим образом: найти решение (3.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \tag{3.3}$$

При этом набор чисел $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ называют ***начальными данными***.

Задача Коши имеет простую геометрическую и механическую трактовку, если порядок уравнения равен двум. Допустим, требуется решить задачу

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

С геометрической точки зрения требуется найти кривую, проходящую через точку (x_0, y_0) под углом $\operatorname{arctg} y_1$ в этой точке.

Чтобы сделать механический смысл более ясным, сформулируем ту же задачу в других обозначениях:

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0.$$

Здесь искомая функция $x(t)$ — координата материальной точки в момент времени t. В механике производную обозначают точкой над функцией, то есть $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ суть первая и вторая производная функции x по времени t. Требуется найти закон движения, при котором движущаяся точка в начальный момент времени t_0 находится в положении x_0 и имеет при этом скорость v_0 (рис. 3.1).

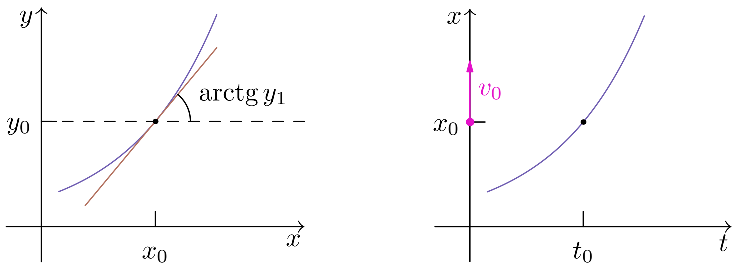


Рис. 3.1. Геометрический и механический смысл задачи Коши для уравнения 2-го порядка

Относительно задачи Коши для уравнения высшего порядка естественно задать вопросы: существует ли решение у поставленной задачи, и если существует, является ли оно единственным? Рассмотрим (без доказательства) в несколько упрощённой формулировке теорему Пикара.

Теорема 3.1 (Пикар, существование и единственность решения задачи Коши для уравнения n-го порядка). *Если в уравнении (3.2) функция*

$$f = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

и её частные производные

$$f'_y,\ f'_{y'},\ \dots,\ f'_{y^{(n-1)}}$$

непрерывны в области G, то для любых начальных данных

$$(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in G$$

найдётся окрестность точки x_0, на которой существует и притом единственное решение уравнения (3.2), удовлетворяющее начальным условиям (3.3).

Если, например, правая часть уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

есть некоторый многочлен от своих аргументов, то для любых начальных условий существует единственное решение этого уравнения.

Рассмотрим более сложный пример задачи Коши:

$$y'' = \sqrt[3]{y'} + x \sin y, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Выясним, при каких начальных данных (x_0, y_0, y_1) теорема Пикара гарантирует единственность решения. Это множество, на котором непрерывна правая часть уравнения

$$f(x, y, y') = \sqrt[3]{y'} + x \sin y$$

и её частные производные f'_y и $f'_{y'}$. В данном случае под символами y и y' необходимо понимать названия координат, а не функцию и её производную.

Итак, функция f непрерывна при любых x, y, y'. Производная по y

$$f'_y(x, y, y') = x \cos y$$

также непрерывна всюду. Однако, частная производная по y'

$$f'_{y'}(x, y, y') = \frac{1}{3\sqrt[3]{y'^2}}$$

терпит разрыв при $y' = 0$. Таким образом, теорема Пикара гарантирует единственность при $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ и $y_1 \neq 0$.

§3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Как правило, чем меньше порядок уравнения, тем легче найти его решение. Рассмотрим несколько случаев, когда порядок уравнения можно понизить.

3.2.1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Пусть уравнение имеет вид $y^{(n)} = f(x)$. Тогда

$$(y^{(n-1)})' = f(x),$$

поэтому

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\, dx + C_1.$$

Таким образом, порядок уравнения уменьшился на единицу.

Аналогично понижая порядок уравнения и далее, придём к общему решению исходного уравнения.

Пример 3.1. Найти общее решение уравнения $y''' = \sin x$.

Решение. Имеем

$$y'' = \int \sin x\, dx = -\cos x + C_1.$$

Аналогично,

$$y' = \int (-\cos x + C_1)\,dx + C_2 = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Интегрируя ещё раз, окончательно находим

$$y = \int (-\sin x + C_1 x + C_2) dx = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Ответ: общее решение имеет вид

$$y = \cos x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

3.2.2. Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$

Дифференциальное уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

не содержит явно искомой функции y и её первых $k-1$ производных. Порядок уравнения можно понизить, вводя новую неизвестную функцию

$$z(x) = y^{(k)}(x).$$

Тогда исходное уравнение приобретает вид

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Пример 3.2. Найти общее решение уравнения $4y' + y'' = 1 - 4xy''$ на промежутке $(-1/4, +\infty)$.

Решение. Положим $z(x) = y'(x)$. Тогда $z' = y''$. Исходное уравнение примет вид

$$4z + z' = 1 - 4xz'.$$

Группируя слагаемые, содержащие z', получим уравнение с разделяющимися переменными

$$(1 + 4x)\frac{dz}{dx} = 1 - 4z.$$

Решая это линейное уравнение, получаем

$$z = \frac{x + C_1}{1 + 4x}.$$

Возвращаясь к функции y, находим

$$y = \int \frac{x + C_1}{1 + 4x} dx + C_2 = \frac{x}{4} + \frac{\ln(1 + 4x)}{16}(4C_1 - 1) + C_2.$$

Ответ:

$$y = \frac{x}{4} + C_1 \ln(1 + 4x) + C_2, \quad x > -1/4, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

3.2.3. Уравнение, не содержащее независимой переменной

Дифференциальное уравнение вида

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.4}$$

не содержит явно независимой переменной x. Чтобы его решить, введём новую искомую функцию

$$z(y) = y',$$

считая y независимой переменной. Выразим производные $y'', \ldots, y^{(n)}$ через функцию z и её производные по y. Для второй производной имеем

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (z(y))'_x = z'_y \cdot y'_x = z'_y z.$$

Приведём ещё вывод формулы для третьей производной:

$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x = (z'_y z)'_x = (z'_y z)'_y \cdot y'_x = (z''_{yy} z + z'^2_y)z = z''_{yy} z^2 + z'^2_y z.$$

Замечаем, что производная $y^{(k)}$ (по переменной x) выражается через функцию z и её производные по y до $(k-1)$-го порядка. Таким образом, порядок исходного уравнения понижается на единицу при переходе к функции z.

Принимая y за независимую переменную, можно потерять решения вида $y = \text{const}$. Положим в исходном уравнении (3.4) $y = a$:

$$F(a, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Если это уравнение имеет корни $a = a_i$, то уравнение (3.4) имеет решения $y = a_i$.

Пример 3.3. Найти общее решение уравнения $(1 + y^2)yy'' = (3y^2 - 1)y'^2$.

Решение. Полагаем $z(y) = y'$, откуда $y'' = z'_y z$. Тогда исходное уравнение принимает вид

$$(1 + y^2)yzz' = (3y^2 - 1)z^2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Отметим, что $z = 0$ — решение. Чтобы исключить деление на ноль, рассмотрим сначала случай $y > 0$, $z > 0$.

Разделив обе части на $z^2(1 + y^2)y$, находим

$$\frac{1}{z}\, dz = \frac{3y^2 - 1}{(1 + y^2)y}\, dy.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln z = 2\ln(1 + y^2) - \ln y + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

отсюда

$$\frac{yz}{(1+y^2)^2} = C_1. \tag{3.5}$$

При $C_1 < 0$ эта формула описывает также решения, для которых $z < 0$. При $C_1 = 0$ сюда входит упомянутое выше решение $z = 0$.

Рассуждая аналогично, приходим к той же формуле (3.5) и при $y < 0$.

Возвращаясь к функции y, получим

$$\frac{yy'}{(1+y^2)^2} = C_1.$$

Интегрируя еще раз, найдем общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{1}{1+y^2} = C_1 x + C_2.$$

Отметим, что решения вида $y = \mathrm{const}$ не были потеряны: они получаются из общего интеграла при $C_1 = 0$. □

3.2.4. Уравнение, однородное относительно искомой функции и её производных

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

и предположим, что при любом допустимом значении t и некотором $m \in \mathbb{R}$

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

то есть функция F однородна относительно переменных y, y', …, $y^{(n)}$.

Введём новую неизвестную функцию

$$z(x) = \frac{y'}{y}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&y' = yz,\\
&y'' = y'z + yz' = (yz)z + yz' = y(z^2 + z'),\\
&y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'').
\end{aligned}$$

В общем случае $y^{(k)} = y g_k(z, z', \ldots, z^{(k-1)})$, где g_k — некоторая функция. Подставляя в исходное уравнение вместо производных полученные выражения, находим

$$F(x, y, yz, \ldots, y g_n(z, \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

В силу однородности функции F по всем аргументам, начиная со второго, имеем

$$y^m F(x, 1, z, \ldots, g_n(z, \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Сокращая на y^m, приходим к уравнению, порядок которого меньше исходного.

Пример 3.4. Найти общее решение уравнения $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.

Решение. Пусть F — левая часть уравнения. Тогда

$$\begin{aligned} F(x, ty, ty', ty'') &= x \cdot ty \cdot ty'' - x(ty')^2 - ty \cdot ty' \\ &= t^2(xyy'' - xy'^2 - yy') = t^2 F(x, y, y', y''). \end{aligned}$$

Таким образом, F однородна по переменным y, y', y''.

Полагая $z = y'/y$ (при $y \neq 0$), получим $y'' = y(z^2 + z')$. Тогда

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^2z = 0.$$

Сокращая на y^2, имеем

$$xz' - z = 0.$$

Решая обычным образом это уравнение с разделяющимися переменными, получаем его общее решение

$$z = C_1 x.$$

Возвращаясь к прежней искомой функции y, имеем

$$y' = C_1 xy.$$

Общее решение этого уравнения с разделяющимися переменными даёт формула

$$y = C_2 e^{C_1 x^2}.$$

При введении замены $z = y'/y$ мы исключили точки $y = 0$. При $C_2 = 0$ полученная формула включает в себя также и решение $y = 0$. □

3.2.5. Уравнение в точных производных

Допустим, что левая часть уравнения

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

представляет собой производную от некоторой функции Φ. То есть

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C.$$

Это уравнение, порядок которого на единицу меньше прежнего.

Пример 3.5. Решить задачу Коши

$$y'' = xy' + y + 1,$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Решение. Заметим, что

$$(xy)' = y + xy'.$$

Тогда данное уравнение можно записать так:

$$(y')' = (xy)' + x'.$$

Используя линейность производной, приходим к уравнению

$$(y' - xy - x)' = 0.$$

Отсюда

$$y' - xy - x = C.$$

Принимая во внимание начальные условия, находим значение постоянной

$$C = y'(0) - 0 \cdot y(0) - 0 = 0.$$

Итак, остаётся решить уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = x(y + 1).$$

В условии задачи подразумевается, что необходимо найти решение вблизи точки $x = 0$. В окрестности этой точки y мало отличается от 1, а значит, $y + 1$ мало отличается от $2 \neq 0$. Поэтому уравнение можно разделить на $y+1$. Интегрируя, приходим к семейству функций

$$y = Ce^{x^2/2} - 1.$$

Подставим начальные данные, чтобы найти C:

$$y(0) = Ce^0 - 1,$$

отсюда $C = 2$.

Таким образом, решением поставленной задачи Коши является функция

$$y(x) = 2e^{x^2/2} - 1. \qquad \square$$

§3.3. Понятие о краевой (граничной) задаче

Задача Коши является лишь одной из возможных задач, в которых ищется решение, удовлетворяющее дополнительным условиям. Другой тип задач представляют так называемые ***краевые (или граничные) задачи***, в которых условия, налагаемые на искомое решение, задаются не в одной точке, а на концах некоторого промежутка. Эти условия называются ***краевыми (или граничными) условиями***.

Простейшие граничные условия имеют вид

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

С геометрической точки зрения требуется найти интегральную кривую, проходящую через точки с координатами (a, A) и (b, B) (рис. 3.2 слева).

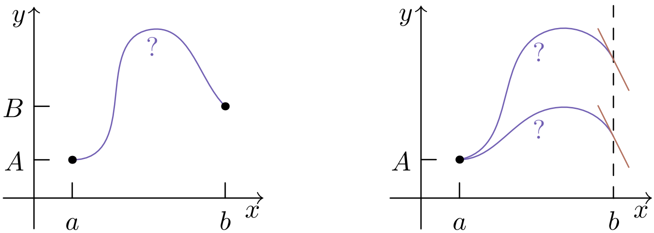


Рис. 3.2. Граничные задачи

В более общем случае граничные условия — это некоторые соотношения между значениями функции и её производными на концах промежутка. Например, одну точку искомой интегральной кривой можно зафиксировать, а в другой точке задать направление касательной, но при этом не уточнять её положение вдоль оси y (рис. 3.2 справа).

Пример 3.6. Найти решение уравнения $y'' = 6x$ удовлетворяющее граничным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Решение. Последовательно интегрируя данное уравнение, получаем

$$y' = 3x^2 + C_1,$$
$$y = x^3 + C_1 x + C_2.$$

Подставим теперь граничные условия:

$$\begin{cases} 0 = C_2, \\ 0 = 3 + C_1. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = -3$, $C_2 = 0$. Тогда искомое решение

$$y = x^3 - 3x. \qquad \square$$

Глава 4

Линейные уравнения высшего порядка. Общий случай

§4.1. Основные понятия

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_0(x)y = q(x). \tag{4.1}$$

Если его правая часть, то есть функция q, тождественно равна нулю, то уравнение приобретает вид

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_0(x)y = 0 \tag{4.2}$$

и называется ***однородным***. Если же $q \not\equiv 0$, то уравнение (4.1) называется ***неоднородным***.

Уравнение (4.1) называется ***линейным***, так как искомая функция y и её производные y', y'',…,$y^{(n)}$ входят в уравнение в первой степени в качестве слагаемых с некоторыми коэффициентами (то есть линейно). Другими словами, если зафиксировать значение x, а на символы y, y', …, $y^{(n)}$ смотреть, как на независимые переменные, то левая часть уравнения представляет из себя многочлен первой степени по отношению к этим переменным.

Функции p_0, p_1, …, p_{n-1}, а также q будем предполагать непрерывными на некотором интервале (a, b). Это предположение обеспечит существование и единственность решения задачи Коши при любом $x_0 \in (a, b)$ и любых начальных значениях искомой функции и её производных. Действительно, правая часть уравнения

$$y^{(n)} = -p_{n-1}(x)y^{(n-1)} - p_{n-2}(x)y^{(n-2)} - \ldots - p_0(x)y + q(x), \tag{4.3}$$

равносильного (4.1), в этом случае непрерывна при $x \in (a, b)$ и любых y, y', …, $y^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ (если считать эти символы независимыми переменными). Частная производная правой части (4.3) по $y^{(k)}$ (где k меняется от 0 до $n-1$), равняется $-p_k(x)$, а значит, непрерывна при тех же значениях x, y, y', …, $y^{(n-1)}$. Остаётся принять во внимание теорему Пикара 3.1.

В формулировке теоремы 3.1 указано, что существование и единственность решения обеспечивается лишь в *некоторой* окрестности начальной точки $x_0 \in$

(a, b). Однако можно доказать (это выходит за рамки курса), что для *линейного* уравнения существование и единственность имеет место *на всём* интервале (a, b). Оформим сказанное в виде теоремы.

Теорема 4.1 (существование и единственность решения задачи Коши для линейного уравнения). *Пусть функции $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ и q непрерывны на (a, b). Тогда для любых начальных данных $x_0 \in (a, b)$, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ существует определённое на всём интервале (a, b) решение φ задачи Коши*

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_0(x)y = q(x), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

При этом такое решение единственно: если φ_1 — решение той же задачи на (α, β), то $\varphi_1 \equiv \varphi$ на (α, β).

§4.2. Линейный дифференциальный оператор

С целью упростить дальнейшее изложение обозначим левую часть уравнения (4.1) через $L(y)$, то есть

$$L(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_0(x)y. \tag{4.4}$$

На символ $L(y)$ можно смотреть как на функцию, которая получается в результате выполнения некоторых операций над функцией y. Такого рода преобразования в математике принято называть операторами. То есть оператор — это отображение, которое одной функции по определённому правилу сопоставляет другую функцию.

Совокупность операций в правой части (4.4) обозначим символом L:

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x),$$

и будем называть его ***линейным дифференциальным оператором***.

В частности, операция нахождения первой производной $\frac{d}{dx}$ — это линейный дифференциальный оператор (при $n = 1$, $p_1(x) \equiv 1$, $p_0(x) \equiv 0$). Заметим, что при обозначении производной вместо $\frac{d}{dx}(y)$ пишут $\frac{d}{dx}y$. Часто таким же образом опускают скобки и в общем случае: записывают Ly вместо $L(y)$. Тогда применение оператора L к функции y соответствует формальному раскрытию скобок в выражении

$$Ly = \left(\frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x)\right) y.$$

Пример 4.1. Рассмотрим оператор

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - 5\frac{d}{dx} + 6.$$

Вычислить $L(e^x)$ и $L(e^{2x})$.

Решение. Имеем

$$L(e^x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 5\frac{d}{dx} + 6\right)e^x = \frac{d^2}{dx^2}e^x - 5\frac{d}{dx}e^x + 6e^x = e^x - 5e^x + 6e^x = 2e^x,$$

$$L(e^{2x}) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 5\frac{d}{dx} + 6\right)e^{2x} = \frac{d^2}{dx^2}e^{2x} - 5\frac{d}{dx}e^{2x} + 6e^{2x}$$
$$= 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0.$$ □

Отметим свойства линейного дифференциального оператора:

- $L(Cy) = CL(y)$, если C — постоянная;
- $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;
- $L\left(\sum\limits_{k=1}^{m} C_k y_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k L(y_k)$, где C_k — постоянные.

Справедливость первых двух свойств устанавливается непосредственной проверкой, а третье является их следствием.

Используя оператор L, уравнения (4.1) и (4.2) можно записать соответственно в виде

$$Ly = q(x) \quad \text{и} \quad Ly = 0.$$

§4.3. Вещественные и комплексные решения

До сих пор мы рассматривали только такие решения дифференциальных уравнений, которые имели вещественные значения. Однако для линейного уравнения полезно рассматривать и комплексные решения.

Пусть вещественнозначные функции u и v зависят от вещественной переменной x. Тогда функцию

$$y(x) = u(x) + iv(x), \tag{4.5}$$

где i — мнимая единица, будем называть ***комплексной функцией от вещественной переменной***. При этом функции u и v называются вещественной и мнимой частью функции y:

$$u(x) = \operatorname{Re} y(x),$$
$$v(x) = \operatorname{Im} y(x).$$

Примером такой функции служит экспонента с чисто мнимым показателем

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

При этом $\operatorname{Re} e^{ix} = \cos x$, $\operatorname{Im} e^{ix} = \sin x$. В более общем случае при $\alpha = a + ib$

$$e^{\alpha x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx.$$

Производной k-го порядка комплексной функции (4.5) называют

$$y^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + iv^{(k)}(x).$$

Нетрудно установить, например, что при $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}.$$

Используя определение производной комплексной функции, для линейного дифференциального оператора L (см. (4.4)) имеем

$$L(u + iv) = Lu + iLv. \tag{4.6}$$

Определение комплексного решения линейного однородного уравнения (4.2) такое же, как и вещественного: функция (4.5) называется решением уравнения (4.2) на интервале (a, b), если она обращает это уравнение в тождество:

$$L(u(x) + iv(x)) = 0 \quad \text{при любом } x \in (a, b).$$

В силу (4.6) это тождество равносильно системе двух тождеств

$$\begin{cases} L(u(x)) \equiv 0, \\ L(v(x)) \equiv 0. \end{cases}$$

Другими словами, комплексная функция является решением линейного однородного уравнения тогда и только тогда, когда её вещественная и мнимая части являются вещественными решениями того же уравнения.

Пример 4.2. Рассмотрим уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Оно имеет комплексное решение $y = e^{ix}$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. Действительно, при любом $x \in (-\infty, +\infty)$

$$(e^{ix})'' + e^{ix} = i^2 e^{ix} + e^{ix} = -e^{ix} + e^{ix} = 0.$$

Отсюда следует, что функции $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$ (вещественная и мнимая части функции e^{ix}) являются вещественными решениями этого уравнения.

В дальнейшем, если не оговорено противное, под решениями линейных однородных уравнений могут пониматься как вещественные, так и комплексные решения.

§4.4. Линейная независимость решений

Отметим два свойства решений линейного однородного уравнения (4.2):

- если y_1 — решение уравнения $Ly = 0$, то Cy_1 — решение того же уравнения для любой постоянной C;
- если y_1 и y_2 — решения уравнения $Ly = 0$, то $y_1 + y_2$ тоже является решением этого уравнения.

Эти свойства означают, что множество всех решений линейного однородного уравнения является линейным пространством. В дальнейшем выяснится, что оно конечномерно. Таким образом, для описания общего решения достаточно построить базис в этом пространстве.

Напомним, что базис в конечномерном линейном пространстве — это конечный линейно независимый набор его элементов, через линейную комбинацию которых выражается любой элемент данного пространства.

В нашем случае роль элементов пространства играют решения уравнения $Ly = 0$, то есть функции, заданные на некотором интервале (a, b). ***Линейная независимость*** набора функций y_1, y_2, …, y_m на интервале (a, b) означает, что тождество

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_my_m(x) = 0 \quad \text{для любого } x \in (a, b)$$

верно лишь для тривиального набора постоянных $\{C_k\}$, то есть когда $C_1 = C_2 = \ldots = C_m = 0$. В противном случае данный набор является ***линейно зависимым***.

Пример 4.3. Доказать, что функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ линейно независимы на интервале (a, b).

Решение. Допустим, что равенство

$$C_1e^x + C_2e^{-x} = 0$$

выполнено при любых $x \in (a, b)$. Тогда оно выполнено и для некоторых различных чисел $\alpha, \beta \in (a, b)$:

$$\begin{cases} C_1e^{\alpha} + C_2e^{-\alpha} = 0, \\ C_1e^{\beta} + C_2e^{-\beta} = 0. \end{cases}$$

Определитель матрицы полученной системы линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha} & e^{-\alpha} \\ e^{\beta} & e^{-\beta} \end{vmatrix} = e^{\alpha-\beta} - e^{\beta-\alpha} \neq 0,$$

поэтому система имеет лишь единственное решение $C_1 = C_2 = 0$. □

Пример 4.4. Доказать, что функции $y_1 = e^x$, $y_2 = \frac{1}{2}e^x$, $y_3 = \sin x$ линейно зависимы на (a, b).

Решение. Поскольку существует нетривиальная линейная комбинация, тождественно равная нулю:

$$y_1 - 2y_2 + 0y_3 \equiv 0,$$

то набор линейно зависим. □

Укажем способ, при помощи которого можно устанавливать линейную независимость решений. Предположим, что функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно на некотором интервале (a, b). Тогда определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4.7}$$

называют ***определителем Вронского*** или ***вронскианом*** этих функций.

Теорема 4.2 (необходимое условие линейной зависимости). *Пусть функции y_1, y_2,…,y_n линейно зависимы на (a, b). Тогда на этом интервале их вронскиан $W(x) = 0$.*

Доказательство. Будем доказывать для случая $n = 3$, поскольку в общем случае доказательство аналогично. Согласно условию теоремы имеем тождество

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = 0 \quad \text{при любом } x \in (a, b),$$

где среди чисел C_1, C_2, C_3 имеется хотя бы одно, отличное от нуля. Пусть, например, $C_3 \neq 0$, тогда

$$y_3(x) = -\frac{C_1}{C_3} y_1(x) - \frac{C_2}{C_3} y_2(x).$$

Последовательно два раза продифференцируем это равенство:

$$y_3'(x) = -\frac{C_1}{C_3} y_1'(x) - \frac{C_2}{C_3} y_2'(x),$$
$$y_3''(x) = -\frac{C_1}{C_3} y_1''(x) - \frac{C_2}{C_3} y_2''(x).$$

Подставляя полученные выражения в последний столбец определителя Вронского (4.7), находим

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & -\frac{C_1}{C_3} y_1 - \frac{C_2}{C_3} y_2 \\ y_1' & y_2' & -\frac{C_1}{C_3} y_1' - \frac{C_2}{C_3} y_2' \\ y_1'' & y_2'' & -\frac{C_1}{C_3} y_1'' - \frac{C_2}{C_3} y_2'' \end{vmatrix}$$

Последний столбец является линейной комбинацией первых двух столбцов, поэтому в силу известного свойства определителей будет $W(x) = 0$. □

Замечание 4.1. Подчеркнём, что доказанная теорема даёт *необходимое условие* линейной зависимости функций. Однако, если функции не произвольны, а являются *решениями* некоторого линейного однородного дифференциального уравнения, то условие этой теоремы становится *достаточным*. Более того, достаточным оказывается равенство нулю вронскиана всего в одной точке.

Теорема 4.3 (достаточное условие линейной зависимости). *Пусть функции y_1, y_2, ..., y_n являются решениями на (a, b) уравнения (4.2), в котором функции p_0, p_1, ..., p_{n-1} непрерывны на (a, b). Пусть, кроме того, при некотором $x_0 \in (a, b)$ их вронскиан $W(x_0) = 0$. Тогда функции y_1, y_2, ..., y_n линейно зависимы.*

Доказательство. Будем доказывать для случая $n = 3$. Составим систему уравнений с неизвестными C_1, C_2 и C_3:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + C_3 y_3(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + C_3 y_3'(x_0) = 0 \\ C_1 y_1''(x_0) + C_2 y_2''(x_0) + C_3 y_3''(x_0) = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

Заметим, что определитель матрицы этой системы — это вронскиан $W(x_0)$. По условию $W(x_0) = 0$. Значит, система имеет решение $C_1 = \alpha_1$, $C_2 = \alpha_2$, $C_3 = \alpha_3$, где хотя бы одно из чисел не равно нулю.

Составим теперь линейную комбинацию решений

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x).$$

Ясно, что $Ly = 0$. Система (4.8) показывает, что в точке x_0 это решение обращается в нуль вместе со своими производными до второго порядка включительно. Но тем же свойством обладает и решение, тождественно равное нулю. Тогда по теореме 4.1 существования и единственности заключаем, что $y \equiv 0$, то есть на интервале (a, b) имеет место тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x) \equiv 0,$$

в котором не все коэффициенты равны нулю. Следовательно, по определению решения y_1, y_2, y_3 линейно зависимы на интервале (a, b). □

Следствие 4.1 (критерий линейной независимости). *Пусть функции y_1, y_2, ..., y_n являются решениями уравнения (4.2), где p_0, p_1, ..., p_{n-1} непрерывны на (a, b). Тогда для линейной независимости функций y_1, y_2, ..., y_n на (a, b) необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан был отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$.*

Доказательство. Пусть набор $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независим. Тогда их вронскиан отличен от нуля вообще на всём интервале (a, b), поскольку в противном случае по теореме 4.3 эти функции линейно зависимы.

Обратно, если вронскиан данных функций отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$, то они линейно независимы в силу теоремы 4.2. □

Следствие 4.2. *Пусть W — вронскиан n решений уравнения (4.2), где функции p_0, p_1, …, p_{n-1} непрерывны на (a, b). Тогда*

(а) если $W(x) = 0$ хотя бы в одной точке из (a, b), то $W \equiv 0$ на (a, b);

(б) если $W(x) \neq 0$ хотя бы в одной точке из (a, b), то $W(x) \neq 0$ при любом $x \in (a, b)$.

Это следствие вытекает из теорем 4.2 и 4.3, но особенно просто оно получается из ***формулы Остроградского–Лиувилля***

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(t)\,dt},$$

которую мы оставим без доказательства.

§4.5. Структура общего решения линейного уравнения

4.5.1. Однородное уравнение

Допустим, уравнение $Ly = 0$ имеет порядок n. Назовём набор из n его линейно независимых решений на (a, b) ***фундаментальной системой решений*** этого уравнения на интервале (a, b).

Пример 4.5. Показать, что функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ на интервале (a, b) образуют фундаментальную систему уравнения

$$y'' - y = 0.$$

Решение. Непосредственной подстановкой проверяется, что y_1 и y_2 — решения. Их линейная независимость была доказана в примере 4.3. □

Здесь сразу возникает вопрос: существует ли фундаментальная система для произвольного уравнения $Ly = 0$? Другими словами, может ли пространство решений какого-нибудь линейного однородного уравнения порядка n иметь размерность, строго меньшую, чем n?

На самом деле, фундаментальная система всегда существует. Доказать это можно так. Для уравнения $Ly = 0$ рассмотрим n задач Коши с условиями

$$\begin{cases} y(x_0) = 1, \\ y'(x_0) = 0, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 1, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{cases}$$

По теореме 4.1 каждая из этих задач имеет решение на (a, b). Обозначим через φ_k решение k-ой задачи. Заметим, что вронскиан набора функций $\{\varphi_k\}$ в точке x_0 равен единице, тогда по следствию 4.1 функции $\{\varphi_k\}$ линейно независимы. Следовательно, они образуют фундаментальную систему.

Может ли уравнение $Ly = 0$ порядка n иметь больше, чем n линейно независимых решений? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема. Она говорит о том, что размерность пространства решений линейного однородного уравнения в точности равна его порядку, а фундаментальная система решений является базисом в этом пространстве.

Теорема 4.4 (общее решение линейного однородного уравнения). *Пусть $\{y_k\}_{k=1}^n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (4.2), в котором функции p_0, p_1, ..., p_{n-1} непрерывны на (a, b). Тогда общее решение этого уравнения на интервале (a, b) даётся формулой*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{4.9}$$

где $\{C_k\}_{k=1}^n$ — произвольные числа.

Доказательство. Так как правая часть (4.9) является линейной комбинацией решений, то y — решение для любого набора коэффициентов C_1, C_2, ..., C_n.

Докажем, что и обратное верно: любое решение уравнения (4.2) представимо в виде (4.9).

Пусть φ — некоторое решение (4.2), $x_0 \in (a, b)$. Рассмотрим систему алгебраических уравнений по отношению к неизвестным C_1, C_2, ..., C_n

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = \varphi(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = \varphi'(x_0), \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0). \end{cases} \tag{4.10}$$

Определитель матрицы этой системы является определителем Вронского фундаментальной системы решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, вычисленный в точке x_0, а значит, он отличен от нуля. Следовательно, система имеет единственное решение

$$C_1 = \alpha_1, \quad C_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad C_n = \alpha_n.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x).$$

Эта функция, во-первых, является решением уравнения (4.2). Во-вторых, в силу равенств (4.10) она удовлетворяет тем же начальным данным, что и функция φ. Тогда по теореме существования и единственности 4.1 она совпадает с функцией φ в каждой точке интервала (a, b). Тем самым доказано, что любое решение имеет вид (4.9). $\square$

Пример 4.6. Найти общее решение уравнения $y'' + y = 0$.

Решение. Проверкой убеждаемся, что функции $\sin x$ и $\cos x$ являются решениями на $\mathbb{R}$. Эти решения образуют фундаментальную систему, поскольку их вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, по теореме 4.4 общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные (в том числе комплексные). □

4.5.2. Неоднородное уравнение

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение n-го порядка

$$Ly = q. \tag{4.11}$$

Уравнение

$$Ly = 0 \tag{4.12}$$

с такой же левой частью, что и в (4.11), будем называть ***однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению*** (4.11).

Покажем, что интегрирование (4.11) сводится к интегрированию (4.12), если известно хотя бы одно частное решение (4.11). А именно, общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного и некоторого частного решения неоднородного уравнения.

Теорема 4.5 (общее решение линейного неоднородного уравнения). *Пусть $\{z_k\}_{k=1}^n$ — фундаментальная система решений на (a, b) уравнения $Ly = 0$, y_1 — некоторое решение уравнения $Ly = q$ на том же интервале. Тогда общее решение уравнения $Ly = q$ на (a, b) имеет вид*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k z_k + y_1,$$

где $\{C_k\}_{k=1}^n$ — произвольные постоянные.

Доказательство. В уравнении $Ly = q$ сделаем замену неизвестной функции. Положим

$$y = z + y_1,$$

где z — новая искомая функция. Тогда

$$L(z + y_1) = q.$$

Используя линейность оператора L и тождество $Ly_1 \equiv q$, получаем

$$Lz = 0.$$

По теореме 4.4 общим решением этого уравнения будет

$$z = \sum_{k=1}^{n} C_k z_k,$$

следовательно,

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k z_k + y_1$$

— общее решение уравнения $Ly = q$. □

Пример 4.7. Найти общее решение уравнения $y'' - y = -x$.

Решение. Заметим, что $y_1 = x$ — частное решение. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - y = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

(см. пример 4.5). Следовательно, общим решением исходного уравнения будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x, \quad x \in \mathbb{R},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. □

При нахождении частного решения неоднородного уравнения целесообразно пользоваться следующим принципом.

Утверждение 4.1 (принцип суперпозиции). *Пусть y_1 — частное решение уравнения $Ly = q_1$, y_2 — частное решение уравнения $Ly = q_2$. Тогда $y_1 + y_2$ — частное решение уравнения*

$$Ly = q_1 + q_2.$$

Доказательство. Имеем

$$Ly_1 \equiv q_1,$$
$$Ly_2 \equiv q_2.$$

Складывая эти два тождества и пользуясь линейностью оператора L, находим

$$L(y_1 + y_2) \equiv q_1 + q_2.$$ □

Пример 4.8. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 2e^x + 1.$$

Решение. Положим $Ly = y'' + y$. Заметим, что $y_1 = e^x$ — решение уравнения $Ly = 2e^x$, а $y_2 = 1$ — решение уравнения $Ly = 1$. Согласно принципу суперпозиции функция $y_1 + y_2 = e^x + 1$ — частное решение исходного уравнения. Общее решение соответствующего однородного уравнения было получено в примере 4.6. Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные. □

§4.6. Метод вариации постоянных

Ранее был рассмотрен метод вариации постоянной для линейного уравнения первого порядка. В этом параграфе мы распространим его на линейные уравнения произвольного порядка.

Теорема 4.6. *Пусть z_1, z_2 — фундаментальная система решений уравнения $Ly = 0$, функции C_1 и C_2 удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} C_1' z_1 + C_2' z_2 = 0, \\ C_1' z_1' + C_2' z_2' = q. \end{cases} \tag{4.13}$$

Тогда уравнение $Ly = q$ имеет частное решение $y = C_1(x) z_1 + C_2(x) z_2$.

Доказательство. Из системы (4.13) по формулам Крамера находим

$$C_1' = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & z_2 \\ q & z_2' \end{vmatrix}, \quad C_2' = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} z_1 & 0 \\ z_1' & q \end{vmatrix}, \tag{4.14}$$

где W — вронскиан функций z_1 и z_2. Вычисляя первообразные правых частей данных равенств, найдём C_1 и C_2. Таким образом, система (4.13) имеет решение.

Убедимся, что $y = C_1 z_1 + C_2 z_2$ — частное решение уравнения $Ly = q$.

Из первого уравнения системы (4.13) следует

$$y' = C_1' z_1 + C_1 z_1' + C_2' z_2 + C_2 z_2' = C_1 z_1' + C_2 z_2'.$$

Отсюда и из второго уравнения системы (4.13)

$$y'' = C_1' z_1' + C_1 z_1'' + C_2' z_2' + C_2 z_2'' = C_1 z_1'' + C_2 z_2'' + q.$$

Тогда

$$Ly = y'' + p_1 y' + p_0 y = C_1(z_1'' + p_1 z_1' + p_0 z_1) + C_2(z_2'' + p_1 z_2' + p_0 z_2) + q.$$

Множители при C_1 и C_2 равны нулю, так как z_1 и z_2 — решения уравнения $Ly = 0$. Следовательно, $Ly = q$, что и требовалось. □

Замечание 4.2. Если при нахождении C_1 и C_2 из системы (4.13) сохранить произвольные постоянные, возникающие при интегрировании формул (4.14), то получится формула общего решения уравнения $Ly = q$. Действительно, пусть $C_1(x) = F_1(x) + A_1$, $C_2(x) = F_2(x) + A_2$, где F_1 и F_2 — некоторые первообразные правых частей формул (4.14). Тогда

$$y = (F_1 + A_1)z_1 + (F_2 + A_2)z_2 = A_1 z_1 + A_2 z_2 + (F_1 z_1 + F_2 z_2).$$

По теореме 4.5 эта формула описывает общее решение уравнения $Ly = q$.

Пример 4.9. При $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$ имеет решение

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

(см. пример 4.6).

Общее решение исходного уравнения ищем в том же виде, считая C_1 и C_2 функциями, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Отсюда находим $C_1' = -\operatorname{tg} x$, $C_2' = 1$. Тогда

$$C_1 = \ln\cos x + A_1, \quad C_2 = x + A_2.$$

Таким образом, искомое общее решение имеет вид

$$y = (\ln\cos x + A_1)\cos x + (x + A_2)\sin x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2), \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Теорему 4.6 нетрудно обобщить на случай произвольного порядка уравнения (доказательство аналогично).

Теорема 4.7. *Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — фундаментальная система решений уравнения $Ly = 0$, функции $C_1, \ldots, C_n$ удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} C_1' z_1 + \ldots + C_n' z_n = 0, \\ \ldots \\ C_1' z_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' z_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' z_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' z_n^{(n-1)} = q. \end{cases}$$

Тогда уравнение $Ly = q$ имеет частное решение $y = C_1(x)z_1 + \ldots + C_n(x)z_n$.

Глава 5

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

В этой главе рассматриваются линейные уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_0 y = f(x),$$

в которых все коэффициенты a_i постоянны, а правая часть f является непрерывной на некотором интервале функцией. Заметим, что по теореме 4.1 все решения соответствующего однородного уравнения определены на $\mathbb{R}$. Поэтому в дальнейшем, говоря о решениях однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, как правило, не будем указывать их область определения.

Сначала изучим уравнения второго порядка.

§5.1. Однородное уравнение второго порядка

Рассмотрим уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{5.1}$$

где $p, q \in \mathbb{R}$. Положим $Ly = y'' + py' + qy$. Будем искать решение уравнения (5.1) в виде $y = e^{\lambda x}$, где число λ подлежит определению. Имеем

$$L(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda x})'' + p(e^{\lambda x})' + qe^{\lambda x} = (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x}.$$

Отсюда следует, что тождество $L(e^{\lambda x}) \equiv 0$ верно лишь в случае, когда

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{5.2}$$

Таким образом, функция $e^{\lambda x}$ — решение (5.1), если и только если λ — решение (5.2). Уравнение (5.2) поэтому называют ***характеристическим уравнением*** для (5.1), а его корни — ***характеристическими числами***.

Заметим, что характеристическое уравнение составляется по данному дифференциальному уравнению (5.1) заменой $y^{(k)}$ на λ^k $(k = 0, 1, 2)$.

Структура фундаментальной системы зависит от вида корней уравнения (5.2).

5.1.1. Различные вещественные характеристические числа

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ — различные корни (5.2). Тогда функции

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

являются частными решениями (5.1). Так как $y_2/y_1 = e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \not\equiv \mathrm{const}$, то они линейно независимы. По теореме 4.4 общее решение (5.1) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Пример 5.1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ различные и вещественные. Поэтому общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$ □

5.1.2. Комплексные характеристические числа

Предположим, что корни (5.2) комплексные. Так как коэффициенты уравнения вещественные, то его корни комплексно-сопряжены, то есть

$$\lambda_1 = a + ib, \quad \lambda_2 = a - ib.$$

В этом случае функции $e^{(a+ib)x}$ и $e^{(a-ib)x}$ образуют фундаментальную систему решений (5.1). Однако, эти функции комплекснозначные. Если нас интересуют вещественные решения, то удобнее иметь вещественный базис.

Поскольку

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx),$$

то функции

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx \tag{5.3}$$

являются вещественными решениями (5.1). Так как $y_2/y_1 \not\equiv \mathrm{const}$, то они линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему для (5.1).

Вещественная часть $e^{(a-ib)x}$ совпадает с y_1, а мнимая отличается лишь знаком от y_2. Таким образом, паре комплексно-сопряжённых корней λ_1, λ_2 можно поставить в соответствие два линейно независимых решения (5.3).

Пример 5.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' + y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда функции

$$y_1 = e^{-x/2} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_2 = e^{-x/2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

образуют вещественную фундаментальную систему. Значит, общее решение

$$y = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

5.1.3. Кратное характеристическое число

Предположим, что характеристическое уравнение (5.2) имеет корень кратности 2. В этом случае частным решением является функция

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad \lambda_1 = -\frac{p}{2}.$$

Для построения фундаментальной системы нужно ещё одно решение, линейно независимое с y_1. Проверим, что в качестве такового можно взять функцию $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$. Имеем

$$\begin{aligned} L(xe^{\lambda_1 x}) &= (xe^{\lambda_1 x})'' + p(xe^{\lambda_1 x})' + qxe^{\lambda_1 x} \\ &= (2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}) + p(e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x}) + qxe^{\lambda_1 x} \\ &= \big(2\lambda_1 + p + x(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q)\big)\, e^{\lambda_1 x}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\lambda_1 = -p/2$ и $p^2 - 4q = 0$, получаем

$$L(xe^{\lambda_1 x}) \equiv 0.$$

Кроме того, $y_2/y_1 = x \not\equiv \mathrm{const}$, поэтому решения y_1 и y_2 линейно независимы и, тем самым, образуют фундаментальную систему.

Пример 5.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

имеет корень $\lambda_1 = -1$ кратности 2. Поэтому функции

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^{-x}$$

образуют фундаментальную систему. Тогда общее решение:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

§5.2. Однородное уравнение высшего порядка

Изложенный выше метод построения фундаментальной системы решений для уравнения второго порядка мало отличается от общего случая уравнения n-го порядка. Аналогично функция $e^{\lambda x}$ является решением уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_0 y = 0 \tag{5.4}$$

тогда и только тогда, когда λ — корень характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_0 = 0. \tag{5.5}$$

Далее фундаментальная система решений строится в зависимости от вида его корней. Мы приведём схему её построения в каждом случае, однако, оставим в стороне доказательство линейной независимости возникающих функций.

5.2.1. Различные вещественные характеристические числа

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ — различные корни уравнения (5.5). Тогда функции

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

образуют фундаментальную систему решений (5.4).

Пример 5.4. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 9y' = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$. Поэтому функции

$$y_1 = e^{0x} = 1,\ y_2 = e^{3x},\ y_3 = e^{-3x}$$

образуют фундаментальную систему решений, а общее решение имеет вид

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

5.2.2. Различные характеристические числа, в том числе комплексные

Как и в предыдущем случае, каждому характеристическому числу λ можно поставить в соответствие решение $e^{\lambda x}$ и, тем самым, получить фундаментальную систему. Однако, если корень комплексный, то ему будет соответствовать комплексное решение.

При построении вещественной фундаментальной системы каждому вещественному корню λ сопоставляется решение $e^{\lambda x}$, а каждой паре комплексно-сопряжённых корней $a \pm ib$ — пара линейно независимых частных решения вида

$$e^{ax} \cos bx,\ e^{ax} \sin bx.$$

Пример 5.5. Решить уравнение

$$y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1 + i$, $\lambda_3 = -1 - i$.

Вещественному корню λ_1 соответствует решение

$$y_1 = e^{-2x}.$$

Паре комплексно-сопряжённых корней λ_2, λ_3 соответствует пара решений

$$y_2 = e^{-x} \cos x,\ y_3 = e^{-x} \sin x.$$

Таким образом, общее решение:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \cos x + C_3 e^{-x} \sin x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Пример 5.6. Решить уравнение

$$y^{(4)} + 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i,\ \lambda_{3,4} = -1 \pm i.$$

Поэтому фундаментальная система имеет вид

$$y_1 = e^x \cos x, \quad y_2 = e^x \sin x,$$
$$y_3 = e^{-x} \cos x, \quad y_4 = e^{-x} \sin x.$$

Следовательно, общее решение:

$$y = e^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{-x} \left(C_3 \cos x + C_4 \sin x\right), \quad C_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, 4. \square$$

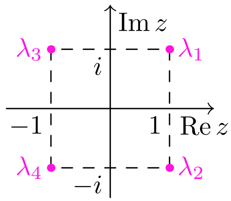


Рис. 5.1. Корни уравнения $\lambda^4 + 4 = 0$

5.2.3. Кратные вещественные характеристические числа

Если λ — вещественный корень характеристического уравнения кратности m, то уравнение (5.4) имеет m линейно независимых решений

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x}, \ldots,\ x^{m-1}e^{\lambda x}.$$

Выписывая аналогичные наборы функций для каждого корня, получают фундаментальную систему решений.

Пример 5.7. Решить уравнение

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

имеет единственный корень $\lambda_1 = 1$ кратности 3. Ему соответствуют три линейно независимых решения

$$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x,\ y_3 = x^2e^x.$$

Их линейная комбинация даёт общее решение

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$ □

5.2.4. Кратные характеристические числа, в том числе комплексные

Комплексную фундаментальную систему можно построить по той же схеме, что и в предыдущем пункте. Для построения вещественной фундаментальной системы необходимо каждой паре комплексно-сопряжённых корней $a \pm ib$ кратности m сопоставить набор функций

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx,$$
$$e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\sin bx.$$

Пример 5.8. Решить уравнение

$$y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

представимо в виде

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0.$$

Оно имеет двукратные корни $\lambda_1 = -1 + i$ и $\lambda_2 = -1 - i$. Им соответствует набор линейно независимых решений

$$\begin{aligned} &e^{-x}\cos x, \quad xe^{-x}\cos x, \\ &e^{-x}\sin x, \quad xe^{-x}\sin x. \end{aligned}$$

Тогда общее решение:

$$y = e^{-x}\left((C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x\right), \quad C_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, 4. \qquad \square$$

§5.3. Метод неопределённых коэффициентов

Для линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами в случае, когда правая часть имеет специальный вид, частное решение можно найти не прибегая к методу вариации постоянных. А именно, если правая часть является ***квазимногочленом***, то есть имеет вид

$$f(x) = e^{ax}\left(P_l(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx\right), \tag{5.6}$$

где P_l и Q_s — многочлены степени l и s соответственно, то частное решение ищется в виде

$$y_1 = x^m e^{ax}\left(\widetilde{P}_k(x)\cos bx + \widetilde{Q}_k(x)\sin bx\right),$$

где m — кратность корня $\lambda = a + ib$ характеристического уравнения ($m = 0$, если λ не является корнем), $k = \max(l, s)$, а $\widetilde{P}_k$ и $\widetilde{Q}_k$ — многочлены k-ой степени с коэффициентами, подлежащими определению.

Разберём отдельно различные частные случаи функции (5.6).

5.3.1. Правая часть вида $P_l(x)$

Частное решение ищется в виде

- $\widetilde{P}_l(x)$, если 0 — не характеристическое число;
- $x^m\widetilde{P}_l(x)$, если 0 — характеристическое число кратности m.

Пример 5.9. Решить уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Правая часть имеет вид (5.6), где $a = 0$, $b = 0$, $k = \max(l, s) = 2$. Число $a + ib = 0$ не является характеристическим. Следовательно, будем искать частное решение в виде

$$y_1(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляя y_1 в исходное уравнение, находим

$$6Ax^2 + (6B - 10A)x + (6C - 5B + 2A) = 6x^2 - 10x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему

$$\begin{cases} 6A = 6, \\ 6B - 10A = -10, \\ 6C - 5B + 2A = 2. \end{cases}$$

Отсюда $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$. Следовательно, $y_1 = x^2$. Тогда общее решение

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Пример 5.10. Решить уравнение

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

Правая часть имеет вид (5.6), где $a = 0$, $b = 0$, $k = \max(l, s) = 2$. Число $a + ib = 0$ — характеристическое кратности $m = 1$. Поэтому частное решение ищем в виде

$$y_1 = x(Ax^2 + Bx + C).$$

Подставляя y_1 в исходное уравнение, приводя подобные слагаемые и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, находим $A = 1/3$, $B = 0$, $C = 0$. Следовательно, $y_1 = x^3/3$, а общее решение

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} + \frac{1}{3}x^3, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

5.3.2. Правая часть вида $e^{ax}P_l(x)$

Частное решение ищется в виде

- $e^{ax}\widetilde{P}_l(x)$, если a — не характеристическое число;
- $x^m e^{ax}\widetilde{P}_l(x)$, если a — характеристическоое число кратности m.

Пример 5.11. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

имеет корень $\lambda_1 = 2$ кратности 2. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_0 = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

Правая часть имеет вид (5.6), где $a = 2$, $b = 0$, $k = \max(l, s) = 0$. При этом $a + ib = 2$ — характеристическое число кратности $m = 2$. Значит, ищем частное решение в виде

$$y_1 = x^2 \cdot Ae^{2x}.$$

Подставляя y_1 в исходное уравнение, находим $A = 1$. Следовательно, $y_1 = x^2e^{2x}$, а общее решение

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + x^2e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

5.3.3. Правая часть вида $P_l(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx$

Положим $k = \max(l, s)$. Частное решение ищется в виде

- $\widetilde{P}_k(x)\cos bx + \widetilde{Q}_k(x)\sin bx$, если ib — не характеристическое число;
- $x^m\left(\widetilde{P}_k(x)\cos bx + \widetilde{Q}_k(x)\sin bx\right)$, если ib — характеристическое число кратности m.

Пример 5.12. Решить уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = x\sin x.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Поэтому решение соответствующего однородного уравнения

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Правая часть имеет вид (5.6), где $a = 0$, $b = 1$, $k = \max(l, s) = 1$. Поскольку $a + ib = i$ — не характеристическое число, то ищем частное решение в виде

$$y_1 = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Подставляя y_1 в исходное уравнение, после приведения подобных слагаемых будем иметь

$$\begin{aligned}
&((A + 3C)x + 3A + B + 2C + 3D)\cos x\\
&+ ((-3A + C)x - 2A - 3B + 3C + D)\sin x\\
&= x\sin x.
\end{aligned}$$

Отсюда приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{cases}
A + 3C = 0,\\
3A + B + 2C + 3D = 0,\\
-3A + C = 1,\\
-2A - 3B + 3C + D = 0.
\end{cases}$$

Её решение:

$$A = -\frac{3}{10}, \quad B = \frac{17}{50}, \quad C = \frac{1}{10}, \quad D = \frac{3}{25}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \square$$

5.3.4. Переход к комплексному решению

Рассмотрим на следующем примере другой способ вычисления неопределённых коэффициентов. Он состоит в переходе от тригонометрических функций к комплексным показательным.

Пример 5.13. Решить уравнение

$$y'' + 4y = \sin 2x.$$

Решение. Заметим, что правая часть представима в виде

$$\sin 2x = \operatorname{Im} e^{i\cdot 2x}.$$

Поэтому мнимая часть решения уравнения

$$z'' + 4z = e^{i\cdot 2x}, \tag{5.7}$$

является решением исходного уравнения.

Характеристическое уравнение соответствующего однородного

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Правая часть уравнения (5.7) имеет вид $P_k(x)e^{(a+ib)x}$, где $a = 0$, $b = 2$ $k = 0$. Число $a + ib = 2i$ — характеристическое кратности $m = 1$, поэтому ищем частное решение уравнения (5.7) в виде

$$z_1 = x \cdot Ae^{2ix}$$

(здесь A является комплексным числом).

Подставляя z_1 в уравнение (5.7), находим

$$-4Axe^{2ix} + 4Aie^{2ix} + 4Axe^{2ix} = e^{2ix}.$$

Сокращая на e^{2ix}, получаем $4Ai = 1$, то есть $A = -i/4$. Следовательно,

$$z_1 = -\frac{i}{4}xe^{2ix} = \frac{1}{4}x\sin 2x - i\cdot\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Выделяя мнимую часть, получаем частное решение исходного уравнения

$$y_1 = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Тогда его общее решение

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$ □

5.3.5. Общий случай

Рассмотрим уравнение, где для нахождения частного решения также применяется принцип суперпозиции.

Пример 5.14. Определить вид частного решения уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}x\cos x + 3\cos 4x - 7\sin 4x.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.

Для нахождения частного решения исходного уравнения разобьём правую часть на два слагаемых и определим частные решения двух уравнений

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} x \cos x,$$
$$y'' + 2y' + 2y = 3\cos 4x - 7\sin 4x.$$

Правая часть первого уравнения имеет вид (5.6), где $a = -1$, $b = 1$, $k = \max(l, s) = 1$. Число $a + ib = -1 + i$ — характеристическое кратности $m = 1$, потому частное решение необходимо искать в виде

$$y_1 = xe^{-x}\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right).$$

Правая часть второго уравнения имеет вид (5.6), где $a = 0$, $b = 4$, $k = \max(l, s) = 0$. Число $a + ib = 4i$ не является характеристическим, поэтому частное решение ищется в виде

$$y_2 = F\cos 4x + G\sin 4x.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y_1 + y_2 = xe^{-x}\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right) + F\cos 4x + G\sin 4x,$$

где $A, B, C, D, F, G \in \mathbb{R}$ — некоторые числа, подлежащие определению. $\square$

§5.4. Описание свободных колебаний

Рассмотрим применение линейных уравнений второго порядка к исследованию простейших механических колебаний.

5.4.1. Колебания в среде без сопротивления

Предположим, что груз массы m лежит на горизонтальной плоскости, причём он может перемещаться по ней практически не испытывая силы трения. Пусть к грузу прикреплена пружина, за счёт чего он может совершать колебательные движения вдоль некоторой прямой. Свяжем с этой прямой ось Ox, взяв в качестве начала отсчёта положение равновесия центра масс груза (рис. 5.2).

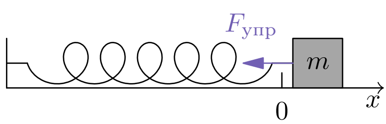


Рис. 5.2. Колебания груза на пружине в среде без сопротивления

Если вывести груз из положения равновесия на небольшое расстояние, то на него будет действовать возвращающая сила упругости пружины, пропорциональная величине отклонения:

$$F_{упр} = -kx.$$

На основании второго закона Ньютона имеем[1]

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Отсюда следует, что движение груза подчиняется уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, так что общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t.$$

Положим $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Тогда

$$x(t) = A\left(\frac{C_1}{A}\cos\omega t + \frac{C_2}{A}\sin\omega t\right) = A\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{5.8}$$

где число φ_0 таково, что $\sin\varphi_0 = C_1/A$, $\cos\varphi_0 = C_2/A$.

Движение, определяемое соотношением (5.8), называется ***гармоническим колебанием***. Это движение периодическое с периодом $T = 2\pi/\omega$ и частотой ω. Число A называется амплитудой, а φ_0 — начальной фазой колебания (рис. 5.3). Заметим, что амплитуда и начальная фаза зависят от начальных условий движения (начального положения $x(0)$ и начальной скорости $\dot{x}(0)$). Частота (а значит, и период) определяется только параметрами колеблющейся системы и называется ***собственной частотой*** системы.

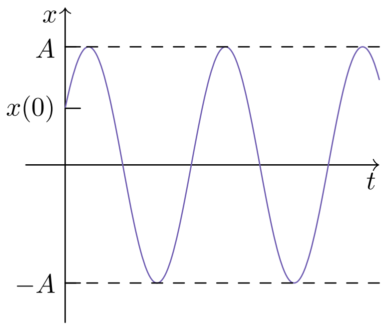


Рис. 5.3. Гармоническое колебание

5.4.2. Колебания в вязкой среде

Допустим теперь, что рассматриваемый груз перемещается в вязкой среде и при движении испытывает силу сопротивления, пропорциональную скорости

[1] Напомним, что $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ — первая и вторая производная x по времени t

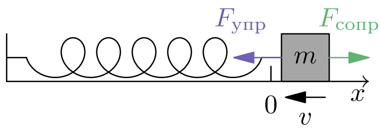


Рис. 5.4. Колебания груза на пружине в вязкой среде

движения. Таковой будет, например, сила сопротивления воздуха при малых скоростях движения груза (рис. 5.4). Для дальнейшего удобно обозначить коэффициент пропорциональности через $2mh$, то есть

$$F_{\text{сопр}} = -2mh\dot{x}, \quad h > 0.$$

В силу второго закона Ньютона

$$m\ddot{x} = -kx - 2mh\dot{x}.$$

Разделив на m и используя определение числа ω, получим

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{5.9}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}$.

Здесь возможны три случая: $h > \omega$, $h = \omega$ и $h < \omega$.

Пусть $h > \omega$. Тогда характеристические числа вещественны и отрицательны, и общее решение уравнения (5.9) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{(-h-\sqrt{h^2-\omega^2})t} + C_2 e^{(-h+\sqrt{h^2-\omega^2})t}.$$

Движение в этом случае непериодическое, причём $x(t) \to 0$ и $\dot{x}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. То есть с течением времени движение груза замедляется, и его положение всё ближе к положению равновесия (рис. 5.5).

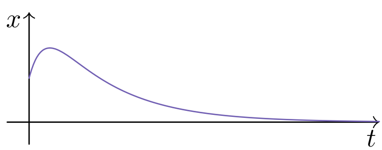


Рис. 5.5. График движения груза в случае $h > \omega$

При $h = \omega$ характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = -h$ кратности 2. Общее решение

$$x(t) = e^{-ht}\left(C_1 + C_2 t\right)$$

также описывает непериодические движения, $x(t) \to 0$, $\dot{x}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

При $h < \omega$ характеристическое уравнение имеет сопряжённые комплексные корни $\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{\omega^2 - h^2}$. Поэтому общее решение имеет вид

$$x(t) = e^{-ht}\left(C_1 \cos(t\sqrt{\omega^2 - h^2}) + C_2 \sin(t\sqrt{\omega^2 - h^2})\right).$$

Полагая $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ и выбирая φ_0 так, что $\sin\varphi_0 = C_1/A$ и $\cos\varphi_0 = C_2/A$, получаем

$$x(t) = Ae^{-ht}\sin(t\sqrt{\omega^2 - h^2} + \varphi_0).$$

Соответствующее движение называется ***затухающим гармоническим колебанием*** с частотой $\sqrt{\omega^2 - h^2}$, периодом $T = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - h^2}$, амплитудой Ae^{-ht} и начальной фазой φ_0. Заметим, что амплитуда в этом случае непостоянна и стремится к нулю при $t \to +\infty$ (рис. 5.6).

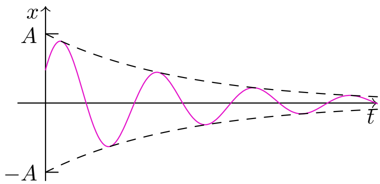


Рис. 5.6. Затухающее гармоническое колебание

§5.5. Описание вынужденных колебаний

Допустим, что на груз, кроме уже упомянутых сил, действует дополнительная возмущающая сила $F(t)$. Применяя второй закона Ньютона, получаем

$$m\ddot{x} = -2mh\dot{x} - kx + F(t).$$

Разделив на m, приходим общему виду ***уравнения колебаний***

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = f(t), \tag{5.10}$$

где $f(t) = F(t)/m$.

Согласно теореме 4.5 о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения, все движения, определяемые уравнением (5.10) (***вынужденные колебания***), складываются из движений, определяемых соответствующим однородным уравнением (***собственные колебания***) и какого-нибудь одного движения, определяемого неоднородным уравнением.

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила $F(t)$ имеет синусоидальный характер. Кроме того, пусть сопротивление среды отсутствует ($h = 0$).

Итак, пусть уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a \sin \mu t. \tag{5.11}$$

Собственные колебания были найдены в § 5.4 (формула (5.8)):

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Для нахождения частного решения воспользуемся методом неопределённых коэффициентов (см. § 5.3). Вид частного решения зависит от того, является ли число $i\mu$ решением характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

то есть совпадает ли частота μ возмущающей силы с частотой ω собственных колебаний.

5.5.1. Нерезонансный случай

Рассмотрим сначала случай $\mu \neq \omega$. Тогда частное решение уравнения (5.11) следует искать в виде

$$x_1(t) = C_1 \sin \mu t + C_2 \cos \mu t.$$

Подставляя x_1 в уравнение (5.11), получаем

$$C_1(\omega^2 - \mu^2) \sin \mu t + C_2(\omega^2 - \mu^2) \cos \mu t = a \sin \mu t,$$

откуда находим

$$C_1 = \frac{a}{\omega^2 - \mu^2}, \quad C_2 = 0.$$

Поэтому

$$x_1(t) = \frac{a}{\omega^2 - \mu^2} \sin \mu t.$$

Тогда общим решением уравнения (5.11) будет

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{a}{\omega^2 - \mu^2} \sin \mu t.$$

Из полученного соотношения видно, что чем ближе частота μ внешней возмущающей силы к собственной частоте ω колебаний пружины, тем разность $\omega^2 - \mu^2$ ближе к нулю, а значит, тем больше амплитуда колебаний. При этом амплитуда возрастает неограниченно, если $\mu \to \omega$.

5.5.2. Резонанс

Допустим, что $\mu = \omega$. Тогда частное решение уравнения (5.11) следует искать в виде

$$x_1(t) = t\left(C_1 \sin \mu t + C_2 \cos \mu t\right).$$

Подставляя x_1 в уравнение (5.11), получаем

$$2C_1\omega \cos \omega t - 2C_2\omega \sin \omega t = a \sin \omega t,$$

откуда

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{a}{2\omega}.$$

Следовательно,

$$x_1(t) = -\frac{a}{2\omega} t \cos \omega t.$$

Поэтому общее решение уравнения (5.11)

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{at}{2\omega} \cos \omega t.$$

Наличие множителя t во втором слагаемом обуславливает неограниченный рост амплитуды колебаний с течением времени. В этом случае говорят, что имеет место резонанс (рис. 5.7).

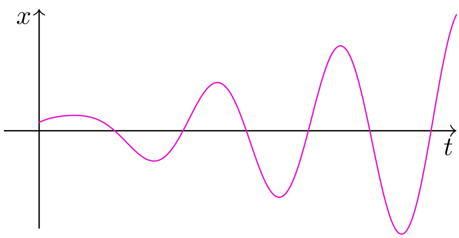


Рис. 5.7. Резонанс

Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами возникают не только при изучении механических колебаний. Например, они находят применение в теории электрических цепей. Такие уравнения описывают и многие другие колебательные явления.

Глава 6

Системы дифференциальных уравнений

В прикладных задачах часто приходится искать не одну, а несколько неизвестных функций. Для их определения, вообще говоря, составляется столько уравнений, сколько имеется функций. Таким образом мы приходим к *системе дифференциальных уравнений.*

§6.1. Модель «хищник–жертва»

Рассмотрим простейшую модель, описывающую борьбу двух биологических видов — хищника и жертвы. Пусть в некотором лесу обитают зайцы в количестве $x(t)$ и лисы в количестве $y(t)$.

Если бы лис не было, то зайцы размножались бы со скоростью, пропорциональной их количеству: $\dot{x} = kx$. Однако, при наличии лис следует учесть зайцев, съеденных лисами. Предположим, что число встреч зайцев с лисами пропорционально числу тех и других. Тогда

$$\dot{x} = kx - axy.$$

Лисы вымирают при отсутствии зайцев: $\dot{y} = -ly$. Если же зайцы водятся в лесу, то лисы размножаются со скоростью, пропорциональной числу пойманных зайцев:

$$\dot{y} = -ly + bxy.$$

Таким образом, мы приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \tag{6.1}$$

Эта система описывает простейшую модель системы хищник–жертва, называемую ***моделью Лотки–Вольтерра*** (по имени авторов, предложивших её). Решением такой системы является пара функций $x(t)$ и $y(t)$, которые на некотором интервале обращают каждое уравнение системы в тождество.

Текущее состояние системы хищник–жертва можно изображать точкой на плоскости, имеющей координаты $(x(t), y(t))$. С течением времени численность особей изменяется, поэтому точка перемещается по плоскости вдоль некоторой траектории γ, которую параметрически определяют функции $x(t)$ и $y(t)$.

Вектор с компонентами $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, как известно, касается кривой γ, если его отложить от точки $(x(t), y(t))$. Поэтому правая часть системы (6.1) определяет вектор, касательный к искомой траектории. Следовательно, мы можем представить себе как примерно ведут себя решения, если изобразим соответствующее векторное поле (рис. 6.1).

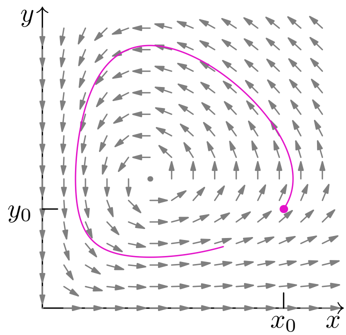


Рис. 6.1. Поле направлений движения, определяемое системой (6.1)

Если количество зайцев превышает количество лис (точка (x_0, y_0) на рис. 6.1), то популяции зайцев и лис растут, пока размножившиеся лисы не начнут съедать больше зайцев, чем их прирост. Затем число зайцев будет убывать, пока нехватка пищи не приведёт к вымиранию лис. Далее число лис уменьшится настолько, что зайцы снова начнут размножаться. В действительности про систему (6.1) известно, что её траектории являются замкнутыми, то есть в данной биологической системе происходят периодические колебания численности популяций.

Рассмотренная координатная плоскость Oxy называется *фазовым пространством* для системы (6.1), а построенная на ней траектория, соответствующая решениям $x(t)$, $y(t)$, является *фазовой траекторией*. Перейдём к формальным определениям.

§6.2. Нормальная система уравнений

Мы будем рассматривать системы дифференциальных уравнений, разрешённые относительно производных от искомых функций:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{6.2}$$

Системы, имеющие такой вид, называют ***системами в нормальной форме*** или ***нормальными системами***.

Введём в рассмотрение вектор-столбец Y и вектор-функцию $f(x,Y)$:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f(x,Y) = \begin{pmatrix} f_1(x,Y) \\ \dots \\ f_n(x,Y) \end{pmatrix}.$$

Тогда система (6.2) компактно запишется в виде одного *векторного* (или *n-мерного*) уравнения

$$Y' = f(x,Y), \tag{6.3}$$

которое по форме совпадает с дифференциальным уравнением первого порядка (*одномерным*), разрешённым относительно производной.

Решением системы (6.2) (или векторного уравнения (6.3)) на интервале (a,b) называют вектор-функцию

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix},$$

каждая компонента которой непрерывно дифференцируема на (a,b), и которая обращает уравнение (6.3) в тождество:

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)) \quad \forall x \in (a,b).$$

Общим решением системы будем называть множество всех её решений, а ***частным решением*** — какое-нибудь одно конкретное решение.

Пример 6.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Первое уравнение — линейное однородное. Его общее решение

$$y_1 = C_1 e^{2x}.$$

Подставляя эту функцию во второе уравнение системы, приходим к линейному неоднородному уравнению:

$$y_2' = 2y_2 + C_1 e^{2x}.$$

Решая его, например, методом Лагранжа, приходим к функции

$$y_2 = C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x}.$$

Составим из полученных функций вектор

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2x} \\ C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Эта формула описывает общее решение исходной системы.

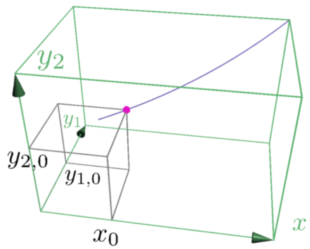


Рис. 6.2. Интегральная кривая двумерного уравнения, проходящая через заданную начальную точку

Интегральной кривой, как и прежде, называют график решения. Однако, теперь это график вектор-функции. Соответственно, он расположен в $(n+1)$-мерном пространстве, если в системе n искомых функций.

Постановка начальной задачи для нормальной системы из n уравнений требует наличия n условий, которые превращаются в одно, если использовать векторную форму записи. Итак, ***задачей Коши*** для системы (6.2) (или векторного уравнения (6.3)) называют задачу отыскания её решения, удовлетворяющего ***начальному условию***

$$Y(x_0) = Y_0, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ \dots \\ y_{n,0} \end{pmatrix}.$$

Числа $x_0, y_{1,0}, \dots, y_{n,0}$ называют ***начальными данными***. С геометрической точки зрения задача Коши подразумевает поиск интегральной кривой, проходящей через заданную точку $(n+1)$-мерного пространства (рис. 6.2).

Теорема Пикара почти дословно переносится с одномерного на n-мерное уравнение.

Теорема 6.1 (Пикар, существование и единственность решения задачи Коши для нормальной системы). *Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ непрерывны все компоненты вектор-функции f, а также их производные по $y_1, \dots, y_n$. Тогда для любых начальных данных $(x_0, Y_0) \in G$ существует единственное решение задачи*

$$Y' = f(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0.$$

6.2.1. Механическая интерпретация

В дальнейшем будет удобно обозначать независимую переменную буквой t, придавая ей смысл времени. Рассмотрим n-мерное уравнение

$$\dot r = f(t, r),$$

где $r = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Всякое решение этого уравнения

$$r = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

представляет собой закон движения точки в пространстве $\mathbb{R}^n$. Это пространство будем называть ***фазовым пространством***. Кривая, которая параметрически определяется уравнениями (6.4) (годограф вектор-функции r), называется ***фазовой траекторией***. Она является проекцией интегральной кривой в фазовое пространство.

Пример 6.2. Рассмотрим одномерное уравнение

$$\dot{x} = x.$$

Его общее решение $x = Ce^t$.

Пусть $C = 1$. График этого решения — кривая в двумерном пространстве координат t, x. Её параметрическое задание: $(t, x) = (t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Фазовым пространством служит прямая (ось x). Фазовая траектория — проекция графика в фазовое пространство. В данном случае это открытый луч $x > 0$, параметрически заданный уравнением $x = e^t$, $t \in \mathbb{R}$. Направление движения отмечают стрелкой на фазовой траектории (рис. 6.3).

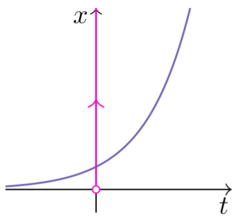


Рис. 6.3. Интегральная кривая и фазовая траектория одномерного уравнения

Пример 6.3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Решим её. Для этого сначала продифференцируем первое уравнение:

$$\ddot{x} = -\dot{y}.$$

Подставляя это соотношение во второе уравнение системы, приходим к линейному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\pm i$, поэтому

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Найдём y из первого уравнения системы:

$$y = -\dot{x} = C_1 \sin t - C_2 \cos t.$$

Рассмотрим частное решение при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

График этого решения — кривая в трёхмерном пространстве координат t, x, y (винтовая линия), её параметрическое задание: $(t, x, y) = (t, \cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Решение $r = (x, y)$ имеет две компоненты, поэтому фазовое пространство двумерно. Фазовая кривая — проекция интегральной кривой в пространство координат x, y. В данном случае это окружность, её параметрическое задание: $(x, y) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ (рис. 6.4).

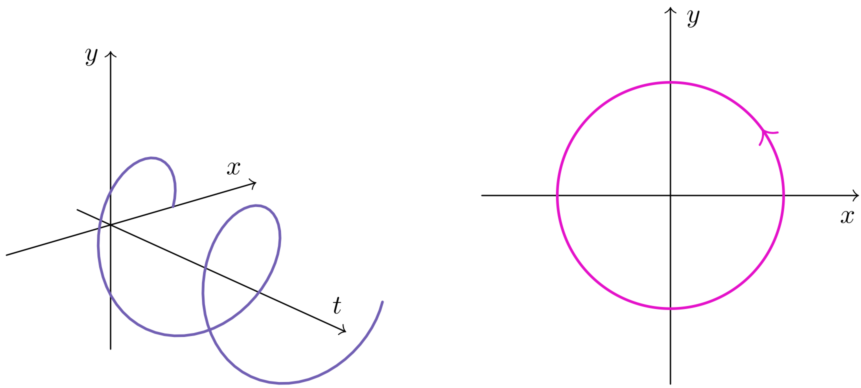


Рис. 6.4. Интегральная кривая и фазовая траектория двумерного уравнения

Системы в рассмотренных уравнениях не содержат переменной t в правой части, то есть имеют вид

$$\dot{r} = f(r).$$

Такие системы называют ***автономными***. Они обладают замечательным свойством: если $r = \varphi(t)$ — решение, то $r = \varphi(t - \tau)$ — тоже решение ($\tau \in \mathbb{R}$). Геометрически это означает, что при параллельном переносе вдоль оси времени интегральная кривая переходит в интегральную кривую (рис. 6.5).

Кроме того, при условии непрерывной дифференцируемости всех компонент вектор-функции f фазовые траектории не пересекаются. Таким образом, при исследовании автономных систем целесообразно изучать именно фазовые траектории, а не интегральные кривые, поскольку траектории принадлежат пространству меньшей размерности.

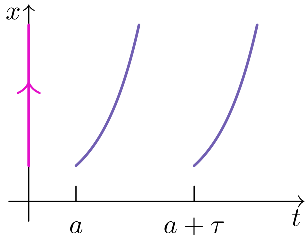


Рис. 6.5. Интегральные кривые автономного уравнения

§6.3. Приведение уравнения к нормальной системе

Рассмотрим вопрос о связи между нормальными системами и уравнениями высших порядков. Пусть у нас имеется, например, уравнение 3-го порядка

$$y^{(3)} = f(x, y, y', y'') \tag{6.5}$$

Покажем, что оно равносильно некоторой системе 3-го порядка.

Предположим, что y — решение (6.5), и введём в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} y_1 &= y, \\ y_2 &= y', \\ y_3 &= y''. \end{aligned}$$

Их производные:

$$\begin{aligned} y_1' &= y' = y_2, \\ y_2' &= y'' = y_3, \\ y_3' &= y^{(3)}. \end{aligned}$$

Функция y по предположению является решением (6.5). Поэтому

$$y_3' = f(x, y, y', y'') = f(x, y_1, y_2, y_3).$$

Таким образом, вектор (y_1, y_2, y_3) — решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = f(x, y_1, y_2, y_3). \end{cases} \tag{6.6}$$

И наоборот, если (y_1, y_2, y_3) — решение системы (6.6), то y_1 — решение уравнения (6.5). Действительно, дифференцируя первое уравнение системы, находим

$$y_1'' = y_2' = y_3.$$

Дифференцируя равенство $y_1'' = y_3$, получаем

$$y_1^{(3)} = y_3' = f(x, y_1, y_2, y_3) = f(x, y_1, y_1', y_1'').$$

Тем самым, y_1 – это решение исходного уравнения, что и требовалось.

Такие же рассуждения можно провести для уравнений произвольного порядка. Сведение к нормальной системе позволяет перенести теорию и методы решения систем на уравнения высших порядков. Кроме того, для уравнения возникает понятие фазового пространства. ***Фазовым пространством уравнения*** высшего порядка называют фазовое пространство нормальной системы, которая строится описанным выше способом.

6.3.1. Математический маятник

Рассмотрим, например, уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{6.7}$$

Оно уже встречалось нам при изучении колебаний груза на пружине (см. § 5.4).

Это же уравнение описывает малые колебания математического маятника, если параметр ω (частота колебаний) равен $\sqrt{g/l}$, где g —ускорение свободного падения, а l — длина маятника (рис. 6.6).

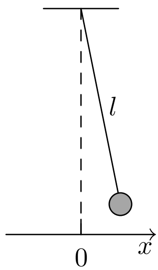


Рис. 6.6. Математический маятник

Опишем фазовые траектории уравнения (6.7). Это можно сделать, предварительно найдя решения, но мы поступим иначе.

Построим равносильную систему. Для этого введём функции:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1. \end{cases} \tag{6.8}$$

Заметим, что система (6.8) — автономная, так как правые части не содержат переменной t. А фазовые траектории автономных систем можно получить, используя следующий приём.

Запишем производные в виде отношения дифференциалов:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\omega^2 x_1. \end{cases}$$

Выражая в каждом уравнении dt и исключая его из системы, приходим к одному уравнению, не содержащему t:

$$\omega^2 x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 = 0. \tag{6.9}$$

Интегральные кривые уравнения (6.9) — это и есть фазовые траектории автономной системы (6.8). Можно показать, что в общем случае автономная система указанным способом приводится к системе, порядок которой на единицу меньше, при этом интегральные кривые новой системы будут совпадать с фазовыми траекториями исходной системы. Мы оставим это утверждение без доказательства.

Общее решение уравнения с разделёнными переменными (6.9):

$$\frac{\omega^2 x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = C.$$

Положим $C = A^2\omega^2/2$. Тогда

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{(A\omega)^2} = 1.$$

Следовательно, фазовые траектории системы (6.8), а значит, фазовые траектории уравнения (6.7), – это семейство эллипсов. Но есть ещё одна траектория, которая не является интегральной кривой уравнения (6.9): точка покоя.

Точкой покоя автономной системы $\dot{r} = f(r)$ называют такую точку r_0 в фазовом пространстве, для которой $f(r_0) = 0$. Её ещё назвают положением равновесия или стационарным состоянием. Система имеет постоянное решение $r = r_0$, если и только если r_0 — точка покоя.

Найдём все такие точки для системы (6.6). Для этого приравняем к нулю правые части:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ -\omega^2 x_1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем единственное положение равновесия $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Выясним ещё направление движения вдоль фазовой траектории. Из самого вида системы уравнений $\dot{r} = f(r)$ следует, что её правая часть определяет скорость движения в фазовом пространстве. Вектор $f(r)$ называют ***фазовой скоростью*** (скорость изменения состояния). Таким образом, чтобы узнать направление движения в некоторой точке, достаточно найти вектор фазовой скорости в этой точке.

Возьмём, например, точку $r_0 = (1, 0)$. Значение правой части системы в ней:

$$f(r_0) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 x_1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x_1=1, x_2=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}$$

То есть вектор фазовой скорости в точке r_0 направлен вниз перпендикулярно оси x. Отсюда следует, что точка, изображающая текущее состояние, перемещается по эллипсу по часовой стрелке (рис. 6.7).

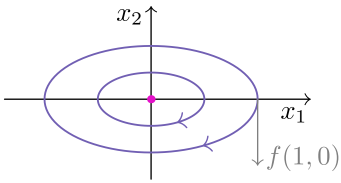


Рис. 6.7. Фазовые траектории системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1$

Ясно, что аналогичное направление получается для всех остальных траекторий в положительных точках оси x_1. При этом нет необходимости вычислять фазовую скорость в других точках эллипса: движение всегда будет в одном направлении.

Полученные фазовые траектории дают описание малых колебаний маятника. Вдоль оси x_1 откладывается положение подвешенного груза, а вдоль оси x_2 – его скорость. Переименуем оси соответственно: $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$ (рис. 6.8).

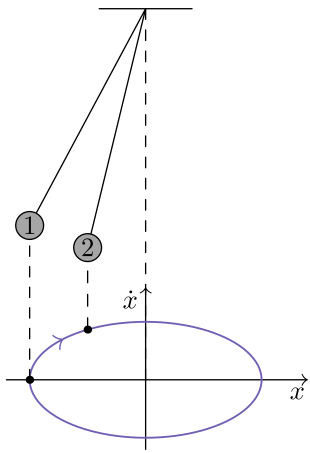


Рис. 6.8. Фазовая траектория уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Если подвешенный груз находится в положении равновесия и имеет нулевую скорость, то он так и продолжает находиться в этом положении. Это состояние описывает точка покоя в начале координат.

Если груз колеблется, то, согласно рисунку 6.7, движение будет периодическим. Наибольшую скорость груз имеет в момент прохождения положения равновесия, а в двух наиболее удалённых точках он имеет нулевую скорость.

6.3.2. Каноническая система

В прикладных задачах могут возникать системы уравнений высшего порядка. Допустим, мы хотим узнать закон движения материальной точки. Пусть известна действующая на неё сила F, которая зависит от текущего момента времени t, положения точки в пространстве r, и её текущей скорости $\dot{r}$. Если m — масса данной материальной точки, то согласно второму закону Ньютона

$$m\ddot{r} = F(t, r, \dot{r}).$$

Записывая это векторное уравнение покоординатно, приходим к системе

$$\begin{cases} \ddot{x} = f_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ \ddot{y} = f_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ \ddot{z} = f_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{cases}$$

где f_x, f_y, f_z — компоненты $\frac{1}{m}F$.

Заметим, что каждое уравнение этой системы выражено относительно производной наибольшего порядка. Такие системы называют **каноническими**. При помощи введения новых функций каноническая система сводится к нормальной. Это производится аналогично случаю одного уравнения.

Например, для данной системы необходимо ввести 6 функций:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad y_1 = y, \quad y_2 = \dot{y}, \quad z_1 = z, \quad z_2 = \dot{z}.$$

Они удовлетворяют эквивалентной нормальной системе 6-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f_x(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2), \\ \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = f_y(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2), \\ \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = f_z(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2). \end{cases}$$

В общем случае порядок равносильной нормальной системы равен сумме порядков всех уравнений, входящих в каноническую систему.

§6.4. Метод исключения

Одним из методов решения систем является метод исключения. Он состоит в том, чтобы привести систему к уравнениям более высокого порядка, содержащим только одну искомую функцию.

Рассмотрим общую схему метода на примере системы третьего порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y, z), \\ \dot{y} = f_2(t, x, y, z), \\ \dot{z} = f_3(t, x, y, z). \end{cases} \tag{6.10}$$

Используя формулу для производной сложной функции, продифференцируем первое уравнение системы. Имеем

$$\ddot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\dot{z}.$$

Заменим производные в правой части, применяя уравнения системы. Тогда

$$\ddot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial z} f_3 = F_2(t, x, y, z).$$

Теперь продифференцируем полученное равенство $\ddot{x} = F_2(t, x, y, z)$:

$$\dddot{x} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\dot{z}.$$

Аналогично, заменим производные искомых функций их выражениями из системы. Получаем

$$\dddot{x} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y} f_2 + \frac{\partial F_2}{\partial z} f_3 = F_3(t, x, y, z). \tag{6.11}$$

Допустим, что из системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y, z), \\ \ddot{x} = F_2(t, x, y, z) \end{cases}$$

возможно выразить y и z:

$$\begin{aligned} y &= g_1(t, x, \dot{x}, \ddot{x}), \\ z &= g_2(t, x, \dot{x}, \ddot{x}). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Подставляя эти выражения в формулу (6.11), находим

$$\dddot{x} = F_3(t, x, g_1(t, x, \dot{x}, \ddot{x}), g_2(t, x, \dot{x}, \ddot{x})).$$

Обозначая выражение в правой части через f, приходим к уравнению третьего порядка относительно функции x

$$\dddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}).$$

Если $x = \varphi(t)$ — его решение, то подставляя его в формулы (6.12), найдём общее решение исходной системы (6.10)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ g_1(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \ddot{\varphi}(t)) \\ g_2(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \ddot{\varphi}(t)) \end{pmatrix}.$$

Описанная схема сведения системы к одному уравнению работает не всегда, поскольку не всегда найдутся выражения g_1 и g_2 для y и z. Это демонстрирует хотя бы такой тривиальный пример системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение, мы не получим такое уравнение, через решение которого можно было бы затем выразить y. В этом примере достаточно решить каждое уравнение отдельно.

Можно показать, что в общем случае нормальная система приводится к группе уравнений, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию. При этом сумма порядков новых уравнений равна порядку исходной системы.

Пример 6.4. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение:

$$\ddot{x} = \dot{y} + \dot{z}.$$

Воспользуемся вторым и третьим уравнениями системы:

$$\ddot{x} = (x + z) + (x + y) = 2x + y + z.$$

Из полученного соотношения и первого уравнения системы отдельно y и z не выразить. Поэтому дифференцировать ещё раз нет смысла.

Воспользуемся первым уравнением, чтобы заменить $y + z$ в формуле для второй производной x. Имеем

$$\ddot{x} = 2x + \dot{x}.$$

Это линейное уравнение второго порядка имеет общее решение

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

Для дальнейшего нужно ещё одно уравнение, содержащее только одну искомую функцию. Исключим z из уравнений системы. Для этого вычтем первое уравнение из второго:

$$\dot{y} - \dot{x} = x - y.$$

Функция x уже известна, подставим её:

$$\dot{y} + y = x + \dot{x} = 3C_2e^{2t}.$$

Это линейное уравнение первого порядка имеет общее решение

$$y = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

Наконец, найдём функцию z, выразив её из первого уравнения системы:

$$z = \dot{x} - y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \\ C_3e^{-t} + C_2e^{2t} \\ -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Глава 7

Линейные системы уравнений

§7.1. Общие положения

Важным частным случаем нормальных систем являются линейные системы. Система уравнений называется линейной, если все искомые функции и их производные входят в каждое уравнение линейным образом. Общий вид линейной системы второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + f_1(t), \\ \dot{y} = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + f_2(t). \end{cases}$$

Правая часть системы представима в виде

$$\begin{pmatrix} p_{11}(t)x + p_{12}(t)y \\ p_{21}(t)x + p_{22}(t)y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда, полагая

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

систему можно компактно записать в виде векторного уравнения

$$\dot{r} = P(t)r + f(t). \tag{7.1}$$

По форме уравнение (7.1) совпадает с линейным уравнением первого порядка. Линейная система произвольного порядка n определяется той же формулой (7.1), где r, f — n-мерные векторы, а P — матрица размера $n \times n$.

Определение. Система уравнений (n-мерное векторное уравнение)

$$\dot{r} = P(t)r$$

называется ***линейной однородной системой***. Если $f \not\equiv 0$, то система

$$\dot{r} = P(t)r + f(t)$$

называется ***линейной неоднородной системой***.

Теория линейных систем аналогична теории линейных уравнений высшего порядка. Например, справедлива аналогичная теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема 7.1 (существование и единственность решения задачи Коши для линейной системы). *Пусть компоненты матрицы P и вектора f — непрерывные на (a, b) функции, $t_0 \in (a, b)$, $r_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда задача Коши*

$$\dot{r} = P(t)r + f(t), \quad r(t_0) = r_0$$

имеет решение φ, определённое на (a, b). Решение φ единственно: если φ_1 — решение той же задачи на $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, то $\varphi_1 \equiv \varphi$ на (α, β).

§7.2. Линейные однородные системы

Рассмотрим однородную систему

$$\dot{r} = P(t)r. \tag{7.2}$$

Она обладает той же особенностью, что и линейное однородное уравнение: её решения образуют линейное пространство.

Действительно, если имеются решения r_1 и r_2, то подставляя их в систему и складывая получившиеся тождества, находим

$$(r_1 + r_2)' = P(t)(r_1 + r_2).$$

Значит, $r_1 + r_2$ — тоже решение. Если C — произвольное число, то Cr_1 — решение. Это и означает, что множество решений однородной системы — линейное пространство. Отсюда, в частности, следует, что любая линейная комбинация решений будет решением.

Таким образом, чтобы описать все решения, достаточно указать базис в их пространстве. Напомним, что $\{r_k\}_{k=1}^m$ — ***базис*** в линейном пространстве L, если

- набор $\{r_k\}_{k=1}^n$ линейно независим;
- любой элемент $r \in L$ — линейная комбинация $\{r_k\}_{k=1}^n$:

$$r = C_1 r_1 + C_2 r_2 + \ldots + C_m r_m.$$

Для пространства вектор-функций, заданных на (a, b), линейная независимость означает следующее. Набор вектор-функций $\{r_k\}_{k=1}^m$ называется ***линейно независимым*** на (a, b), если тождество

$$C_1 r_1(t) + C_2 r_2(t) + \ldots + C_m r_m(t) \equiv 0 \text{ на } (a, b)$$

верно лишь в случае $C_1 = C_2 = \ldots = C_m = 0$.

Для определения характера линейной зависимости решений $\{r_k\}_{k=1}^n$ системы (7.2) удобно использовать ***определитель Вронского (вронскиан)***:

$$W(t) = \det(r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t)).$$

Он уже встречался нам, но раньше мы его определяли для набора *скалярных* функций. Теперь же определение дано для набора *вектор-функций.*

Свойства вронскиана вектор-функций аналогичны свойствам вронскиана скалярных функций. Отметим без доказательства свойства вронскиана *решений* однородной системы.

Теорема 7.2 (свойства вронскиана решений линейной однородной системы). *Пусть* $\{r_k\}_{k=1}^n$ *— решения системы (7.2) на* (a, b), W *— вронскиан данного набора. Тогда*

- *набор* $\{r_k\}_{k=1}^n$ *линейно зависим, если и только если найдётся точка* $t_0 \in (a, b)$, *такая что* $W(t_0) = 0$;
- *набор* $\{r_k\}_{k=1}^n$ *линейно независим, если и только если найдётся точка* $t_0 \in (a, b)$, *такая что* $W(t_0) \neq 0$.

Пусть система (7.2) имеет порядок n. Назовём набор из n её линейно независимых решений ***фундаментальной системой решений.***

Всегда ли такой набор решений найдётся? Рассмотрим, например, систему 3-го порядка. Поставим для неё три задачи Коши с начальными условиями

$$r(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По теореме 7.1 каждая такая задача имеет решение. Назовём их r_1, r_2, r_3. Вронскиан данного набора в точке t_0

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Отсюда следует, что вектор-функции r_1, r_2, r_3 линейно независимы. Рассуждая так же для системы произвольного порядка, заключаем, что фундаментальная система решений существует для любой линейной системы (7.2).

Так же, как и для линейных уравнений высшего порядка, оказывается, что фундаментальная система решений — это базис в пространстве решений.

Теорема 7.3 (общее решение линейной однородной системы). *Пусть* $\{r_k\}_{k=1}^n$ *— фундаментальная система решений системы (7.2). Тогда её общее решение имеет вид*

$$r = \sum_{k=1}^{n} C_k r_k,$$

где $\{C_k\}_{k=1}^n$ *— произвольные числа.*

Доказательство этой теоремы мало отличается от доказательства аналогичной теоремы 4.4 для уравнений.

Из решений $\{r_k\}_{k=1}^n$, образующих фундаментальную систему решений (7.2), составим матрицу

$$\Phi = (r_1, r_2, \ldots, r_n).$$

Такая матрица называется ***фундаментальной матрицей*** линейной однородной системы. Заметим, что $\det \Phi(t) = W(t)$ — вронскиан набора $\{r_k\}_{k=1}^n$.

При помощи фундаментальной матрицы Φ компактно записывается общее решение однородной системы:

$$r = \Phi C,$$

где $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ — столбец произвольных постоянных.

Пример 7.1. Система

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

имеет общее решение $x = C_1 e^t$, $y = C_2 e^{2t}$. В качестве фундаментальной системы решений тогда можно выбрать две вектор функции:

$$r_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Объединяя r_1 и r_2, получаем фундаментальную матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение можно представить как произвольную линейную комбинацию r_1 и r_2:

$$r = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Или, используя фундаментальную матрицу:

$$r = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

§7.3. Метод Эйлера. Случай простых собственных чисел

Для построения общего решения линейной однородной системы требуется найти фундаментальную систему решений. Изучим этот вопрос, когда коэффициенты системы постоянны. То есть рассмотрим систему

$$\dot{r} = Ar, \tag{7.3}$$

где A — матрица, составленная из чисел.

Здесь возможны различные подходы. В частности, можно применять метод исключения, сводящий данную систему к одному или нескольким линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Способ, который рассматривается в этом и следующем параграфе, носит название *метода Эйлера*.

Подставим в систему (7.3) вектор

$$r = e^{\lambda t} h \neq 0.$$

Получаем $\lambda e^{\lambda t} h = e^{\lambda t} A h$, откуда

$$\lambda h = A h. \tag{7.4}$$

Полученное равенство — это определение собственного числа и соответствующего ему собственного вектора матрицы A. Отсюда делаем вывод: если $e^{\lambda t} h$ — решение, то λ — это собственное число матрицы A, а h — соответствующий собственный вектор.

Эти рассуждения можно провести и в обратном направлении. Предполагая верным равенство (7.4), умножим его на $e^{\lambda t}$ и запишем левую часть как производную. Тогда приходим к тому, что $e^{\lambda t} h$ — решение системы (7.3).

Теорема 7.4 (общее решение в случае простых собственных чисел). *Пусть все собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ матрицы A различны, $\{h_k\}_{k=1}^n$ — соответствующие собственные векторы. Тогда $\left\{e^{\lambda_k t} h_k\right\}_{k=1}^n$ — фундаментальная система решений (7.3).*

Доказательство. Векторы $\left\{e^{\lambda_k t} h_k\right\}_{k=1}^n$ — решения в силу проведённых выше рассуждений.

Вронскиан данного набора при $t = 0$

$$W(0) = \det(h_1, h_2, \ldots, h_n).$$

Как известно из курса линейной алгебры, различным собственным числам соответствуют линейно независимые собственные векторы, поэтому $W(0) \neq 0$. Следовательно, указанные решения линейно независимы и, тем самым, образуют фундаментальную систему решений. $\square$

Пример 7.2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Решение. Матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа — корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ (здесь E — единичная матрица 2-го порядка), то есть

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Тогда $\lambda = 1$ или $\lambda = 2$.

Построим решение, соответствующее корню $\lambda_1 = 1$. Пусть $h_1 = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ — соответствующий ему собственный вектор. Исходя из определения он является решением системы линейных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda_1 E)h_1 = 0.$$

Записывая её подробно, находим

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = -\alpha_2.$$

Как и следовало ожидать, собственный вектор определяется не однозначно. Достаточно выбрать один из них. Положим, например, $\alpha_2 = 1$. Тогда $h_1 = (-1, 1)^T$. Найденному собственному вектору соответствует решение

$$r_1 = e^{\lambda_1 t} h_1 = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично поступим со вторым собственным числом $\lambda_2 = 2$. Пусть $h_2 = (\beta_1, \beta_2)^T$ — собственный вектор. Тогда $(A - \lambda_2 E)h_2 = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta_1 = -\frac{2}{3}\beta_2.$$

Пусть $\beta_2 = 3$. Тогда $h_2 = (-2, 3)^T$. Соответствующее решение

$$r = e^{\lambda_2 t} h_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение исходной системы

$$r = C_1 r_1 + C_2 r_2 = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Собственные числа могут оказаться комплексными (с ненулевой мнимой частью). Фундаментальная система в этом случае находится так же, однако, входящие в неё функции будут комплекснозначными. В некоторых ситуациях удобнее иметь вещественный базис.

В случае вещественной матрицы системы комплексные собственные числа разбиваются на пары комплексно-сопряжённых. Это же верно и для собственных векторов. Тогда и решения из фундаментальной системы, построенной указанным выше способом, образуют пары комплексно-сопряжённых вектор-функций. То есть, если $\lambda = a + ib$ — собственное число вещественной матрицы A, h_1 — соответствующий ему собственный вектор, то

$$r_1 = e^{\lambda t} h_1, \quad r_2 = \overline{r}_1 = e^{\overline{\lambda} t} \overline{h}_1$$

— решения системы $\dot{r} = Ar$.

Можно доказать, что если в фундаментальной системе решений заменить пару функций r_1, r_2 на пару $\operatorname{Re} r_1$, $\operatorname{Im} r_1$, то снова получится фундаментальная система.

Пример 7.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

Решение. Собственные числа матрицы системы: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Пусть числу $\lambda_1 = 2 + i$ соответствует собственный вектор $h_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = i\alpha_2.$$

Положим $\alpha_2 = 1$, тогда $h_1 = (i, 1)^T$. Соответствующее решение

$$r_1 = e^{\lambda_1 t} h_1 = e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нет необходимости таким же образом искать второй собственный вектор. Матрица коэффициентов системы вещественна, значит, второе решение

$$r_2 = \overline{r}_1 = e^{(2-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение

$$r = C_1 r_1 + C_2 r_2 = C_1 e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(2-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем решение вторым способом, используя вещественный базис. Векторы r_1 и r_2 комплексно-сопряжены. Поэтому можно заменить их на вещественную и мнимую часть r_1. Имеем

$$r_1 = e^{2t}(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} i \cos t - \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} r_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} r_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение можно записать так:

$$r = A_1 \operatorname{Re} r_1 + A_2 \operatorname{Im} r_1 = A_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + A_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}. \qquad \square$$

§7.4. Метод Эйлера. Случай кратных собственных чисел

Ситуация усложняется, если матрица системы $\dot{r} = Ar$ имеет кратные собственные числа. Пусть, например, число λ — корень кратности m характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Можно показать, что в этом случае найдётся m линейно независимых решений вида:

$$r = e^{\lambda t} Q_{m-1}(t),$$

где

$$Q_{m-1}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k,$$

$\{a_k\}_{k=1}^{m-1}$ — векторы, коэффициенты, которых заранее неизвестны. Они определятся при помощи подстановки r в уравнение.

Пример 7.4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = x + y - z. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$.

Корень λ_1 простой, поэтому соответствующее решение находится так же, как и в предыдущих примерах. Пусть $h_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ — собственный вектор, тогда

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3.$$

При $\alpha_3 = 1$ получаем $h_1 = (1, 1, 1)^T$. Соответствующее решение $r_1 = e^t (1, 1, 1)^T$.

Рассмотрим кратный корень $\lambda_{2,3} = -2$. Согласно приведённой выше схеме, нужно искать решения, имеющие вид

$$r_{2,3} = e^{\lambda_{2,3} t} Q_1(t) = e^{-2t}(at + b),$$

где $a = (a_1, a_2, a_3)^T$, $b = (b_1, b_2, b_3)^T$. Пусть A — матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя $r_{2,3}$ в исходную систему $\dot{r} = Pr$, находим

$$-2e^{-2t}(at+b) + e^{-2t}a = e^{-2t}A(at+b).$$

Группируя подобные слагаемые и сокращая на e^{-2t}, получаем

$$-2at + a - 2b = Aat + Ab.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, приходим к системе

$$\begin{cases} -2a = Aa, \\ a - 2b = Ab. \end{cases}$$

Записывая её покоординатно, получаем систему линейных уравнений для искомых коэффициентов

$$\begin{cases} -2a_1 = -a_1 + a_2 + a_3, \\ -2a_2 = a_1 - a_2 + a_3, \\ -2a_3 = a_1 + a_2 - a_3, \\ a_1 - 2b_1 = -b_1 + b_2 + b_3, \\ a_2 - 2b_2 = b_1 - b_2 + b_3, \\ a_3 - 2b_3 = b_1 + b_2 - b_3. \end{cases}$$

Решая её, найдём $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $b_3 = -(b_1 + b_2)$. Тогда

$$r_{2,3} = e^{-2t}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_1 - b_2 \end{pmatrix}$$

Здесь два параметра, b_1 и b_2. Это согласуется с тем, что кратность собственного числа равна двум. Выделим два линейно независимых решения. Для этого сначала положим $b_1 = 1$, $b_2 = 0$: $r_2 = e^{-2t}(1, 0, -1)^T$. Затем $b_1 = 0$, $b_2 = 1$: $r_3 = e^{-2t}(0, 1, -1)^T$.

Тогда общее решение — произвольная линейная комбинация найденных векторов r_1, r_2 и r_3:

$$r = C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

§7.5. Метод вариации постоянных

Установим структуру общего решения неоднородной линейной системы. Ситуация здесь, опять же, аналогична случаю линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы – это сумма общего решения соответствующей однородной системы и частного решения исходной неоднородной.

Теорема 7.5 (общее решение линейной неоднородной системы). *Пусть Φ — фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$, $\widetilde{r}$ — решение системы*

$$\dot{r} = P(t)r + q(t). \tag{7.5}$$

Тогда общее решение системы (7.5) имеет вид

$$r = \Phi C + \widetilde{r}.$$

Доказательство. Пусть r — произвольное решение уравнения (7.5). Тогда

$$\dot{r} \equiv P(t)r + q(t).$$

По условию теоремы

$$\dot{\widetilde{r}} \equiv P(t)\widetilde{r} + q(t).$$

Вычитая второе тождество из первого, получаем, что $r - \widetilde{r}$ — решение соответствующего однородного уравнения. Следовательно, найдётся такой столбец коэффициентов C, что

$$r - \widetilde{r} = \Phi C.$$

Верно и обратное: взяв произвольный столбец C, подстановкой убедимся, что формула $r = \Phi C + \widetilde{r}$ даёт решение. Таким образом, данная формула описывает вообще все решения. □

Если известна фундаментальная матрица соответствующей однородной системы, то общее решение неоднородной системы может быть найдено ***методом вариации постоянных***: если Φ — фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$, то общее решение системы $\dot{r} = P(t)r + q$ имеет вид

$$r = \Phi C(t),$$

где C — столбец функций, удовлетворяющий уравнению

$$\Phi \dot{C} = q$$

(которое получается при подстановке $\Phi C(t)$ в исходную систему). Данный способ нахождения решений является непосредственным обобщением метода вариации постоянных для линейного уравнения первого порядка.

Пример 7.5. При $t \in (0, \pi)$ найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{\sin t}. \end{cases}$$

Решение. Соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

можно решить методом исключения. Её решение: $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Тогда фундаментальная матрица

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Решение неоднородной системы ищем в виде $r = \Phi C(t)$, где столбец C удовлетворяет уравнению $\Phi \dot{C} = q$. Записывая его покоординатно, имеем

$$\begin{cases} \dot{C}_1 \cos t + \dot{C}_2 \sin t = 0, \\ -\dot{C}_1 \sin t + \dot{C}_2 \cos t = \frac{1}{\sin t}. \end{cases}$$

Отсюда $\dot{C}_1 = -1$, $\dot{C}_2 = \operatorname{ctg} t$. Интегрируя, получаем

$$C_1 = -t + A_1, \quad C_2 = \ln \sin t + A_2.$$

Следовательно, общее решение исходной системы

$$\begin{aligned} r = \Phi C(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t + A_1 \\ \ln \sin t + A_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 \cos t + A_2 \sin t + \sin t \cdot \ln \sin t - t \cos t \\ -A_1 \sin t + A_2 \cos t + \cos t \cdot \ln \sin t + t \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Глава 8

Теория устойчивости

§8.1. Устойчивость по Ляпунову

Во многих задачах важно знать не одно конкретное решение дифференциального уравнения, отвечающее начальным условиям, а характер поведения решения при изменении начальных условий и при изменении аргумента. Этими вопросами занимается качественная теория дифференциальных уравнений, одним из основных разделов которой является теория устойчивости решений.

Рассмотрим сначала простое уравнение

$$\dot{x} = \lambda x.$$

Его общее решение имеет вид $x = x_0 e^{\lambda t}$, где $x_0 = x(0)$. При любом значении параметра λ уравнение имеет решение $x \equiv 0$. Ему соответствует точка покоя в начале координат на фазовой прямой — оси Ox. Проследим, как ведут себя другие решения с близкими начальными условиями в зависимости от λ (рис. 8.1).

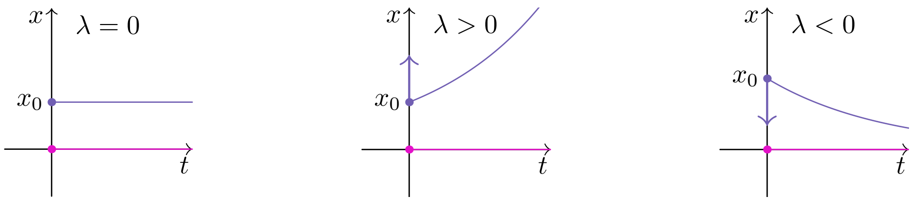


Рис. 8.1. Решения уравнения $\dot{x} = \lambda x$

Если $\lambda = 0$, то любое решение — это константа, равная начальному значению. Таким образом, вся фазовая прямая состоит из точек покоя. В этом случае говорят, что решение, тождественно равное нулю, устойчиво. Другими словами, если немного изменить начальное значение, то решение сильно не изменится.

Если $\lambda > 0$, то при $x_0 > 0$ решение неограниченно возрастает. Значит, точка на фазовой прямой удаляется от точки покоя, уходя в бесконечность. Аналогично поведение решения и при $x_0 < 0$. Говорят, что нулевое решение неустойчиво, поскольку даже очень незначительное отклонение от нуля в начальный момент времени влечёт за собой большое отклонение в будущем.

При $\lambda < 0$ решение монотонно стремится к нулю. Соответствующая фазовая точка стремится к положению равновесия. В этом случае решение не просто устойчиво, а асимптотически устойчиво: если отойти от нуля, то фазовая точка не просто останется вблизи точки покоя, а будет притягиваться к ней.

Начальные данные для уравнения или системы уравнений обычно являются результатами каких-то измерений. Следовательно, они известны не точно, а с некоторой погрешностью. Если сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то найденное решение не может считаться удовлетворительным в смысле описания явления. Поэтому важно знать условия, при которых малое изменение начальных данных влечёт малое изменение решения.

Перейдём к формальным определениям. В дальнейшем используется обозначение: $r(t, t_0, r_0)$ — решение, которое в точке t_0 принимает значение r_0.

Положение равновесия $r = 0$ автономной системы $\dot{r} = f(r)$ называется ***устойчивым*** (или ***устойчивым по Ляпунову***), если для любой ε-окрестности нуля найдётся такая δ-окрестность нуля, что любое решение, выходящее из этой δ-окрестности, во все будущие моменты времени отличается от нуля менее, чем на ε (рис. 8.2). То есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \colon |r_0| < \delta \Rightarrow \forall t \geqslant 0\ |r(t, 0, r_0)| < \varepsilon.$$

В противном случае положение равновесия называется неустойчивым.

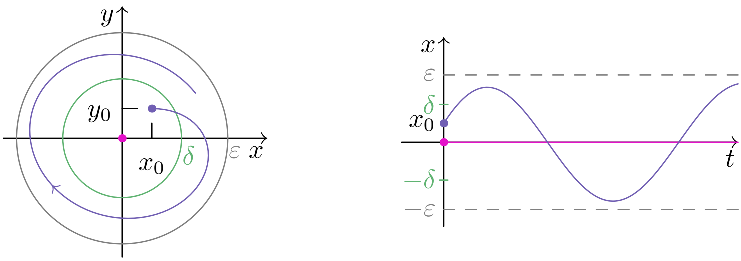


Рис. 8.2. Устойчивое положение равновесия

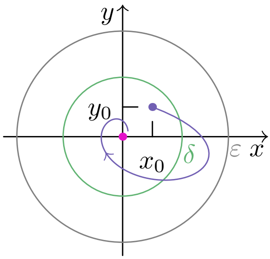
Например, нулевое решение уравнения $\dot{x} = -2x$ согласно данному определению устойчиво. Действительно, зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon$, U_δ — δ-окрестность нуля. Тогда для любого начального значения $x_0 \in U_\delta$ имеем решение $x(t, 0, x_0) = x_0 e^{-2t}$. Оно определено при всех $t \geqslant 0$, и при этом

$$|x(t, 0, x_0)| = |x_0 e^{-2t}| \leqslant |x_0| < \varepsilon.$$

Положение равновесия $r = 0$ системы $\dot{r} = f(r)$ называется ***асимптотически устойчивым*** (рис. 8.3), если

- $r = 0$ устойчиво;
- все решения, начинающиеся в некоторой окрестности нуля, в будущем стремятся к нулю, то есть

$$\exists \delta > 0 \colon |r_0| < \delta \Rightarrow r(t, 0, r_0) \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$



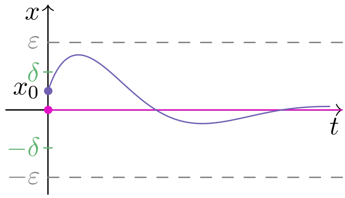


Рис. 8.3. Асимптотически устойчивое положение равновесия

Нулевое решение уравнения $\dot{x} = -2x$ не просто устойчиво, а асимптотически устойчиво. При этом в качестве δ, участвующего в определении асимптотической устойчивости, можно выбрать вообще любое число.

Понятие устойчивости нулевого положения равновесия при помощи замены системы координат переносится на произвольное положение равновесия и произвольный начальный момент времени. Однако, значение начального момента времени несущественно для автономных систем, поскольку для любого решения автономной системы верно $r(t+t_0, t_0, r_0) = r(t, 0, r_0)$ (сдвиг по оси времени переводит интегральную кривую в интегральную кривую). Можно, кроме того, определить устойчивость не только положения равновесия, но и других решений. Общее определение таково.

Решение φ на $[t_0, +\infty)$ системы $\dot{r} = f(t, r)$ называется ***устойчивым*** (по Ляпунову), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такая δ-окрестность значения $\varphi(t_0)$, что любое решение, выходящее из этой δ-окрестности при $t = t_0$, во все будущие моменты времени отличается от φ менее, чем на ε (рис. 8.4). То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \colon |r_0 - \varphi(t_0)| < \delta \Rightarrow \forall t \in [t_0, +\infty) \; |r(t, t_0, r_0) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

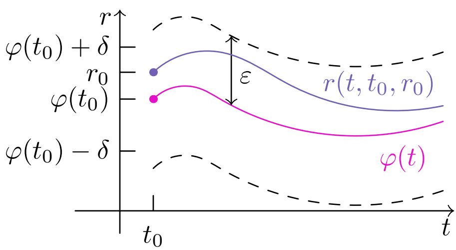


Рис. 8.4. Устойчивое решение

Таким образом, решение φ устойчиво, если близкие к нему по начальным условиям решения остаются близкими и в будущем.

Если решение φ устойчиво и $r(t, t_0, r_0) - \varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех r_0 из некоторой окрестности $\varphi(t_0)$, то решение φ ***асимптотически устойчиво***.

Исследование устойчивости решения φ всегда можно свести к исследованию нулевого положения равновесия другой системы.

Лемма 8.1. *Пусть φ — решение системы $\dot{r} = f(t, r)$. Тогда φ устойчиво (асимптотически устойчиво), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) решение $s = 0$ системы*

$$\dot{s} = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi).$$

Доказательство. Положим $s = r - \varphi$. Пусть $\dot{r} = f(t, r)$, тогда

$$\dot{s} = \dot{r} - \dot{\varphi} = f(t, r) - f(t, \varphi) = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi).$$

Получаем, что $s = 0$ — положение равновесия системы $\dot{s} = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi)$. Остаётся сопоставить определение устойчивости (асимптотической устойчивости) для решения φ исходной и решения $s = 0$ новой системы. $\square$

Следствие 8.1. *Решение φ линейной системы*

$$\dot{r} = P(t)r + q(t)$$

устойчиво (асимптотически устойчиво), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) решение $r = 0$ соответствующей линейной однородной системы

$$\dot{r} = P(t)r.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что все решения линейной системы имеют одинаковый характер устойчивости, поэтому можно говорить об *устойчивости линейной системы.*

В случае, когда известно общее решение в элементарных функциях, вопрос об устойчивости можно разрешить непосредственной проверкой определения. Однако, найти явные выражения для решений удаётся далеко не всегда. Поэтому возникает необходимость построения общей теории, которая позволяла бы судить об устойчивости решения только по аналитической структуре правой части системы.

§8.2. Устойчивость линейной системы с постоянными коэффициентами

В параграфе 8.1 было рассмотрено поведение решений вблизи положения равновесия для линейного уравнения $\dot{x} = \lambda x$. Подобное описание можно сделать и для линейной системы любого порядка с постоянными коэффициентами.

Теорема 8.1. *Нулевое решение системы*

$$\dot{r} = Ar$$

- *асимптотически устойчиво, если* $\operatorname{Re}\lambda < 0$ *для всех собственных чисел* λ *матрицы* A*;*
- *неустойчиво, если* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *для некоторого собственного числа* λ *матрицы* A*;*
- *устойчиво (не асимптотически), если* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *для некоторых собственных чисел* λ *кратности* 1 *матрицы* A*, и* $\operatorname{Re}\lambda < 0$ *для остальных собственных чисел (если они есть).*

Исследуем более подробно поведение траекторий в окрестности точки покоя линейной однородной системы *2-го порядка* с постоянными коэффициентами.

Точки покоя — это корни уравнения $Ar = 0$. Пусть $\det A \neq 0$. Тогда начало координат — единственное положение равновесия. Разберём только этот случай.

Здесь имеется три возможности.

I. Собственные числа λ_1, λ_2 вещественны и различны. Тогда, как известно, им соответствуют линейно независимые собственные векторы h_1 и h_2, образующие базис на плоскости. Перейдём к новой системе координат u и v, связанной с собственным базисом. Пусть $r = (x, y)^T$ — вектор старых, а $s = (u, v)^T$ — вектор новых координат. Тогда

$$r = Ts, \quad T = (h_1, h_2).$$

Подставляя в систему Ts вместо r, находим

$$T\dot{s} = ATs.$$

Умножая слева на T^{-1}, получаем

$$\dot{s} = T^{-1}ATs.$$

Так как

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

то в новых координатах система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u, \\ \dot{v} = \lambda_2 v. \end{cases}$$

Её решение: $u = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $v = C_2 e^{\lambda_2 t}$.

Если одна, и только одна из констант C_1 и C_2 равна нулю, то получаем параметрическое задание одной из полуосей. Заметим ещё, что при замене знака у одной из констант снова получаем интегральную кривую. Таким образом, достаточно изучить фазовый портрет только в первой четверти. Фазовые траектории в остальных четвертях расположены симметрично.

Пусть $C_1 > 0$, $C_2 > 0$. Выражая t через u и подставляя в выражение для v, находим

$$v = C_2 \left(\frac{u}{C_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1} = C u^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Если $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, получаем семейство парабол. Из самого вида функций u и v ясно, что они возрастают при $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, фазовые траектории расходятся от начала координат. Отражая траектории относительно координатных осей, получаем фазовый портрет во всей плоскости (рис. 8.5). Такая точка покоя называется ***неустойчивый узел***.

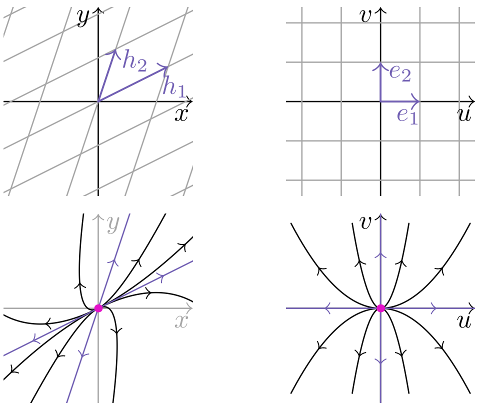


Рис. 8.5. Неустойчивый узел в старой и новой системе координат

При возвращении к прежней системе координат фазовый портрет исказится, однако качественное поведение траекторий не изменится. Это замечание относится и ко всем последующим случаям.

Если $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, то уравнение фазовых траекторий не меняется, но меняется направление движения. Теперь фазовые точки стремятся к началу координат. Соответствующее положение равновесия устойчиво и называется ***устойчивым узлом*** (рис. 8.6).

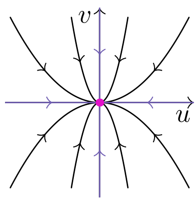


Рис. 8.6. Устойчивый узел

Если $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, то $v = C u^{\lambda_2/\lambda_1}$ — уравнение гиперболы. Исходя из соотношений $u = C_1 e^{\lambda_1 t} \to 0$, $v = C_2 e^{\lambda_2 t} \to \infty$ при $t \to \infty$, получаем направление движения вдоль фазовых траекторий. Положение равновесия в начале координат неустойчиво и называется ***седло*** (рис. 8.7). Асимптоты фазовых траекторий

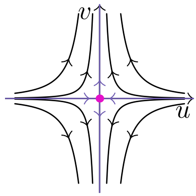


Рис. 8.7. Седло

называют ***сепаратрисами седла***. В старой системе координат сепаратрисы проходят вдоль собственных векторов матрицы коэффициентов.

II. Рассмотрим случай кратного вещественного собственного числа λ. Здесь возможны два подслучая.

Матрица коэффициентов может иметь два линейно независимых собственных вектора. Этот случай реализуется лишь тогда, когда матрица коэффициентов диагональна с одинаковыми числами по диагонали. То есть исходная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x, \\ \dot{y} = \lambda y. \end{cases}$$

Даже не производя замены системы координат, легко получить, что фазовые траектории имеют уравнения $y = Cx$ и $x = 0$. То есть это лучи, входящие в начало координат при $\lambda < 0$, и выходящие из него, если $\lambda > 0$. Соответствующая точка покоя называется устойчивым или неустойчивым ***дикритическим узлом*** (рис. 8.8).

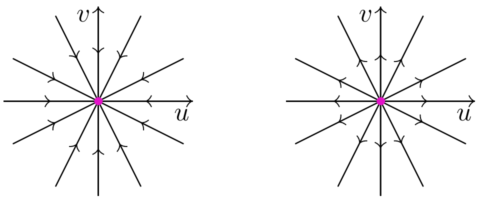


Рис. 8.8. Устойчивый и неустойчивый дикритический узел

Возможен случай, когда найдётся только один линейно независимый собственный вектор. Не вдаваясь в общий анализ этой ситуации, приведём лишь один характерный пример.

Пример 8.1. Матрица системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

имеет собственное число $\lambda = 1$ кратности 2. Уравнение на собственные векторы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} h = 0$$

имеет одномерное пространство решений $h = C(0, 1)^T$.

Чтобы выяснить поведение фазовых траекторий, запишем производные в виде отношения дифференциалов:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Далее исключим dt:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x + y}.$$

Умножая на знаменатели, приходим к уравнению

$$(x + y)\,dx - x\,dy = 0,$$

интегральные кривые которого содержат в себе фазовые траектории системы. Заметим, что это уравнение не изменится при одновременной замене знака у переменных x и y, поэтому интегральные кривые симметричны относительно начала координат.

Кроме того, заметим, что уравнение однородное. Тогда при помощи стандартной замены $z = y/x$ найдём решения в полуплоскости, где $x > 0$:

$$y = x(\ln x + C).$$

Прямая $x = 0$ также будет решением. Вычисляя фазовую скорость в какой-нибудь точке, убеждаемся, что фазовые траектории расходятся от начала координат, что согласуется с положительностью собственного числа. Точка покоя в начале координат — ***неустойчивый вырожденный узел*** (рис. 8.9).

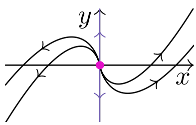


Рис. 8.9. Неустойчивый вырожденный узел

Если бы собственное число было отрицательным, получился бы вырожденный *устойчивый* узел. В случае вырожденного узла, в отличие от обычного, вообще все фазовые траектории касаются некоторой (одной и той же) прямой в начале координат.

III. Рассмотрим, наконец, случай двух различных комплексных собственных чисел λ_1, λ_2. Поскольку рассматривается система с вещественными коэффициентами, то собственные числа комплексно-сопряжёны.

Пусть $\lambda_1 = \lambda$, h — соответствующий собственный вектор. Тогда $\operatorname{Re} h$, $\operatorname{Im} h$ — базис на плоскости. Поскольку

$$\operatorname{Re} h = \frac{h + \overline{h}}{2}, \quad \operatorname{Im} h = \frac{h - \overline{h}}{2i} = \frac{-ih + i\overline{h}}{2},$$

то матрица перехода T к базису $\operatorname{Re} h$, $\operatorname{Im} h$ представима в виде

$$T = (\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h) = \frac{1}{2}(h, \overline{h}) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Пусть $H = (h, \overline{h})$ — матрица перехода к собственному базису. Подставляя $r = Ts$ в уравнение $\dot{r} = Ar$, находим

$$\frac{1}{2} H \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \dot{s} = A \frac{1}{2} H \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Сокращая на множитель $1/2$ и умножая слева на H^{-1}, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \dot{s} = H^{-1} A H \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} s. \tag{8.1}$$

Заметим, что

$$H^{-1} A H = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Записывая векторное уравнение (8.1) в координатах, имеем

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = \lambda(u - iv), \\ \dot{u} + i\dot{v} = \overline{\lambda}(u + iv). \end{cases}$$

Уравнения этой системы равносильны: одно получается из другого при комплексном сопряжении. Поэтому достаточно рассмотреть только одно из них. Плоскость координат u и v можно интерпретировать как комплексную плоскость. Положим $z = u + iv$. Тогда второе уравнение принимает вид

$$\dot{z} = \overline{\lambda} z.$$

Его решение: $z = Ce^{\overline{\lambda} t}$.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $C = ae^{i\varphi}$. Тогда

$$z = ae^{\alpha t} e^{i(\varphi - \beta t)}.$$

При $\alpha = 0$ получаем окружности радиуса a. Соответствующая устойчивая, но не асимптотически устойчивая точка покоя называется ***центр***. Направление обхода окружностей зависит от знака β.

При $\alpha > 0$ получаем логарифмическую спираль. Модуль z возрастает, значит, точка удаляется от начала координат, при этом совершая вокруг него обороты. Данное положение равновесия называется ***неустойчивый фокус***.

При $\alpha < 0$ спираль закручивается. Точка покоя — ***устойчивый фокус***. Направление закручивания или раскручивания траекторий в случае фокуса зависит от знака $\operatorname{Im}\lambda$ (рис. 8.10).

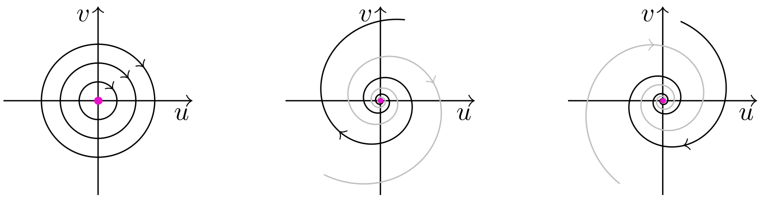


Рис. 8.10. Центр, неустойчивый и устойчивый фокус

§8.3. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим нелинейную автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y). \end{cases}$$

Пусть начало координат — положение равновесия данной системы, то есть $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$. Пусть ещё f_1 и f_2 дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности нуля. В этих предположениях разложим правые части по формуле Тейлора:

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)y + o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$
$$f_2(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0)y + o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Запишем новую систему уравнений, откинув остаточные члены:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)y, \\ \dot{y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0)y. \end{cases}$$

Эта линейная система называется ***системой первого приближения*** для исходной системы, или ***линеаризованной системой***.

Пусть $f = (f_1, f_2)^T$ — правая часть системы, f' — её матрица Якоби, то есть

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях линеаризованную систему можно записать так: $\dot{r} = f'(0)r$.

Теорема 8.2 (Ляпунов, устойчивость по первому приближению). *Пусть f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности нуля, $r = 0$ — положение равновесия системы $\dot{r} = f(r)$. Тогда*

- *решение $r = 0$ асимптотически устойчиво, если $\operatorname{Re}\lambda < 0$ для любого собственного числа матрицы $f'(0)$;*
- *решение $r = 0$ неустойчиво, если $\operatorname{Re}\lambda > 0$ для некоторого собственного числа λ матрицы $f'(0)$.*

Таким образом, при выполнении условий теоремы положение равновесия исходной системы и системы первого приближения ведут себя одинаково в смысле устойчивости. Приведённая теорема дословно переносится на системы любого порядка.

Пример 8.2. Исследуем на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

Разлагая функции $\sin y$, $\cos y$, e^x по формуле Тейлора, имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + o(\sqrt{x^2 + y^2}), \\ \dot{y} = -x - 3y + o(\sqrt{x^2 + y^2}). \end{cases}$$

Соответствующая система уравнений первого приближения:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y, \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов этой системы имеет собственные числа $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Так как $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$, положение равновесия этой, а также исходной систем согласно теореме 8.2 асимптотически устойчиво.

Отметим, что в теореме не указан случай, когда имеются собственные числа с нулевой вещественной частью (а остальные, если они есть, имеют отрицательную вещественную часть). В этом случае характер устойчивости положения равновесия исходной и линеаризованной системы может различаться.

Например, скалярное уравнение $\dot{x} = x^2$ имеет точку покоя $x = 0$. Соответствующая линеаризация $\dot{x} = 0$ — устойчивое уравнение. Решения исходного уравнения при $x > 0$ — семейство гипербол

$$x = \frac{1}{C - t}.$$

Для устойчивости все решения с достаточно близкими к нулю начальными значениями должны мало отличаться от нулевого решения во все моменты в будущем. Однако, если хоть немного отступить от нуля в положительном направлении оси x, то соответствующее решение не только не будет близким к нулевому решению в будущем. Оно даже не будет определено, начиная с некоторого момента времени (рис. 8.11). Следовательно, нулевое решение неустойчиво

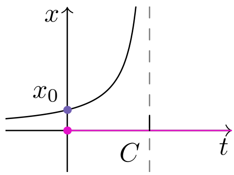


Рис. 8.11. Решение уравнения $\dot{x} = x^2$ при $x_0 > 0$

по определению.

Таким образом, в случае, когда матрица Якоби правой части нелинейной системы имеет собственные числа с нулевой вещественной частью, требуется привлекать иные методы исследования на устойчивость.

§8.4. Метод функций Ляпунова

В этом параграфе правые части всех встречающихся систем считаем непрерывно дифференцируемыми. Рассмотрим автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y), \end{cases} \tag{8.2}$$

для которой начало координат — точка покоя.

Теорема 8.3 (Ляпунов, об устойчивости, система 2-го порядка). *Пусть функция V непрерывно дифференцируема в окрестности нуля U и обладает свойствами:*

- $V(x, y) > 0$ *при* $(x, y) \in U \setminus \{(0, 0)\}$, $V(0, 0) = 0$;
- $V'_x f_1 + V'_y f_2 \leqslant 0$ *при* $(x, y) \in U$.

Тогда положение равновесия системы (8.2) устойчиво.

Функция V, определённая в условии теоремы, называется ***функцией Ляпунова***. Первое свойство позволяет говорить о ней как о расстоянии до начала координат. Конечно, она не обладает всеми свойствами расстояния. Надо понимать её как некоторое обобщённое расстояние.

В чём смысл второго свойства? Оно утверждает, что скалярное произведение градиента функции V и вектора фазовой скорости $f = (f_1, f_2)^T$ неположительно. Другими словами, угол между V' и f не острый (рис. 8.12). То есть движение

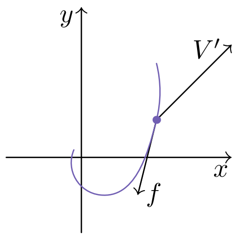


Рис. 8.12. Градиент функции Ляпунова и фазовая скорость

в данной точке направлено в сторону уменьшения или хотя бы не увеличения «расстояния» до начала координат. Это верно для любой точки в окрестности нуля, а значит, положение устойчиво — в этом смысл теоремы Ляпунова.

Скалярное произведение градиента функции V и правой части системы называют ещё ***производной функции V в силу данной системы***.

Сформулируем теорему Ляпунова, используя векторную форму записи. В таком виде теорема Ляпунова верна для системы любого порядка.

Теорема 8.4 (Ляпунов, об устойчивости). *Пусть V непрерывно дифференцируема в окрестности нуля U и обладает свойствами:*

- $V(r) > 0$ *при* $r \in U \setminus \{0\}$, $V(0) = 0$*;*
- $V' \cdot f \leqslant 0$ *при* $r \in U$*.*

Тогда положение равновесия $r = 0$ системы $\dot{r} = f(r)$ устойчиво.

Теорема 8.5 (Ляпунов, об асимптотической устойчивости). *Пусть V — функция Ляпунова системы $\dot{r} = f(r)$ и, кроме того, $V' \cdot f < 0$ при $r \in U \setminus \{0\}$. Тогда положение равновесия $r = 0$ асимптотически устойчиво.*

Применение указанных теорем носит название метода функций Ляпунова. Данный метод более универсален, чем метод исследования на устойчивость по первому приближению. Однако, его недостаток в том, что не существует общего алгоритма построения функции Ляпунова. В простейших случаях её можно искать в виде линейной комбинации чётных степеней переменных:

$$V(x, y) = ax^{2p} + by^{2q}.$$

В более общем случае рекомендуется искать функцию Ляпунова в виде квадратичной формы:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j.$$

Пример 8.3. Исследуем на устойчивость точку покоя $x = y = 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^5, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

По соответствующей системе первого приближения об устойчивости точки покоя ничего сказать нельзя, поскольку собственные числа её матрицы коэффициентов чисто мнимые.

Попробуем подобрать функцию Ляпунова в виде $V(x, y) = ax^2 + by^2$. Производная V в силу данной системы:

$$\begin{aligned} V' \cdot f &= (2ax, 2by) \cdot \begin{pmatrix} -y - x^5 \\ x - y^3 \end{pmatrix} = 2ax(-y - x^5) + 2by(x - y^3) \\ &= -2ax^6 - 2axy + 2bxy - 2by^4. \end{aligned}$$

Заметим, что второе и третье слагаемое сократятся, если взять a и b равными. Оставшееся выражение при этом будет определённого знака.

Пусть $a = b = 1$. Тогда, во-первых, $V(x, y) > 0$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ и $V(0, 0) = 0$. Во-вторых, производная в силу системы

$$V' \cdot f = -2(x^6 + y^4) < 0$$

всюду, за исключением начала координат. Тем самым, функция V обладает свойствами из теоремы 8.5. Следовательно, положение равновесия асимптотически устойчиво.

Список литературы

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М. : МЦНМО, 2014.
2. *Краснов М. Л.*, *Киселёв А. И.*, *Макаренко Г. И.*, *Шикин Е. В.*, *Заляпин В. И.*, *Соболев С. К.* Вся высшая математика. Том 3. — М. : Едиториал УРСС, 2001.
3. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — 4-е изд. — Минск : Вышэйш. школа, 1974.
4. *Матвеев Н. М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — СПб. : Специальная Литература, 1996.
5. *Романко В. К.*, *Агаханов Н. Х.*, *Власов В. В.*, *Коваленко Л. И.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / под ред. В. К. Романко. — 5-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.