Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Расчетно графическая работа №2

Выполнили:

Левахин Лев

Останин Андрей

Дощенников Никита

Группы: K3221, K3240

Проверил:

Владимир Владимирович Беспалов

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Цель

Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения разными способами.

Методы будут демонстрироваться на задаче Коши:

$$y'' - 4y' + 5y = 4e^{-2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

Метод специальной правой части

(Дощенников Никита)

Запишем характеристическое уравнение:

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

Найдем его корни. Посчитаем дискриминант:

$$\mathcal{D} = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$$

Тогда корни:

$$r_1 = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2} = 2 + i, \quad r_2 = \frac{4 - \sqrt{-4}}{2} = 2 - i$$

Запишем общее решение для однородного уравнения. Так как корни комплексные, то общее решение соответствует форме:

$$y_{\text{общ}} = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x)$$

В нашем случае $\alpha = 2, \beta = 1$. Тогда:

$$y_{\text{общ}} = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x)$$

Специальный вид правой части соответствует виду:

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

где $P_0(x) = 4$ $(n = 0), \alpha = -2$.

Так как $\alpha = -2$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение представим в следующем виде:

$$y_{\text{частн}} = e^{\alpha x} \cdot Q_0(x) = e^{-2x} \cdot A$$

Найдем первую и вторую производные для частного решения:

$$y'_{\text{частн}} = \left(Ae^{-2x}\right)' = -2Ae^{-2x}$$

$$y''_{\text{частн}} = \left(-2Ae^{-2x}\right)' = 4Ae^{-2x}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$4Ae^{-2x} + 8Ae^{-2x} + 5Ae^{-2x} = 4e^{-2x}$$

Вынеся e^{-2x} за скобки получим:

$$e^{-2x}(4A + 8A + 5A) = e^{-2x}(4)$$

Отсюда видно, что

$$4A + 8A + 5A = 4 \Rightarrow 17A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{17}$$

Тогда

$$y_{\text{частн}} = Ae^{-2x} = \frac{4}{17}e^{-2x}$$

Запишем общее решение:

$$y = y_{\text{общ}} + y_{\text{частн}} = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x) + \frac{4}{17}e^{-2x}$$

Теперь решим задачу Коши. Чтобы определить коэффициенты, подставим 0 вместо x:

$$y = C_1 + \frac{4}{17}$$

по условию $y(0) = 0$, то есть

$$C_1 + \frac{4}{17} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{4}{17}.$$

Найдем производную y':

$$y' = C_1\big(e^{2x}\cos x\big)' + C_2\big(e^{2x}\sin x\big)' + \frac{4}{17}\big(e^{-2x}\big)' =$$

$$= C_1\big(2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x\big) + C_2\big(2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x\big) - \frac{8}{17}e^{-2x} =$$

$$= e^{2x}\big((2C_1 + C_2)\cos x + (2C_2 - C_1)\sin x\big) - \frac{8}{17}e^{-2x}$$

По условию $y'(0) = 1$. Подставим 0 вместо x и получим:

$$y'(0) = 2C_1 + C_2 - \frac{8}{17} = 1$$

Подставим $C_1 = -\frac{4}{17}$:

$$-\frac{8}{17} + C_2 - \frac{8}{17} = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{33}{17}$$

Подставим найденные коэффициенты в итоговое решение:

$$y = e^{2x}\left(-\frac{4}{17}\cos x + \frac{33}{17}\sin x\right) + \frac{4}{17}e^{-2x}.$$

Метод вариации постоянной

(Дощенников Никита)

Напомним вид общего решения для однородного уравнения:

$$y_{\text{общ}} = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x)$$

Раскроем скобки и получим

$$y_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Сведем все к системе:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases}$$

где $y_1 = e^{2x} \cos x,\ y_2 = e^{2x} \sin x,\ f(x) = 4e^{-2x}$.

Найдем производные для y_1 и y_2:

$$y_{1'} = \left(e^{2x} \cos x\right)' = 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x$$

$$y_{2'} = \left(e^{2x} \sin x\right)' = 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x$$

Тогда система примет следующий вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)(e^{2x} \cos x) + C_2'(x)(e^{2x} \sin x) = 0 \\ C_1'(x)(2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x) + C_2'(x)(2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x) = 4e^{-2x} \end{cases}$$

Из первого уравнения системы:

$$C_1' = -C_2' \frac{e^{2x} \sin x}{e^{2x} \cos x} = -C_2' \operatorname{tg} x$$

Подставим во второе уравнение системы и вынесем $C_2' e^{2x}$:

$$C_2' e^{2x} (-\operatorname{tg} x (2\cos x - \sin x) + 2\sin x + \cos x) = 4e^{-2x}$$

Упростим

$$-\operatorname{tg} x (2\cos x - \sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x}(2\cos x - \sin x) = -2\sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

Тогда

$$\left(-2\sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) + 2\sin x + \cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

Вернемся в уравнение 2 системы. С учетом упрощения оно примет следующий вид:

$$C_2' e^{2x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 4e^{-2x}$$

Отсюда

$$C_{2'} = 4e^{-4x} \cos x$$

Найдем C_1'

$$C_1' = -C_2' \operatorname{tg} x = -4e^{-4x} \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = -4e^{-4x} \sin x$$

Проинтегрируем и получим

$$C_1 = -4 \int e^{-4x} \sin x dx = \frac{4}{17} e^{-4x} (4\sin x + \cos x)$$
$$C_2 = 4 \int e^{-4x} \cos x dx = \frac{4}{17} e^{-4x} (4\cos x - \sin x)$$

Подставим в формулу частного решения:

$$y_{\text{частн}} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 =$$
$$= \frac{4}{17} e^{-4x} (4\sin x + \cos x) \cdot e^{2x} \cos x + \frac{4}{17} e^{-4x} (4\cos x - \sin x) \cdot e^{2x} \sin x =$$
$$= \frac{4}{17} e^{-2x} ((4\sin x + \cos x) \cos x + (4\cos x - \sin x) \sin x) =$$
$$= \frac{4}{17} e^{-2x} (4\sin x \cos x + 4\cos x \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x) =$$
$$= \frac{4}{17} e^{-2x} \left(8\sin x \cos x + \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\right) =$$
$$= \frac{4}{17} e^{-2x} (8\sin x \cos x + 1) =$$
$$= \frac{4}{17} e^{-2x} (\cos 2x + 4\sin 2x)$$

Так как $e^{-2x}\cos 2x$ и $e^{-2x}\sin 2x$ – решения однородного уравнения, то выражение $\frac{4}{17}e^{-2x}(\cos 2x + 4\sin 2x)$ – это частное решение и часть однородного решения. Тогда окончательно получим

$$y_{\text{частн}} = \frac{4}{17}e^{-2x}$$

Запишем общее решение:

$$y = y_{\text{общ}} + y_{\text{частн}} = e^{2x}\left(-\frac{4}{17}\cos x + \frac{33}{17}\sin x\right) + \frac{4}{17}e^{-2x}.$$

Дальнейшее решение задачи Коши идентично описанному в первом методе.

Операционный метод

(Левахин Лев)

Применим преобразование Лапласа к исходному уравнению:

$$L[y''] - 4L[y'] + 5L[y] = 4L[e^{-2x}]$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$(p^2Y(p) - py(0) - y'(0)) - 4(pY(p) - y(0)) + 5Y(p) = \frac{4}{p+2}$$

Подставим начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$:

$$(p^2Y(p) - 1) - 4pY(p) + 5Y(p) = \frac{4}{p+2}$$

Сгруппируем члены с $Y(p)$:

$$(p^2 - 4p + 5)Y(p) - 1 = \frac{4}{p+2}$$

$$(p^2 - 4p + 5)Y(p) = 1 + \frac{4}{p+2} = \frac{p+6}{p+2}$$

Выразим $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{p+6}{(p+2)(p^2 - 4p + 5)}$$

Разложим на простейшие дроби. Для этого сначала представим:

$$Y(p) = \frac{A}{p+2} + \frac{B * p + C}{p^2 - 4p + 5}$$

Умножим обе части на $(p+2)(p^2 - 4p + 5)$:

$$p + 6 = A(p^2 - 4p + 5) + (B * p + C)(p + 2)$$

$$p + 6 = Ap^2 - 4Ap + 5A + Bp^2 + 2Bp + Cp + 2C$$

$$p + 6 = (A + B)p^2 + (-4A + 2B + C)p + (5A + 2C)$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -4A + 2B + C = 1 \\ 5A + 2C = 6 \end{cases}$$

A + B = 0, при p^2 −4A + 2B + C = 1, при p^1 5A + 2C = 6, при p^0

Из первого уравнения: $B = -A$. Подставим в остальные:

$$\begin{cases} -4A - 2A + C = 1 \\ 5A + 2C = 6 \end{cases}$$

$\begin{cases} -6A+C=1 \\ 5A+2C=6 \end{cases}$

Решим систему: из первого $C = 1 + 6A$, подставим во второе:

$$5A + 2(1 + 6A) = 6$$

$$5A + 2 + 12A = 6$$

$$17A = 4$$

$$A = \frac{4}{17}$$

Тогда:

$$B = -\frac{4}{17}$$

$$C = 1 + 6 * \left(\frac{4}{17}\right) = 1 + \frac{24}{17} = \frac{41}{17}$$

Итак:

$$Y(p) = \frac{\frac{4}{17}}{p+2} + \frac{(-\frac{4}{17})p + \frac{41}{17}}{p^2 - 4p + 5}$$

Преобразуем второе слагаемое. Заметим, что $p^2 - 4p + 5 = (p-2)^2 + 1$:

$$Y(p) = \frac{\frac{4}{17}}{p+2} + \frac{-\frac{4}{17} * p + \frac{41}{17}}{(p-2)^2 + 1}$$

Выделим в числителе второй дроби слагаемое $p - 2$:

$$-\frac{4}{17} * p + \frac{41}{17} = -\frac{4}{17} * (p-2) - \frac{8}{17} + \frac{41}{17} = -\frac{4}{17} * (p-2) + \frac{33}{17}$$

Тогда:

$$Y(p) = \frac{\frac{4}{17}}{p+2} + \frac{-\frac{4}{17} * (p-2) + \frac{33}{17}}{(p-2)^2+1}$$

$$Y(p) = \frac{\frac{4}{17}}{p+2} - \left(\frac{4}{17}\right) * \frac{p-2}{(p-2)^2+1} + \frac{\frac{33}{17}}{(p-2)^2+1}$$

Применим обратное преобразование Лапласа, используя свойства:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right] = e^{-2t}$$

$$L^{-1}\left[\frac{p-2}{(p-2)^2+1}\right] = e^{2t}\cos t$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p-2)^2+1}\right] = e^{2t}\sin t$$

Получаем решение:

$$y(x) = \left(\frac{4}{17}\right)e^{-2x} - \left(\frac{4}{17}\right)e^{2x}\cos x + \left(\frac{33}{17}\right)e^{2x}\sin x$$

Или в более компактной форме:

$$y(x) = e^{2x}\left(-\frac{4}{17}\cos x + \frac{33}{17}\sin x\right) + \frac{4}{17}e^{-2x}$$

Полученное решение полностью совпадает с результатами предыдущих методов.

Метод разложения в ряд

(Останин Андрей)

Ищем решение в виде степенного ряда:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Тогда производные имеют вид:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Правая часть уравнения раскладывается в ряд Тейлора:

$$4e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad b_n = \frac{4(-2)^n}{n!}$$

Приведём ряды для производных к одинаковым степеням x^n:

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Подставляя полученные выражения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 4(n+1)a_{n+1} + 5a_n] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Отсюда следует рекуррентное соотношение для коэффициентов:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 4(n+1)a_{n+1} + 5a_n = b_n$$

Начальные условия задачи Коши дают:

$$a_0 = y(0) = 0, \quad a_1 = y'(0) = 1$$

Найдём первые коэффициенты ряда.

При $n = 0$:

$$2a_2 - 4a_1 + 5a_0 = 4$$

$$2a_2 - 4 = 4 \Rightarrow a_2 = 4$$

При $n = 1$:

$$6a_3 - 8a_2 + 5a_1 = -8$$

$$6a_3 - 32 + 5 = -8 \Rightarrow a_3 = \frac{19}{6}$$

При $n = 2$:

$$12a_4 - 12a_3 + 5a_2 = 8$$

$$12a_4 - 38 + 20 = 8 \Rightarrow a_4 = \frac{13}{6}$$

При $n = 3$:

$$20a_5 - 16a_4 + 5a_3 = -\frac{16}{3}$$

$$20a_5 - \frac{208}{6} + \frac{95}{6} = -\frac{16}{3} \Rightarrow a_5 = \frac{27}{40}$$

Таким образом, решение в виде степенного ряда имеет вид:

$$y(x) = x + 4x^2 + \frac{19}{6}x^3 + \frac{13}{6}x^4 + \frac{27}{40}x^5 + ...$$

Полученное разложение совпадает с рядом Тейлора точного решения, найденного ранее другими методами.