

# Дифференциальные уравнения

Доценников Никита

2025-12-26

## Содержание

|          |                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Определения</b>                                    | <b>2</b>  |
| 1.1      | Дифференциальное уравнение                            | 2         |
| 1.2      | Решение дифференциального уравнения, общее решение    | 3         |
| 1.3      | Задача Коши                                           | 3         |
| 1.4      | Уравнение с разделяющимися переменными                | 3         |
| 1.5      | Однородная функция                                    | 4         |
| 1.6      | Однородное ДУ первого порядка                         | 4         |
| 1.7      | Линейное ДУ первого порядка                           | 5         |
| 1.8      | Уравнение Бернулли                                    | 5         |
| 1.9      | Уравнение в полных дифференциалах                     | 5         |
| 1.10     | Особое решение ДУ                                     | 6         |
| 1.11     | ДУ высшего порядка, задача Коши для него              | 7         |
| 1.12     | Линейное ДУ $n$ -го порядка. Однородное, неоднородное | 7         |
| 1.13     | Линейная независимость функций                        | 8         |
| 1.14     | Определитель Вронского                                | 8         |
| 1.15     | Фундаментальная система решений                       | 8         |
| 1.16     | Характеристический многочлен                          | 9         |
| 1.17     | Система ДУ, решение системы                           | 9         |
| 1.18     | Линейная однородная и неоднородная система ДУ         | 10        |
| 1.19     | Функция оригинал                                      | 10        |
| 1.20     | Преобразование Лапласа                                | 10        |
| <b>2</b> | <b>Теоремы</b>                                        | <b>12</b> |
| 2.1      | О существовании решения ДУ                            | 12        |
| 2.2      | Решение однородного дифференциального уравнения       | 12        |
| 2.3      | О решении линейного однородного уравнения             | 12        |
| 2.4      | Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной)     | 12        |
| 2.5      | Метод Бернулли                                        | 13        |
| 2.6      | О полном дифференциале                                | 13        |
| 2.7      | Об интегрирующем множителе                            | 13        |
| 2.8      | О существовании решения ДУ высших порядков            | 14        |

|      |                                                                                          |    |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.9  | Замены для уравнений, допускающих понижение порядка                                      | 14 |
| 2.10 | Свойства решений линейного однородного ДУ                                                | 14 |
| 2.11 | Необходимое условие линейной зависимости решений                                         | 14 |
| 2.12 | Достаточное условие линейной зависимости решений                                         | 14 |
| 2.13 | О базисе пространства решений                                                            | 14 |
| 2.14 | Общее решение линейного неоднородного ДУ                                                 | 14 |
| 2.15 | Принцип суперпозиции                                                                     | 15 |
| 2.16 | Метод вариации произвольных постоянных                                                   | 15 |
| 2.17 | О ФСР для различных вещественных корней характеристического многочлена                   | 15 |
| 2.18 | О ФСР для кратных вещественных корней характеристического многочлена                     | 15 |
| 2.19 | Линейное однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами                      | 15 |
| 2.20 | Метод неопределенных коэффициентов                                                       | 15 |
| 2.21 | Метод исключения для решения системы ДУ                                                  | 15 |
| 2.22 | Метод Эйлера для решения однородных линейных систем ДУ при простых<br>собственных числах | 16 |
| 2.23 | Метод Эйлера для решения однородных линейных систем ДУ при кратных<br>собственных числах | 16 |
| 2.24 | Общее решение линейной неоднородной системы ДУ                                           | 16 |
| 2.25 | Свойства преобразования Лапласа                                                          | 16 |
| 2.26 | О дифференцировании изображения                                                          | 16 |
| 2.27 | О дифференцировании оригинала                                                            | 16 |
| 2.28 | Об интегрировании оригинала                                                              | 16 |
| 2.29 | Преобразования Лапласа простейших функций                                                | 17 |

## I Определения

### Definition 1.1

#### 1.1 Дифференциальное уравнение

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называют уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.1)$$

ИЛИ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y = y(x)$  и её производные  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ .

**Definition 1.2****1.2 Решение дифференциального уравнения, общее решение**

Функция  $\varphi$  - решение уравнения, если

$$\begin{aligned}\varphi &\in C^1(a, b); \\ F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) &\equiv 0 \text{ на } (a, b)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Другими словами, решением уравнения называют гладкую функцию  $\varphi$ , определённую на интервале  $(a, b)$ , подстановка которой вместо  $y$  обращает уравнение в тождество на  $(a, b)$ .

Общим решением уравнения называют множество всех его решений.

ИЛИ

Функция  $y = \varphi(x)$  является решением дифференциального уравнения, если её подстановка в уравнение обращает его в тождество.

**Definition 1.3****1.3 Задача Коши**

Задачей Коши или начальной задачей для нормального уравнения

$$y' = f(x, y)\tag{1.3}$$

называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальному условию

$$y(x_0) = y_0.\tag{1.4}$$

Пара чисел  $(x_0, y_0)$  при этом называется начальными данными.

**Definition 1.4****1.4 Уравнение с разделяющимися переменными**

Уравнение в дифференциалах вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0\tag{1.5}$$

называют уравнением с разделёнными переменными.

Такое название мотивировано тем, что каждое его слагаемое зависит только от одной переменной.

Уравнение вида

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0 \quad (1.6)$$

называют уравнением с разделяющимися переменными.

ИЛИ

Если уравнение  $\Phi(x, y, y') = 0$  с помощью алгебраических преобразований удастся привести к виду

$$y' = g(x) \cdot h(y) \quad (1.7)$$

или

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, \quad (1.8)$$

то оно называется уравнением с разделяющимися переменными.

### Definition 1.5

## 1.5 Однородная функция

Функция  $F(x, y)$  называется однородной функцией степени  $\alpha$ , если при всех допустимых  $t, x$  и  $y$  верно равенство

$$F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y). \quad (1.9)$$

Пример однородных функций:  $x + y + z$  (первой степени),  $x^2 + 3xy + y^2$  (второй степени),  $\frac{y}{x} \cos \frac{x}{y}$  (нулевой степени),  $\frac{\sqrt{x+y}}{x^2+y^2}$  (степени  $-\frac{3}{2}$ ).

### Definition 1.6

## 1.6 Однородное ДУ первого порядка

Пусть  $P$  и  $Q$  - однородные функции одинаковой степени. Тогда уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1.10)$$

называется однородным уравнением.

ИЛИ

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно привести к виду:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.11)$$

**Definition 1.7****1.7 Линейное ДУ первого порядка**

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x), \quad (1.12)$$

называется линейным уравнением первого порядка.

Название линейное мотивировано тем, что оно составлено из многочленов первой степени по отношению к символам  $y$  и  $y'$ .

ИЛИ

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1.13)$$

где  $p(x), q(x)$  – заданные функции.

**Definition 1.8****1.8 Уравнение Бернулли**

Уравнением Бернулли называют уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad (1.14)$$

где  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

Разделив данное уравнение на  $y^\alpha$ , находим

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x). \quad (1.15)$$

Отсюда видно, что замена  $z = y^{1-\alpha}$  сводит уравнение к линейному.

ИЛИ

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^a, \quad \text{где } a = \text{const}, a \neq 0, a \neq 1 \quad (1.16)$$

**Definition 1.9****1.9 Уравнение в полных дифференциалах**

Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1.17)$$

называют уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция  $u$ , что

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (1.18)$$

то есть  $u'_x = P, u'_y = Q$ .

ИЛИ

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.19)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции  $u(x, y)$ :

$$Mdx + Ndy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \quad (1.20)$$

Условие того, что  $Mdx + Ndy$  представляет собой полный дифференциал:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (1.21)$$

### Definition 1.10

#### 1.10 Особое решение ДУ

Решение  $y = \varphi(x)$  дифференциального уравнения

$$\Phi(x, y, y') = 0 \quad (1.22)$$

называется особым, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, то есть если через каждую его точку  $(x_0, y_0)$  кроме этого решения проходит и другое решение, имеющее в точке  $(x_0, y_0)$  ту же касательную, что и решение  $y = \varphi(x)$ , но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности  $(x_0, y_0)$ . График особого решения будем называть особой интегральной кривой уравнения.

ИЛИ

Решение  $\varphi$  на  $(a, b)$  уравнения  $y' = f(x, y)$  называется особым, если для любой точки  $x_0 \in (a, b)$  найдется решение  $\psi$  того же уравнения, такое что

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) \quad (1.23)$$

при этом  $\varphi \equiv \psi$  в любой сколь угодно малой окрестности точки  $x_0$ .

Более кратко это выражают словами: интегральная кривая уравнения  $y' = f(x, y)$  является особой, если в каждой её точке нарушается единственность решения задачи Коши.

**Definition 1.11****1.11 ДУ высшего порядка, задача Коши для него**

Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называют уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.24)$$

Функция  $\varphi$  – решение уравнения на  $(a, b)$ , если

$$\begin{aligned} \varphi &\in C^n(a, b); \\ F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) &\equiv 0 \text{ на } (a, b). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Каноническим уравнением будем называть уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.26)$$

разрешённое относительно старшей производной.

Задачей Коши для канонического уравнения называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.27)$$

Набор чисел  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  при этом называют начальными данными.

ИЛИ

Обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка имеет вид

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.28)$$

или в решенном относительно старшей производной  $y^{(n)}$ , вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.29)$$

Всякая функция  $y(x)$ , имеющая непрерывные производные вплоть до  $n$ -го порядка и удовлетворяющая уравнению, называется решением этого уравнения, а сама задача нахождения решений дифференциального уравнения называется задачей интегрирования дифференциального уравнения.

**Definition 1.12****1.12 Линейное ДУ  $n$ -го порядка. Однородное, неоднородное**

Линейным дифференциальным уравнением порядка  $n$  называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = q(t), \quad (1.30)$$

где  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q \in C(a, b)$ .

Если  $q \equiv 0$  на  $(a, b)$ , то уравнение, то есть

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0, \quad (1.31)$$

называется однородным, в противном случае – неоднородным.

ИЛИ

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (1.32)$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка.

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1.33)$$

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка.

### Definition 1.13

## 1.13 Линейная независимость функций

### Definition 1.14

## 1.14 Определитель Вронского

Определителем Вронского (или вронскианом) функций  $y_1, y_2, \dots, y_n \in C^{(n-1)}(a, b)$  называют

$$W(t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \quad (1.34)$$

### Definition 1.15

## 1.15 Фундаментальная система решений

Фундаментальной системой решений системы уравнений называется совокупность её  $n$  линейно независимых решений.

ИЛИ



Любой набор из  $n$  линейно независимых решений  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  уравнения  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$  называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

### Definition 1.16

#### 1.16 Характеристический многочлен

Многочлен

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (1.35)$$

называется характеристическим многочленом уравнения  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t)$ , а его корни – характеристическими числами того же уравнения.

### Definition 1.17

#### 1.17 Система ДУ, решение системы

Система дифференциальных уравнений – это набор дифференциальных уравнений, решаемых совместно. Решение системы – это набор функций, который удовлетворяет всем уравнениям системы. Такая форма записи системы называется нормальной формой Коши:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1.36)$$

Решением системы называется совокупность  $n$  функций

$$y_i = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.37)$$

таких, что при подстановке их в уравнения системы эти уравнения обращаются в тождества относительно  $x$ . При этом функции  $\psi_i(x)$  предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

ИЛИ

Нормальной системой дифференциальных уравнений порядка  $n$  называется система уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.38)$$

Если ввести в рассмотрение векторы

$$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t, r) = \begin{pmatrix} f_1(t, r) \\ \dots \\ f_n(t, r) \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

то систему можно компактно записать в виде одного  $n$ -мерного уравнения

$$\dot{r} = f(t, r). \quad (1.40)$$

Вектор-функция  $\varphi$  - решение системы на  $(a, b)$ , если

$$\begin{aligned} \varphi &\in C^1((a, b) \rightarrow \mathbb{R}_n); \\ \dot{\varphi}(t) &\equiv f(t, \varphi(t)) \quad \text{на } (a, b). \end{aligned} \quad (1.41)$$

### Definition 1.18

#### 1.18 Линейная однородная и неоднородная система ДУ

Линейной системой дифференциальных уравнений называют систему вида

$$\dot{r} = P(t)r + q(t), \quad (1.42)$$

где  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ .

Если  $q \equiv 0$  на  $(a, b)$ , то система, то есть

$$\dot{r} = P(t)r, \quad (1.43)$$

называется однородной, в противном случае – неоднородной.

### Definition 1.19

#### 1.19 Функция оригинал

Функцией-оригиналом называется комплекснозначная функция  $f(t)$  вещественной переменной  $t$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- $f(t) = 0$ , если  $t < 0$ ;
- $f(t)$  интегрируема на любом конечном интервале оси  $t$ ;
- с возрастанием  $t$  модуль функции  $f(t)$  растет не быстрее некоторой показательной функции, то есть существуют числа  $M > 0$  и  $s_0 \geq 0$  такие, что для всех  $t$  имеем:

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}. \quad (1.44)$$

### Definition 1.20

#### 1.20 Преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа  $L$  функции-оригинала  $f(t)$ , заданной на  $[0, \infty)$ , называется преобразование вида:

$$(Lf)(p) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (1.45)$$

где образ функции  $f$  будем обозначать за  $F(p)$ . Функцию  $F(p)$  называют изображением функции-оригинала  $f(t)$ .

## II Теоремы

### Theorem 2.1

#### 2.1 О существовании решения ДУ

Если функция  $f(x, y)$  непрерывна и имеет непрерывную частную производную по  $y$  в области  $\Omega$ , то через каждую точку, принадлежащую  $\Omega$ , проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения  $y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Или: то для любой точки  $(x_0, y_0) \in \Omega$  существует единственное решение  $y = y(x)$  уравнения, удовлетворяющее условию:  $y|_{x=x_0} = y_0$ .

### Theorem 2.2

#### 2.2 Решение однородного дифференциального уравнения

### Theorem 2.3

#### 2.3 О решении линейного однородного уравнения

### Theorem 2.4

#### 2.4 Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной)

Рассмотрим уравнение второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \quad (2.1)$$

Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (2.2)$$

где  $y_1, y_2$  – линейно независимые решения однородного уравнения,  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Будем искать частное решение ЛНДУ (Уравнение (2.1)) в следующем виде:

$$Y = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2. \quad (2.3)$$

Здесь  $u_1(x), u_2(x)$  – некоторые функции, которые нам нужно найти.

Отметим сходство формул **Уравнение (2.2)** и **Уравнение (2.3)**. Мы варьируем произвольные постоянные  $C_1, C_2$ , в формуле **Уравнение (2.2)** и получаем вместо них некоторые функции  $u_1(x), u_2(x)$ .

Найдем производные  $Y', Y''$  и подставим их в уравнение **Уравнение (2.1)**.

$$Y' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'. \quad (2.4)$$

Так как мы ищем частное решение уравнение, наложим на функции  $u_1, u_2$  дополнительное ограничение:

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0. \quad (2.5)$$

Тогда  $Y'$  примет вид:

$$Y' = u_1 y_1' + u_2 y_2'. \quad (2.6)$$

Соответственно,

$$Y'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''. \quad (2.7)$$

Подставим  $Y, Y', Y''$  в исходное уравнение **Уравнение (2.1)**:

$$\begin{aligned} u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' + a_1 u_1 y_1' + a_1 u_2 y_2' + a_2 u_1 y_1 + a_2 u_2 y_2 &= f(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_1 \underbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1}_{=0(y_1 \text{ — решение ЛОДУ})} & \end{aligned} \quad (2.8)$$

## Theorem 2.5

### 2.5 Метод Бернулли

## Theorem 2.6

### 2.6 О полном дифференциале

## Theorem 2.7

### 2.7 Об интегрирующем множителе

## Theorem 2.8

## **2.8 О существовании решения ДУ высших порядков**

**Theorem 2.9**

## **2.9 Замены для уравнений, допускающих понижение порядка**

**Theorem 2.10**

## **2.10 Свойства решений линейного однородного ДУ**

**Theorem 2.11**

## **2.11 Необходимое условие линейной зависимости решений**

**Theorem 2.12**

## **2.12 Достаточное условие линейной зависимости решений**

**Theorem 2.13**

## **2.13 О базисе пространства решений**

**Theorem 2.14**

## **2.14 Общее решение линейного неоднородного ДУ**

**Theorem 2.15**

## **2.15 Принцип суперпозиции**

### **Theorem 2.16**

## **2.16 Метод вариации произвольных постоянных**

### **Theorem 2.17**

## **2.17 О ФСР для различных вещественных корней характеристического многочлена**

### **Theorem 2.18**

## **2.18 О ФСР для кратных вещественных корней характеристического многочлена**

### **Theorem 2.19**

## **2.19 Линейное однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами**

### **Theorem 2.20**

## **2.20 Метод неопределенных коэффициентов**

### **Theorem 2.21**

## **2.21 Метод исключения для решения системы ДУ**

**Theorem 2.22**

**2.22 Метод Эйлера для решения однородных линейных систем ДУ при простых собственных числах**

**Theorem 2.23**

**2.23 Метод Эйлера для решения однородных линейных систем ДУ при кратных собственных числах**

**Theorem 2.24**

**2.24 Общее решение линейной неоднородной системы ДУ**

**Theorem 2.25**

**2.25 Свойства преобразования Лапласа**

**Theorem 2.26**

**2.26 О дифференцировании изображения**

**Theorem 2.27**

**2.27 О дифференцировании оригинала**

**Theorem 2.28**

**2.28 Об интегрировании оригинала**



**Theorem 2.29**

**2.29 Преобразования Лапласа простейших функций**