Однородные

1. Если $k_1 \neq k_2$ - действительные и различные, то
$$y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$$
2. Если $k_1 = k_2$ - действительные и совпавшие, то
$$y = e^{k_1 x} \cdot (C_1 + C_2 x)$$
3. Если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - комплексные корни, то
$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x).$$

Неоднородные

1. Специальный вид правой части:
$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}.$$
   - Если α не является корнем характеристического уравнения, то
$$y_{\text{частное}} = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x).$$
   - Если α - корень характеристического уравнения кратности S ($S \in \{1, 2\}$), то
$$y_{\text{частное}} = x^S \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x).$$
2. Специальный вид правой части:
$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x), \quad N = \max(n, m).$$
   - Если $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, то
$$y_{\text{частное}} = e^{\alpha x} \cdot (P_N(x) \cdot \cos \beta x + Q_N(x) \cdot \sin \beta x).$$
   - Если $\alpha \pm \beta i$ - корни характеристического уравнения, то
$$y_{\text{частное}} = x \cdot e^{\alpha x} \cdot (P_N(x) \cdot \cos \beta x + Q_N(x) \cdot \sin \beta x).$$

Метод Лагранжа (Метод вариации постоянных)

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases} \tag{1}$$

Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к однородным

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \tag{2}$$

если $c_1 = c_2 = 0$, то Equation 2 – однородное дифференциальное уравнение.

Пусть c_1 и c_2 не равны нулю (или одно из них)

Замена

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta, \tag{3}$$

где u, v – новые переменные, α, β – постоянные.

$$dx = du, \quad dy = dv \tag{4}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha_1(u+\alpha) + b_1(v+\beta) + c_1}{a_2(u+\alpha) + b_2(v+\beta) + c_2} \tag{5}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2 u + b_2 v + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)} \tag{6}$$

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v} \tag{8}$$

Если Equation 7 не имеет решений, то есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \tag{9}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k, \quad a_1 = k \cdot a_2, \quad b_1 = k \cdot b_2 \tag{10}$$

Тогда

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \tag{11}$$

$$y' = \frac{k a_2 x + k b_2 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \tag{12}$$

$$y' = \frac{k(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \tag{13}$$

Замена $a_2x + b_2y = z$

$$y' = \frac{kz + c_1}{z + c_2} \tag{14}$$

Метод Бернулли

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \tag{15}$$

$$y' + y \cdot \underbrace{\cos x}_{p(x)} = \underbrace{\sin x \cdot \cos x}_{g(x)} \tag{16}$$

$$y = u \cdot v, \text{ где } \ u = u(x), \ v = v(x) \tag{17}$$

$$y = \underbrace{\frac{y}{v}}_{u} \cdot v = u \cdot v \tag{18}$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' \tag{19}$$

Подставим в изначальный пример

$$\underbrace{u' \cdot v + u \cdot v'}_{y'} + \underbrace{u \cdot v}_{y} \cdot \cos x = \sin x \cos x \tag{20}$$

$$u' \cdot v + u \cdot \underbrace{(v' + v \cdot \cos x)}_{=0} = \sin x \cos x \tag{21}$$

$$v' + v \cdot \cos x = 0 \tag{22}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \cos x \ dx \tag{23}$$

$$\ln|v| = -\sin x, \quad c = 0 \tag{24}$$

$$v = e^{-\sin x} \tag{25}$$

Теперь подставим v

$$u' \cdot \underbrace{e^{-\sin x}}_{v} = \sin x \cos x \tag{26}$$

$$\int du = \int e^{\sin x} \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx \tag{27}$$

$$u = \sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C \tag{28}$$

$$y = u \cdot v, \quad y = \left(\sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C\right) \cdot e^{-\sin x} \tag{29}$$

$$y = \sin x - 1 + C \cdot e^{-\sin x} \tag{30}$$

Метод вариации произвольнОЙ постояннОЙ (метод Лагранжа)

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{31}$$

$$y' + p(x)y = 0 \tag{32}$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad | \cdot \frac{dx}{y} \tag{33}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \tag{34}$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1| \tag{35}$$

$$\ln|y| - \ln|C_1| = -\int p(x)dx \tag{36}$$

$$\ln|\frac{y}{C_1}| = -\int p(x)dx \tag{37}$$

$$|\frac{y}{C_1}| = e^{-\int p(x)dx} \tag{38}$$

$$y = \pm C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx} \tag{39}$$

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx} \tag{40}$$

Полагаем $C = C(x)$

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \tag{41}$$

Потом можно найти y' и подставить y и y' в изначальное уравнение и найти $C(x)$. Готовая формула выглядит вот так

$$y = \left(\int g(x) \cdot \exp\left(\int p(x)dx\right) \cdot dx + C\right) \cdot \exp\left(-\int p(x)dx\right) \tag{42}$$

Уравнение в полных дифференциалах

$$y' = -\frac{e^x + y + \sin y}{e^y + x + x \cdot \cos y} \tag{43}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x + y + \sin y}{e^y + x + x \cdot \cos y} \tag{44}$$

$$\underbrace{(e^x + y + \sin y)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(e^y + x + x \cdot \cos y)}_{Q(x,y)} \cdot dy = 0 \tag{45}$$

$$P(x, y) = e^x + y + \sin y \tag{46}$$

$$Q(x, y) = e^y + x + x \cdot \cos y \tag{47}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y \tag{48}$$

Значит уравнение в полных дифференциалах

$$du = (e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x \cdot \cos y)dy \tag{49}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy \tag{50}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y + \sin y \tag{51}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y + x + x \cdot \cos y \tag{52}$$

$$u(x, y) = \int (e^x + y + \sin y)dx = e^x + y \cdot x + \sin y \cdot x + \varphi(y) \tag{53}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (e^x + y \cdot x + \sin y \cdot x + \varphi(y))'_y = x + x \cdot \cos y + \varphi'(y) \tag{54}$$

$$x + x \cdot \cos y + \varphi'(y) = e^y + x + x \cos y \tag{55}$$

$$\varphi'(y) = e^y \Rightarrow \int e^y dy \tag{56}$$

$$\varphi(y) = e^y + C \tag{57}$$

$$u(x,y) = e^x + y \cdot x + \sin y \cdot x + e^y + C \tag{58}$$

$$e^x + y \cdot x + \sin y \cdot x + e^y = C_2 \tag{59}$$