

А.И. Попов, И.Ю. Попов

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**



Санкт-Петербург

2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**А.И. Попов, И.Ю. Попов  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлению подготовки 01.03.02, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04, 10.03.01,  
11.03.02, 11.03.03, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 12.03.04, 12.03.05, 13.03.01, 13.03.02,  
14.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 16.03.01, 16.03.03, 18.03.01, 18.03.02, 19.03.01, 23.03.03,  
24.03.02, 27.03.04, 27.03.05

в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных  
образовательных программ высшего образования бакалавриата

**ИТМО**

Санкт-Петербург  
2025

Попов А.И., Попов И.Ю., Дифференциальные уравнения – СПб: Университет ИТМО, 2025. – 200 с.

Рецензент:

Мирошниченко Георгий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор (квалификационная категория “ординарный профессор”) института “Высшая инженерно-техническая школа”, Университета ИТМО.

Учебное пособие предназначено для студентов академического бакалавриата. В пособии рассмотрены следующие темы: “Дифференциальные уравнения первого порядка”, “Дифференциальные уравнения высших порядков”, “Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка”, “Системы дифференциальных уравнений”, “Операционное исчисление”, “Теория устойчивости”, “Циклы и предельные циклы”, “Теория бифуркаций”.



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

# Содержание

<b>Введение. Фундаментальная анаграмма анализа или 6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux</b>	<b>5</b>
<b>1 Дифференциальные уравнения первого порядка</b>	<b>9</b>
1.1 Основные понятия . . . . .	9
1.2 Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	12
1.3 Однородные уравнения . . . . .	15
1.4 Дифференциальные уравнения, сводящиеся к однородным .	18
1.5 Линейные уравнения . . . . .	23
1.6 Уравнение Бернули . . . . .	27
1.7 Уравнения в полных дифференциалах . . . . .	29
1.8 Особые решения дифференциальных уравнений . . . . .	33
<b>2 Дифференциальные уравнения высших порядков</b>	<b>36</b>
2.1 Основные понятия . . . . .	36
2.2 Уравнения, допускающие понижение порядка . . . . .	38
<b>3 Линейные дифференциальные уравнения <math>n</math>-го порядка</b>	<b>44</b>
3.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения . . . .	44
3.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения с по- стоянными коэффициентами . . . . .	53
3.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения . .	60
3.4 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)	63
3.5 Интеграл Дюамеля . . . . .	67
3.6 Метод неопределённых коэффициентов . . . . .	69
<b>4 Системы дифференциальных уравнений</b>	<b>77</b>
4.1 Основные понятия . . . . .	77
4.2 Метод исключения . . . . .	79
4.3 Матричный метод (метод Эйлера) . . . . .	81

<b>5 Операционное исчисление</b>	<b>92</b>
5.1 Преобразование Лапласа . . . . .	92
5.2 Операционный метод . . . . .	100
<b>6 Теория устойчивости</b>	<b>105</b>
6.1 Введение . . . . .	105
6.2 Устойчивость по Ляпунову. Основные понятия и определения	106
6.3 Простейшие типы точек покоя . . . . .	117
6.4 Метод функций Ляпунова . . . . .	128
6.5 Устойчивость по первому приближению . . . . .	135
6.6 Устойчивость решений дифференциальных уравнений по отношению к изменению правых частей уравнений . . . . .	140
6.7 Критерий Рауса—Гурвица . . . . .	145
6.8 Геометрический критерий устойчивости (критерий Михай- лова) . . . . .	148
6.9 Уравнения с малым параметром при производной . . . . .	152
6.10 Ответы к задачам . . . . .	163
<b>7 Нелинейные системы. Циклы и предельные циклы. Тео-     рия бифуркаций</b>	<b>167</b>
7.1 Циклы и предельные циклы . . . . .	167
7.2 Теория бифуркаций . . . . .	181
7.3 Ответы и решения некоторых задач . . . . .	197

## Введение. Фундаментальная анаграмма анализа или бaccdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux

Непонятный набор букв и цифр в заголовке не результат сбоя в работе компьютера, не обрывок файла в неправильной кодировке и тем более не запись шахматной партии. Эта короткая строчка символов — текст самой первой в истории математики научной публикации по теории дифференциальных уравнений. В предназначеннном для передачи Готфриду Вильгельму Лейбницу письме к секретарю Лондонского Королевского общества, основателю и редактору «Философских трудов Королевского общества» Генри Ольденбургу от 24 октября 1676 года Исаак Ньютон говорит о недавно им открытом новом методе:

«The foundations of these operations is evident enough, in fact; but be-cause I cannot proceed with the explanation of it now, I have preferred to conceal it thus: бaccdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux. On this foundation I have also tried to simplify the theories which concern the squaring of curves, and I have arrived at certain general Theorems».

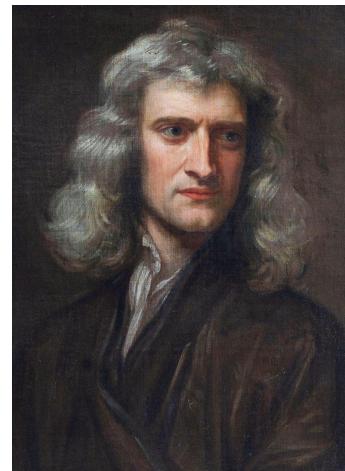


Рис. 1: Исаак Ньютон (англ. Isaac Newton, 1642–1727)

«На самом деле, основы этих операций достаточно очевидны; но поскольку я не могу продолжить объяснение этого сейчас, я предпочел скрыть его таким образом: бaccdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux. На этом основании я также попытался упростить теории, относящиеся к квадратуре кривых, и я пришел к некоторым общим теоремам».

Таковы были обычай эпохи: научные журналы выходили редко и добирались до адресата долго. Поэтому о новых научных достижениях учёные, как и прежде, предпочитали узнавать из переписки с друзьями

и коллегами. Если же результат оставался недостаточно проработанным, а необходимость сохранения за автором его прав на первенство уже присутствовала, сообщение шифровалось или представлялось в виде анаграммы. В ней числовые коэффициенты указывают, сколько раз данная буква повторяется в тексте фразы.

Если расположить символы в его латинском предложении в алфавитном порядке (и предположить, что он посчитал дифтонг “ae” отдельным символом, а буквы i и v считаются одним и тем же символом), количество вхождений каждого символа будет следующим:

6			13		7	3	9
aaaaaa	cc	d	ae	eeeeeeeeeeee	ff	iiiiii	llll
4	4		4	9		12	
oooo	qqqq	rr	ssss	tttttttt	uuuuuuuu	vvvvv	x

Рис. 2: Расшифровка анаграммы Ньютона

Это согласуется с анаграммой Ньютона:

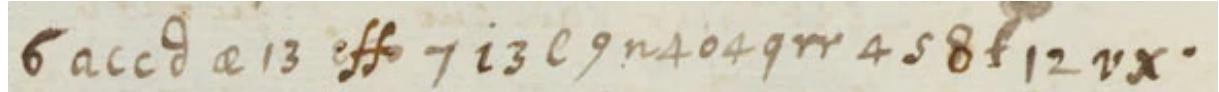


Рис. 3: Анаграмма Ньютона

за исключением того, что в записи девять букв “t” вместо восьми. Возможно, в первоначальном латинском написании Ньютона использовалось на одну букву “t” меньше, хотя неясно, какую из них можно было бы опустить. Возможно также, что анаграмма была скопирована неправильно, но она согласуется с версией в биографиях Вестфолла и Кристиансона, а также с транскрипцией письма Ньютона, содержащейся в “Классике математики” Калинджера. Другая возможность состоит в том, что Ньютон просто ошибся в подсчетах. Это не так уж неправдоподобно, как может показаться на первый взгляд, поскольку существует хорошо известный психологический феномен, когда в коротких соединительных словах (например, f в слове “of”) при быстром подсчете количества появлений определенного слова не учитывается вторая буква в текстовой

строке. При подсчете количества букв “t” в латинской фразе Ньютона довольно легко ошибиться и не учесть букву “t” в слове “et”.

По иронии судьбы, ни Лейбница, ни Ньютон не опубликовали ничего по дифференциальному исчислению на момент написания данного письма, хотя считается, что оба им владели. Так что если бы Ньютон выступил с полным и явным изложением исчисления, то поставил бы Лейбница в затруднительное положение, установив свой собственный приоритет в исследовании дифференциальных уравнений (поскольку письмо прошло через Генри Ольденбурга, секретаря Лондонского Королевского общества). Однако шифрование и секретность Ньютона привели к потере его прав на приоритет и ожесточенному спору с Лейбницем, испортившему последующую жизнь обоих. Расшифровка анаграммы последовала лишь через десятилетие и была дана самим Ньютоном в его «Математических началах натуральной философии», вышедших в 1687 году. Там, в «Поучении» ко второму отделу второй книги, он пишет, что его главное открытие, которое он счел нужным засекретить и опубликовал лишь в виде анаграммы, состоит в следующем: «*Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa*», то есть «Дано уравнение, заключающее в себе текущие количества (флюенты), найти течения (флюкции) и наоборот». В современной терминологии флюенты Ньютона стали функциями, а флюкции — их производными. Поскольку дифференциальные уравнения связывают значения тех и других, в отечественной научно-популярной литературе сложилась традиция расшифровывать анаграмму Ньютона, не углубляясь в математические тонкости: “Законы природы выражаются дифференциальными уравнениями”.

Если смотреть глубже, то для Ньютона было естественным выражать свои мысли в анаграммах, потому что он, по-видимому, считал «надуманную неясность» существенной чертой Божьего замысла мира,

и Ньютона принял этот способ изложения в своих собственных работах. Можно вспомнить, к примеру, высказывание Ньютона о том, что он сделал «Начала» «намеренно запутанными» (чтобы не попасться на наживку «небольших разбирающихся в математике»).

Отношение к возможностям теоретической математики сродни отношению к умению читать буквы: и то, и другое кажется само собой разумеющимся и совершенно ничего не стоящим. Действительно, определенное сходство есть. Когда Галилей писал свои знаменитые слова об алфавите “книги природы”:

«философия написана в той величественной Книге (я имею в виду Вселенную), которая всегда открыта нашему взору, но читать ее может лишь тот, кто сначала освоит язык и научится понимать знаки, которыми она начертана. Написана же она на языке математики, и знаки ее – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без которых нельзя понять ни единого из стоящих в ней слов и остается лишь блуждать в темном лабиринте»,

он еще ничего не знал о дифференциальных уравнениях: до письма Ньютона Ольденбургу оставалось более 50 лет. Но роль математики им определена предельно точно. Сегодня, зная историю естествознания за прошедшие с тех пор почти 400 лет, мы можем к этому добавить лишь то, что Ньютон скрыл в своей анаграмме: «Природа говорит с нами языком дифференциальных уравнений, и чтобы ее понимать, необходимо владеть им настоящим образом».

# 1 Дифференциальные уравнения первого порядка

## 1.1 Основные понятия

### *Определение*

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y = y(x)$  и её производные  $y'$ ,  $y''$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n)}$ .

Если функции, входящие в дифференциальное уравнение, зависят от одной независимой переменной, то уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Если в уравнение входят частные производные неизвестных функций по нескольким независимым переменным, то уравнение называют дифференциальным уравнением с частными производными.

Мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Пусть  $x$  – независимая переменная,  $y$  – искомая функция этой переменной. Общий вид дифференциального уравнения будет

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

### *Определение*

Наивысший порядок  $n$  производных неизвестной функции называется порядком дифференциального уравнения.

### *Определение*

Функция  $y = \varphi(x)$  является решением дифференциального уравнения, если её подстановка в уравнение обращает его в тождество.

В данном параграфе мы будем рассматривать дифференциальные уравнения первого порядка. Общий вид такого уравнения будет

$$\Phi(x, y, y') = 0. \quad (2)$$

или, в решенной относительно  $y'$  форме:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (3)$$

Рассмотрим простейший случай, когда уравнение имеет вид:

$$y' = f(x). \quad (4)$$

Тогда множество решений уравнения дается формулой:

$$y = \int f(x)dx + C, \quad (5)$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Таким образом, в этом случае мы получим семейство решений дифференциального уравнения, содержащее произвольную постоянную. Такое семейство решений называется общим интегралом уравнения. Он может выражаться в том числе и в неявной форме:

$$\psi(x, y, C) = 0 \quad \text{или} \quad \omega(x, y) = C. \quad (6)$$

### Определение решения по начальному условию. Теорема существования и единственности.

Уравнение (4) имеет бесконечно много решений, поскольку в формулу (5) входит произвольная постоянная  $C$ .

Для того, чтобы получить единственное решение уравнения (4), поставим начальное условие, то есть потребуем, чтобы функция  $y$  принимала заданное значение  $y_0$  при  $x = x_0$ :

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad (7)$$

Действительно, пусть функция  $f(x)$  непрерывна на некотором интервале  $(a, b)$  и точка  $x_0 \in (a, b)$ . Заменяя в формуле (5) неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом  $x$  и нижним

пределом  $x_0$ , получим:

$$y = \int_{x_0}^x f(t)dt + C. \quad (8)$$

Удовлетворим начальному условию. При  $x = x_0$  интеграл обращается в нуль и мы получим:

$$C = y_0. \quad (9)$$

Таким образом, уравнение (4) при начальном условии (7) имеет единственное решение:

$$y = \int_{x_0}^x f(t)dt + y_0. \quad (10)$$

Отметим, что это решение единственno на всем интервале  $(a, b)$ .

### *Определение*

Уравнение (4) вместе с заданным начальным условием (7) называется задачей Коши.

### Геометрическая интерпретация.

Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в некоторой области  $\Omega$  на плоскости  $XOY$ . Согласно уравнению (3):

$$f(x, y) = y' = \operatorname{tg} \alpha,$$

то есть в каждой точке области  $\Omega$  задано направление касательной к графику функции  $y = \varphi(x)$ , являющейся решением уравнения (3). Таким образом, уравнение (3) эквивалентно определению в области  $\Omega$  поля направлений, то есть в каждой точке области  $\Omega$  уравнение (3) определяет некоторое направление. Вообще говоря, на прямой можно выбрать 2 вектора противоположных направлений, но им обоим соответствует один и тот же  $\operatorname{tg} \alpha$ .

### *Определение*

Интегральные кривые уравнения (3) – это кривые  $l$ , лежащие в области

$\Omega$  и обладающие свойством: в каждой точке  $(x, y)$  касательная к  $l$  имеет направление, определяемое указанным выше полем направлений.

Сформулируем теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения.

### Теорема 1 (Теорема Пикара)

Если функция  $f(x, y)$  непрерывна и имеет непрерывную частную производную по  $y$  в области  $\Omega$ , то через каждую точку, принадлежащую  $\Omega$ , проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (3). Или: то для любой точки  $(x_0, y_0) \in \Omega$  существует единственное решение  $y = y(x)$  уравнения, удовлетворяющее условию:  $y|_{x=x_0} = y_0$ .

Без доказательства.

#### *Определение*

Общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка в области  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  называется семейство функций  $y = \varphi(x, C)$  таких, что при любом  $C$  функция  $\varphi(x, C)$  удовлетворяет уравнению и для любых начальных условий  $y|_{x=x_0} = y_0$  ( $(x_0, y_0) \in \Omega$ ) можно найти значение  $C = C_0$ , при котором  $\varphi(x, C_0)$  удовлетворяет данному начальному условию.

Общее решение (общий интеграл) может выражаться в неявной форме:

$$\psi(x, y, C) = 0 \quad \text{или} \quad \omega(x, y) = C.$$

Частное решение получается из общего при каком-то конкретном значении  $C$ .

#### *Замечание*

Общего метода для решения дифференциальных уравнений не существует. Однако, в некоторых частных случаях их удается решать.

## 1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

#### *Определение*

Если уравнение  $\Phi(x, y, y') = 0$  с помощью алгебраических преобразова-

ний удаётся привести к виду

$$y' = g(x) \cdot h(y) \quad (11)$$

или

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, \quad (12)$$

то оно называется уравнением с разделяющимися переменными.

Разделим переменные в уравнениях (11) и (12).

$$y' = g(x) \cdot h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx, \text{ где } h(y) \neq 0. \quad (13)$$

Проинтегрируем обе части уравнения (13):

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C$$

и получим решение уравнения в неявном виде:

$$\omega(x, y) = C.$$

$$\begin{aligned} M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 & \quad \left| \cdot \frac{1}{N_1(x)M_2(y)} \right. \\ \Leftrightarrow \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx &= -\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy, \text{ где } N_1(x) \neq 0, M_2(y) \neq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Проинтегрируем обе части уравнения (14) и получим решение в неявном виде:

$$\omega(x, y) = C.$$

### Пример 1

Найдем решение дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \left| \cdot \frac{dx}{y} \right. \leftarrow \text{здесь мы предполагаем, что } y \neq 0.$$

$$\int \left| \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \right. \Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|yx| = \ln C_1 \Leftrightarrow |yx| = C_1, \quad C_1 \neq 0.$$

Простой подстановкой проверяется, что  $y = 0$  является решением исходного уравнения. Однако, в процессе решения мы его потеряли. Следовательно, нужно добавить его обратно:

$$\begin{cases} |yx| = C_1, C_1 \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow |yx| = C, \text{ где } C \text{ -- произвольная постоянная.}$$

Изобразим интегральные кривые (решения уравнения) и поле направлений на плоскости  $XOY$ .

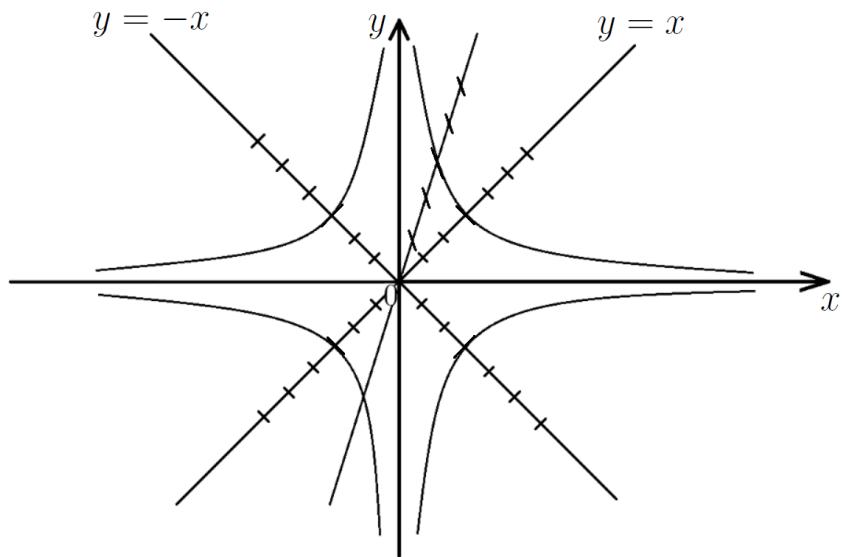


Рис. 4: Интегральные кривые  $|yx| = C$ .

Интегральные кривые -- это гиперболы  $y = \pm \frac{C}{x}$ . На прямых, проходящих через начало координат, короткими отрезками показано поле направлений для данного уравнения.

### Пример

Опишем процесс охлаждения тела.

Скорость охлаждения пропорциональна разности температуры тела  $T$  и температуры окружающей среды  $T_c$ :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = -k(T - T_c) &\Leftrightarrow \frac{dT}{T - T_c} = -kdt \quad (\text{считаем, что } T > T_c) \\ \Leftrightarrow \ln(T - T_c) &= -kt + \ln C \Leftrightarrow T - T_c = e^{-kt + \ln C} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T &= T_c + C e^{-kt}. \end{aligned}$$

Пусть задана температура тела в начальный момент времени:

$$T|_{t=0} = T_0.$$

Подставим это условие в решение уравнения:

$$T_0 = T_c + C \cdot e^0 \Leftrightarrow C = T_0 - T_c.$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид:

$$T = T_c + (T_0 - T_c) \cdot e^{-kt}.$$

### 1.3 Однородные уравнения

#### *Определение*

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно привести к виду:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (15)$$

Сведем это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Для этого сделаем замену:

$$\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow y = ux. \quad (16)$$

Следовательно,

$$y' = u' \cdot x + u, \quad dy = udx + xdu. \quad (17)$$

Подставим  $y$  и  $y'$  в уравнение (15):

$$\begin{aligned} u' \cdot x + u &= f(u) \Leftrightarrow u' \cdot x = f(u) - u \Leftrightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = f(u) - u \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Здесь мы предполагаем, что } f(u) \neq u \\ \text{и } x \neq 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + \ln C_1 \Leftrightarrow x = C \cdot e^{\int \frac{du}{f(u) - u}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Как определить, что уравнение однородное?

С помощью метода размерностей.

Припишем функции  $y$ , переменной  $x$  и их дифференциалам некоторые размерности. Например, метры:

$$x \sim \text{м}, \quad y \sim \text{м}, \quad dx \sim \text{м}, \quad dy \sim \text{м}.$$

Производная  $y' = \frac{dy}{dx} \sim 1$  – безразмерная величина.

Для трансцендентных функций (то есть функций, не являющихся алгебраическими:  $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, e^x, a^x, \ln x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$ ) в качестве аргумента должна стоять безразмерная величина:  $e^{\frac{y}{x}}, \operatorname{tg}(\frac{y}{x})$  и так далее.

Уравнение будет однородным, если в нём складываются величины одной размерности.

**Например:**

$$(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2,$$

$$(\text{м}^2 + \text{м} \cdot \text{м}) \cdot 1 = \text{м} \cdot \sqrt{\text{м}^2 - \text{м}^2} + \text{м} \cdot \text{м} + \text{м}^2.$$

Следовательно, уравнение однородное.

**Пример**

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Замена:  $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$ .

Соответственно,  $y' = u'x + u$ .

Подставим  $y$  и  $y'$  в исходное уравнение:

$$u'x + u = \frac{2ux^2}{x^2 - u^2x^2} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{2u}{1 - u^2} \Leftrightarrow$$

$\int u \neq \pm 1 \Leftrightarrow y \neq \pm x$  – выполнено в силу области

определения функции  $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

//

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{2u-u+u^3}{1-u^2} = \frac{u+u^3}{1-u^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1-u^2}{u(1+u^2)} du \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)} du$$

$\left/ \begin{array}{l} \text{Здесь мы теряем решение } u=0 \Leftrightarrow y=0 \end{array} \right.$

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь  $\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}$ , разложим её на сумму простейших:

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2}$$

$$1-u^2 = A(1+u^2) + (Bu+C)u$$

$$\left. \begin{array}{l} u^2 : -1 = A+B \\ u^1 : 0 = C \\ u^0 : 1 = A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ B = -2, \\ C = 0. \end{array} \right.$$

Подставим полученную дробь в уравнение:

$$\ln|x| = \int \frac{du}{u} - \int \frac{2u}{1+u^2} du \Leftrightarrow \ln|x| = \ln|u| - \int \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|x| = \ln|u| - \ln(1+u^2) + C_1 \Leftrightarrow \frac{x(u^2+1)}{u} = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left/ u = \frac{y}{x} \right. \Leftrightarrow x \left( \frac{y^2}{x^2} + 1 \right) = C \cdot \frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - Cy = 0.$$

Добавив потерянное ранее решение  $y=0$ , получим итоговый ответ:

$$\left[ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - Cy = 0, \\ y = 0. \end{array} \right]$$

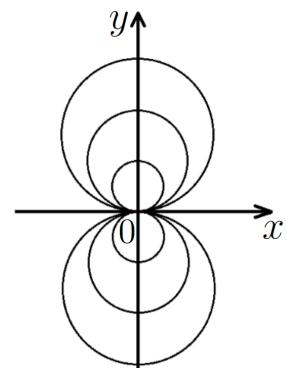


Рис. 5: Окружности  $x^2 + y^2 - Cy = 0$  и прямая  $y = 0$  (совпадает с осью  $OX$ ).

## 1.4 Дифференциальные уравнения, сводящиеся к однородным

Рассмотрим уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \quad (19)$$

Это уравнение можно свести к однородному с помощью следующей замены переменных:

$$\begin{cases} x = u + m \\ y = v + n \end{cases}, \quad \text{где } m, n = \text{const.} \quad (20)$$

Тогда:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1m + b_1n + c_1}{a_2u + b_2v + a_2m + b_2n + c_2}\right). \quad (21)$$

Постоянные  $m$  и  $n$  найдем из следующих условий:

$$\begin{cases} a_1m + b_1n + c_1 = 0, \\ a_2m + b_2n + c_2 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Тогда уравнение становится однородным:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 + b_1 \cdot \frac{v}{u}}{a_2 + b_2 \cdot \frac{v}{u}}\right). \quad (23)$$

Если система (22) не имеет решений, то это означает, что:

$$a_2x + b_2y = \lambda(a_1x + b_1y). \quad (24)$$

Тогда можно ввести новую переменную  $u$  вместо  $y$ :

$$u(x) = a_1x + b_1y + c_1 \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{b_1}(u - a_1x - c_1). \quad (25)$$

Уравнение сведётся к следующему виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1} \frac{du}{dx} - \frac{a_1}{b_1} = f\left(\frac{u}{\lambda u - \lambda c_1 + c_2}\right) \quad \Big| \cdot b_1 dx \quad (26)$$

$$\left/ a_2x + b_2y + c_2 = \overset{\uparrow}{\underset{(24)}{\lambda}} \underbrace{a_1x + b_1y}_{u - c_1} + c_2 = \lambda u - \lambda c_1 + c_2 \right/$$

$$\Leftrightarrow du - a_1dx = f\left(\frac{u}{\lambda u - \lambda c_1 + c_2}\right) \cdot b_1dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow du = \left( f\left(\frac{u}{\lambda u - \lambda c_1 + c_2}\right) \cdot b_1 + a_1 \right) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{f\left(\frac{u}{\lambda u - \lambda c_1 + c_2}\right) \cdot b_1 + a_1} = dx. \quad (27)$$

Таким образом, переменные в уравнении разделились и решение находится интегрированием.

### Пример 1

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} x = u + m, \\ y = v + n. \end{cases}$$

Найдём  $m$  и  $n$ :

$$\begin{cases} m + n - 2 = 0 \\ m - n + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 - n \\ 2 - n - n + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1, \\ n = 3. \end{cases}$$

Итак, замена:

$$\begin{cases} x = u - 1, \\ y = v + 3. \end{cases}$$

Соответственно,  $dx = du$ ,  $dy = dv$ .

Подставим  $x$  и  $y$  в исходное уравнение:

$$(u - 1 + v + 3 - 2)du + (u - 1 - v - 3 + 4)dv = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u + v)du + (u - v)dv = 0.$$

Мы получим однородное уравнение.

Сделаем замену:

$$\frac{u}{v} = t \Leftrightarrow u = vt.$$

Здесь мы предполагаем, что  $v \neq 0$ . Если  $v = 0$ , то  $y = 3$ . Подстановка в уравнение даёт:  $(x+1)dx = 0$ . Значит  $x = -1$ . Таким образом,  $v = 0$  даёт не функцию, а значение в одной точке, что не является решением дифференциального уравнения. /

Соответственно,  $du = vdt + tdv$ .

Подставляем в уравнение:

$$(vt + v)(vdt + tdv) + (vt - v)dv = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2tdt + vt^2dv + v^2dt + vtdv + vtdv - vdv = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (v^2t + v^2)dt = -(vt^2 + vt + vt - v)dv \quad \left| \cdot \frac{1}{v} \right. \leftarrow v = 0 - \text{не решение.}$$

$$\Leftrightarrow (vt + v)dt = -(t^2 + 2t - 1)dv \quad \left| \cdot \frac{1}{v(t^2 + 2t - 1)} \right.$$

Корни полинома  $t^2 + 2t - 1$  будут являться решениями дифференциального уравнения  $(vt + v)dt = -(t^2 + 2t - 1)dv$ . Найдем их:

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Правая часть дифференциального уравнения будет обращаться в нуль за счет  $t^2 + 2t - 1$ , левая часть – за счет  $dt$ . Таким образом, при делении

на  $t^2 + 2t - 1$  мы теряем следующие решения:

$$\begin{aligned} t = -1 \pm \sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{u}{v} = -1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow u = (-1 \pm \sqrt{2})v \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 1 = (-1 \pm \sqrt{2})(y - 3). \end{aligned}$$

Вернемся к дифференциальному уравнению:

$$\frac{t + 1}{t^2 + 2t - 1} dt = -\frac{dv}{v}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\begin{aligned} \int \frac{t + 1}{t^2 + 2t - 1} dt &= -\ln |v| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \frac{d((t + 1)^2 - 2)}{(t + 1)^2 - 2} = -\ln |v| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln |(t + 1)^2 - 2| + \ln |v| = \ln C_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |t^2 + 2t - 1|^{\frac{1}{2}} \cdot |v| = C_1, \quad C_1 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |t^2 + 2t - 1| \cdot v^2 = C_1^2, \quad C_1 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (t^2 + 2t - 1) \cdot v^2 = \pm C_1^2 = C, \quad \text{где } C \neq 0 \Leftrightarrow /t = \frac{u}{v}/ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{u^2}{v^2} + 2\frac{u}{v} - 1 \right) v^2 = C \Leftrightarrow \left/ \begin{cases} u = x + 1, \\ v = y - 3. \end{cases} \right/ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{(x + 1)^2}{(y - 3)^2} + 2\frac{x + 1}{y - 3} - 1 \right) (y - 3)^2 = C, \quad \text{где } C \neq 0. \end{aligned}$$

Добавляя сюда потерянное ранее особое решение, получаем итоговый

ответ:

$$\begin{cases} \left( \frac{(x+1)^2}{(y-3)^2} + 2 \frac{x+1}{y-3} - 1 \right) (y-3)^2 = C, \quad \text{где } C \neq 0, \\ x+1 = (-1 \pm \sqrt{2})(y-3). \end{cases}$$

## Пример 2

$$(3x + 2y + 1)dx + (6x + 4y - 3)dy = 0.$$

Здесь  $6x + 4y = 2 \cdot (3x + 2y)$ . Поэтому введём новую переменную  $u$  вместо  $y$  по правилу:

$$u = 3x + 2y + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}u - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2},$$

$$dy = \frac{1}{2}du - \frac{3}{2}dx.$$

Подставим  $y$  и  $dy$  в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} udx + (2u - 5) \left( \frac{1}{2}du - \frac{3}{2}dx \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( u - 3u + \frac{15}{2} \right) dx &= - \left( u - \frac{5}{2} \right) du \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow dx &= \frac{u - \frac{5}{2}}{2u - \frac{15}{2}} du. \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\begin{aligned} x + C &= \int \frac{u - \frac{5}{2}}{2u - \frac{15}{2}} du = \int \frac{u - \frac{15}{4} + \frac{15}{4} - \frac{5}{2}}{2(u - \frac{15}{4})} du = \\ &= \int \frac{1}{2} du + \frac{5}{8} \int \frac{du}{u - \frac{15}{4}} = \frac{1}{2}u + \frac{5}{8} \ln \left| u - \frac{15}{4} \right|. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $u = 3x + 2y + 1$ , вернемся к старой переменной  $y$ :

$$\begin{aligned}
 x + C &= \frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \ln \left| 3x + 2y + 1 - \frac{15}{4} \right| \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \ln \left| 3x + 2y - \frac{11}{4} \right| = C.
 \end{aligned}$$

## 1.5 Линейные уравнения

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (28)$$

где  $p(x)$ ,  $q(x)$  – заданные функции.

Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение при  $q(x) = 0$ :

$$\tilde{y}' + p(x)\tilde{y} = 0. \quad (29)$$

Переменные здесь разделяются:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{y}}{dx} + p(x)\tilde{y} = 0 &\quad \left| \cdot \frac{dx}{\tilde{y}} \right. \leftarrow \text{здесь мы предполагаем, что } \tilde{y} \neq 0. \\
 \Leftrightarrow \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + p(x)dx = 0 &\Leftrightarrow \ln |\tilde{y}| = - \int p(x)dx \Leftrightarrow \tilde{y} = C \cdot e^{- \int p(x)dx}. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Здесь на постоянную  $C$  мы не накладываем никаких ограничений. Делается это для того, чтобы решение  $\tilde{y} = 0$  вошло в ответ (формула (30)). Заменим неопределённый интеграл определённым с переменным верхним пределом:

$$\tilde{y} = C \cdot e^{- \int_{x_0}^x p(t)dt}. \quad (31)$$

Если есть начальное условие:

$$\tilde{y} \Big|_{x=x_0} = y_0, \quad (32)$$

то  $C = y_0$ . Для интегрирования уравнения (28) воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Будем искать решение этого уравнения в следующем виде:

$$y = u \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad (33)$$

считая  $u$  не постоянной, а некоторой функцией от  $x$ . Дифференцируя, находим

$$y' = u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)). \quad (34)$$

Подставив  $y'$  в уравнение (28), получим:

$$\begin{aligned} u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + \underbrace{u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x))}_{\cancel{+ p(x)u \cdot e^{-\int p(x)dx}}} + \cancel{p(x)u \cdot e^{-\int p(x)dx}} = q(x) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x) &\Leftrightarrow du = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx + C. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляя  $u$  в формулу (33), получим:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left( \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx + C \right). \quad (36)$$

Заменим неопределённые интегралы на интегралы с переменным верхним пределом:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(u)du} \cdot \left( \int_{x_0}^x q(v) \cdot e^{\int_{x_0}^v p(u)du} \cdot dv + C \right). \quad (37)$$

Для ясности мы обозначаем переменные интегрирования различными буквами  $u$  и  $v$ , отличными от буквы  $x$ .

Если задано начальное условие:  $y|_{x=x_0} = y_0$ , то  $C = y_0$  и формула (37) принимает вид:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(u)du} \cdot \left( \int_{x_0}^x q(v) \cdot e^{\int_{x_0}^v p(u)du} \cdot dv + y_0 \right). \quad (38)$$

$$y(x) = \underbrace{y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(u)du}}_{\tilde{y}} + \underbrace{e^{-\int_{x_0}^x p(u)du} \cdot \int_{x_0}^x q(v) \cdot e^{\int_{x_0}^v p(u)du} \cdot dv}_{Y}, \quad (39)$$

то есть  $y = \tilde{y} + Y$ . Таким образом, мы доказали следующую теорему:

### Теорема 2 (Теорема об общем решении ЛНДУ)

Общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

#### Пример 1

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{\sin x}{x}.$$

Замена:

$$y = u \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} = u \cdot e^{-\ln|x|} = u \cdot e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{u}{x}.$$

Здесь знак “ $\pm$ ” и  $const$  мы внесли в функцию  $u$ .

Соответственно,

$$y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}.$$

Подставим  $y$  и  $y'$  в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \cancel{\frac{u}{x}} = \frac{\sin x}{x} &\Leftrightarrow u' = \sin x \Leftrightarrow u = -\cos x + C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{x}(-\cos x + C). \end{aligned}$$

#### Пример 2

Найдём закон изменения силы тока в электрической цепи.

Здесь  $E = E(t)$  – Э.Д.С. (электродвижущая сила),  $R$  – сопротивление,  $L$  – индуктивность.

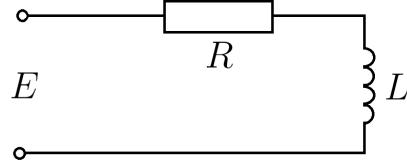


Рис. 6: Электрическая цепь

Напишем закон Ома для цепи:

$$E = I \cdot R + L \frac{dI}{dt}, \text{ где } I - \text{ сила тока.}$$

Будем считать Э.Д.С. постоянной:  $E(t) = E_0$ .

Пусть в начальный момент времени сила тока равна  $I_0$ . Тогда получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} \cdot I = \frac{E_0}{L}, \\ I(0) = I_0. \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$I(t) = v \cdot e^{-\int \frac{R}{L} dt} = v \cdot e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Соответственно,

$$I' = v' \cdot e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} v \cdot e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Подставляем  $I$  и  $I'$  в уравнение:

$$v' \cdot e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} v \cdot e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{R}{L} v \cdot e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{E_0}{L} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v' = \frac{E_0}{L} e^{\frac{R}{L} t} \Leftrightarrow dv = \frac{E_0}{L} e^{\frac{R}{L} t} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{E_0}{L} \cdot \int e^{\frac{R}{L} t} dt = \frac{E_0}{R} e^{\frac{R}{L} t} + C \Leftrightarrow \left/ I = v \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \right/$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{E_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Постоянную  $C$  найдем из начального условия:

$$I\Big|_{t=0} = I_0 \Leftrightarrow C = I_0 - \frac{E_0}{R}.$$

Итак, решение задачи Коши:

$$\underline{I(t) = \frac{E_0}{R} + \left( I_0 - \frac{E_0}{R} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.}$$

Заметим, что  $I(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{E_0}{R}$ , то есть при  $t \rightarrow \infty$  сила тока стремится к постоянному значению  $\frac{E_0}{R}$ .

## 1.6 Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^a, \quad , \text{ где } a = \text{const}, a \neq 0, a \neq 1. \quad (40)$$

Его решение можно получить двумя способами.

### I способ (сведение к линейному уравнению)

Разделим обе части уравнения (40) на  $y^a$ :

$$\frac{y'}{y^a} + p(x)y^{1-a} = q(x).$$

Сделаем замену:  $z = y^{1-a}$ .

Соответственно,

$$z' = (1-a) \cdot y^{-a} \cdot y' \Leftrightarrow \frac{y'}{y^a} = \frac{z'}{1-a}.$$

Подстановим  $z$  и  $z'$  в исходное уравнение:

$$\frac{1}{1-a}z' + p(x)z = q(x). \quad (41)$$

Мы получили линейное уравнение.

### II способ (сведение к уравнению с разделяющимися переменными)

Сделаем замену переменной как в линейном уравнении:

$$y = u \cdot e^{-\int p(x)dx}. \quad (42)$$

Тогда

$$y' = u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)).$$

Подставим  $y$  и  $y'$  в уравнение (40):

$$\begin{aligned} u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + \cancel{u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x))} + \cancel{p(x)u \cdot e^{-\int p(x)dx}} &= q(x)u^a \cdot e^{-a \int p(x)dx} \\ \Leftrightarrow u' \cdot e^{-\int p(x)dx} &= q(x)u^a \cdot e^{-a \int p(x)dx} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow du &= q(x)u^a \cdot e^{(1-a) \int p(x)dx} \cdot dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{du}{u^a} &= q(x) \cdot e^{(1-a) \int p(x)dx} \cdot dx. \end{aligned} \tag{43}$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными.

### Пример

$$xy' + y = y^2 \ln x \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x} \cdot y^2.$$

Замена:

$$y = u \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} = u \cdot e^{-\ln|x|} = \frac{u}{x}.$$

Соответственно,

$$y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}.$$

Подставим  $y$  и  $y'$  в исходное уравнение:

$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \cancel{\frac{u}{x}} = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{u^2}{x^2} \Leftrightarrow u' = u^2 \cdot \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ v = -\frac{1}{x}, \quad dv = \frac{1}{x^2} dx. \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \Leftrightarrow u = \frac{x}{1 + Cx + \ln x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}}.$$

## 1.7 Уравнения в полных дифференциалах

*Определение*

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (44)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции  $u(x, y)$ :

$$Mdx + Ndy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \quad (45)$$

Условие того, что  $Mdx + Ndy$  представляет собой полный дифференциал:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (46)$$

Если это условие выполнено, то восстановить функцию  $u(x, y)$  с точностью до константы по её известному полному дифференциальному

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (47)$$

можно с помощью криволинейного интеграла. А именно, зафиксируем некоторую точку  $(x_0, y_0)$ . Тогда криволинейный интеграл

$$u(x, y) = \int_L (M(x, y)dx + N(x, y)dy) \quad (48)$$

по произвольной кривой от точки  $(x_0, y_0)$  до текущей точки  $(x, y)$  даст значение функции  $u(x, y)$ , дифференциал которой имеет вид (47). Изменение начальной точки  $(x_0, y_0)$  приводит к добавлению постоянной (функция  $u(x, y)$  находится с точностью до константы).

Формула (48) принимает более удобный вид, если кривую  $L$  выбрать в виде ломаной, показанной на рисунке.

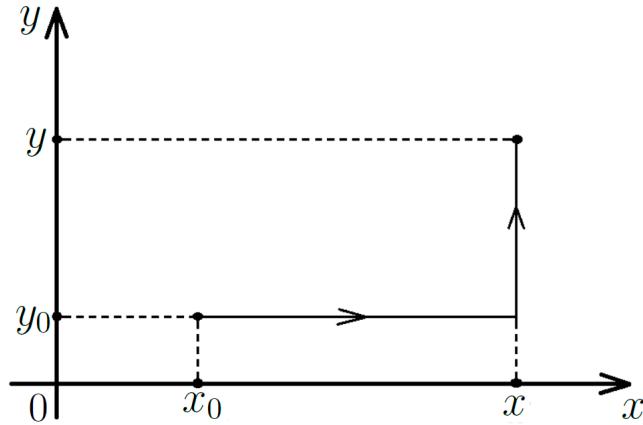


Рис. 7: Кривая интегрирования  $L$

При таком выборе  $L$  имеем:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy. \quad (49)$$

Соответственно, решение уравнения:

$$u(x, y) = C. \quad (50)$$

## Пример

$$(\sin(xy) + xy \cos(xy))dx + x^2 \cos(xy)dy = 0.$$

Проверим, что левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал.

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= x \cos(xy) + x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) = \\ &= 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy), \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  и мы можем воспользоваться формулой (49). В качестве точки  $(x_0, y_0)$  выберем начало координат  $(0, 0)$ . Тогда:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x (\sin(x \cdot 0) + x \cdot 0 \cdot \cos(x \cdot 0))dx + \int_0^y x^2 \cos(xy)dy = \\ &= x \cdot \sin(xy) \Big|_0^y = x \sin(xy) = C. \end{aligned}$$

Итак, общий интеграл уравнения:

$$\underline{x \sin(xy) = C.}$$

## Интегрирующий множитель.

В некоторых случаях, когда уравнение  $Mdx + Ndy = 0$  не является уравнением в полных дифференциалах, удаётся подобрать функцию  $\mu(x, y)$ , после умножения на которую левая часть уравнения превращается в полный дифференциал:

$$du = \mu Mdx + \mu Ndy. \quad (51)$$

Такая функция  $\mu(x, y)$  называется интегрирующим множителем. Напи-

шем условие того, что  $du$  является полным дифференциалом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow N \cdot \underbrace{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x}}_{\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}} - M \cdot \underbrace{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}}_{\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow N \cdot \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \cdot \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{52}
 \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения интегрирующего множителя мы получим уравнение в частных производных. Иногда удаётся найти его решение. Если  $\mu = \mu(x)$ , то  $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$  и уравнение (52) примет вид:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{53}$$

Если правая часть уравнения не зависит от  $y$ , то  $\ln \mu$  находится интегрированием.

### Пример

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(x + y^2)}_M dx - \underbrace{2xy}_N dy = 0. \\
 & \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - (-2y)}{-2xy} = -\frac{2}{x}.
 \end{aligned}$$

Тогда уравнение (53) примет вид:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \ln \mu = -2 \ln |x| + C.$$

Поскольку интегрирующий множитель  $\mu(x)$  – это одно из решений уравнения (53), то выберем  $C = 0$ . Тогда:

$$\ln \mu = -2 \ln |x| = \ln \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{x^2}.$$

Домножим исходное уравнение на  $\mu = \frac{1}{x^2}$ :

$$\frac{x + y^2}{x^2} dx - 2 \frac{xy}{x^2} dy = 0.$$

Мы получили уравнение в полных дифференциалах. В качестве точки  $(x_0, y_0)$  выберем  $(1, 0)$ . Тогда:

$$u(x, y) = \int_1^x \frac{1}{x} dx - 2 \int_0^y \frac{y}{x} dy = \ln |x| - \frac{y^2}{x} = C.$$

Итак, общий интеграл уравнения:

$$\underline{x = C_1 \cdot e^{\frac{y^2}{x}}}.$$

## 1.8 Особые решения дифференциальных уравнений

### *Определение*

Решение  $y = \varphi(x)$  дифференциального уравнения

$$\Phi(x, y, y') = 0 \tag{54}$$

называется **особым**, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, то есть если через каждую его точку  $(x_0, y_0)$  кроме этого решения проходит и другое решение, имеющее в точке  $(x_0, y_0)$  ту же касательную, что и решение  $y = \varphi(x)$ , но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности  $(x_0, y_0)$ . График особого решения будем называть **особой интегральной кривой** уравнения (54).

### Пример

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}} \quad \left| \cdot \frac{dx}{3y^{\frac{2}{3}}} \right. \leftarrow \text{здесь мы предполагаем, что } y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy = dx \Leftrightarrow y^{\frac{1}{3}} = x + C \Leftrightarrow y = (x + C)^3$$

Таким образом, интегральные кривые – это семейство кубических парабол, получаемых параллельными переносом вдоль оси  $OX$ .

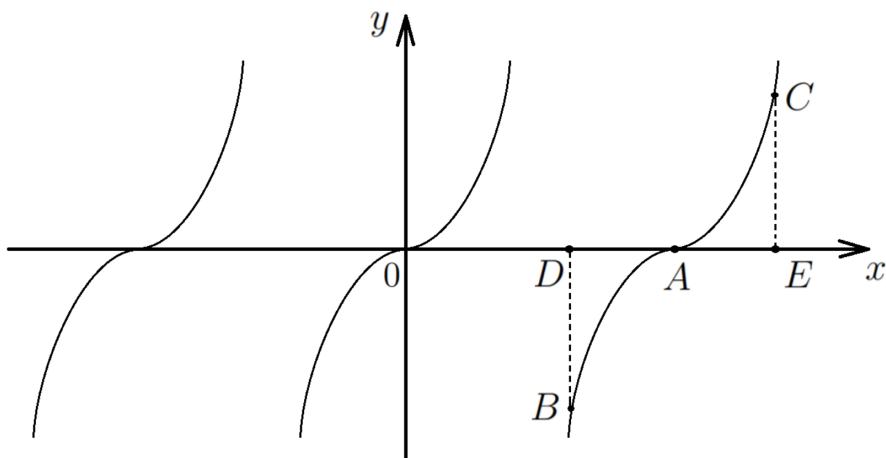


Рис. 8: Интегральные кривые  $y = (x + C)^3$ .

Однако, уравнение имеет ещё решение  $y = 0$ , которое не содержится в общем решении. Дело в том, что частная производная по  $y$  от правой части уравнения равна  $2y^{-\frac{1}{3}}$ , то есть не существует при  $y = 0$ . А значит теорема Пикара о существовании и единственности решения дифференциального уравнения будет выполнена только при  $y > 0$  и при  $y < 0$ . Эти области заполнены параболами. Через каждую точку проходит только одна парабола.

Через точку  $(x_0, 0)$  проходит ещё решение  $y = 0$ , то есть единственности решения нет. Если выделить отрезок  $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ , то в нём определены четыре решения уравнения:

- 1) Парабола  $BAC$ ;
- 2) Отрезок оси  $DAE$ ;
- 3) Линия  $BAE$  (парабола и отрезок оси);

4) Линия  $DAC$  (отрезок оси и парабола).

Действительно, в уравнении участвует только функция  $y$  и её производная  $y'$ . При  $y = 0$  функция  $y$  и производная  $y'$  сохраняют непрерывность, в том числе при переходе с прямой на параболу. Таким образом, можно свободно переходить с параболы на прямую и составлять любые их комбинации без нарушения уравнения. Итак, через каждую точку  $(x_0, 0)$  на оси проходит “в малом” (то есть для сколь угодно малого  $\delta$ ) четыре интегральные кривые.

Если взять точку  $(x_0, y_0)$  при  $y_0 > 0$ , то через неё проходит единственная парабола. Но если, спускаясь по указанной параболе, мы дойдём до оси  $OX$ , то там у нас есть бесконечно много возможностей продолжать эту интегральную линию:

- а) Спускаться по той же параболе;
- б) Идти по оси;
- в) Идти по оси направо, а затем подниматься по другой параболе;

И так далее.

Таким образом, через каждую точку плоскости не “в малом”, а “в целом” проходит бесконечно много интегральных кривых.

С вопросом об особых решениях тесно связаны теория бифуркаций и теория катастроф. Катастрофами называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. Теория бифуркаций изучает изменение качественной картины при изменении параметров, от которых зависит система. В частности, при каких значениях параметров происходит разветвление или слияние интегральных кривых для дифференциальных уравнений, описывающих данную систему.

## 2 Дифференциальные уравнения высших порядков

### 2.1 Основные понятия

Обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка имеет вид

$$\Phi\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \quad (55)$$

или, в решённом относительно старшей производной  $y^{(n)}$ , вид

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right). \quad (56)$$

Всякая функция  $y(x)$ , имеющая непрерывные производные вплоть до  $n$ -го порядка и удовлетворяющая уравнению (55) или (56), называется решением этого уравнения, а сама задача нахождения решений дифференциального уравнения называется задачей интегрирования дифференциального уравнения.

### Пример

Рассмотрим прямолинейное движение точки массы  $m$  под действием силы  $\vec{F} = \vec{F}\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ . Силу  $\vec{F}$  считаем функцией времени  $t$ , координаты  $x$  и скорости  $\frac{dx}{dt}$ . Здесь мы приняли прямую, по которой движется точка, за ось  $OX$ . Второй закон Ньютона даёт нам дифференциальное уравнение движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (57)$$

Интегрирование уравнения (57) определит зависимость  $x$  от  $t$ . Для получения определённого решения задачи мы должны задать ещё начальные условия движения, а именно положение точки и её скорость в некоторый начальный момент времени, например при  $t = 0$ :

$$\begin{cases} x\Big|_{t=0} = x_0, \\ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = x'_0. \end{cases} \quad (58)$$

Для уравнения  $n$ -го порядка (55) или (56) начальные условия состоят в задании функции  $y$  и её производных до  $(n - 1)$ -го порядка включительно при некотором значении  $x = x_0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} y|_{x=x_0} = y_0, \\ y'|_{x=x_0} = y'_0, \\ \dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \end{array} \right. \quad (59)$$

Здесь  $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  – определённые числа.

Для уравнения  $n$ -го порядка (56) имеет место теорема существования и единственности, аналогичная теореме Пикара.

### Теорема 3 (Теорема существования и единственности решения)

Пусть функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  однозначна, непрерывна и имеет непрерывные частные производные по  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  при значениях аргументов  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  и всех значениях, достаточно близких к ним. Тогда уравнение (56) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (59).

Без доказательства.

Общее решение дифференциального уравнения можно определить по аналогии с формулами (5) и (6) для уравнения 1-го порядка.

#### *Определение*

Общее решение дифференциального уравнения  $n$ -го порядка – это семейство функций

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (60)$$

удовлетворяющих уравнению при любых значениях  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Также это семейство должно удовлетворять условиям, что при любых начальных условиях найдётся такой набор постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  такой, что функция  $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  удовлетворяет этим начальным условиям.

Общее решение может быть записано и в неявном виде:

$$\psi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \quad (61)$$

Придавая  $C_1, C_2, \dots, C_n$  определённые значения, получим частное решение уравнения (56).

## 2.2 Уравнения, допускающие понижение порядка

**1) Уравнения вида  $y^{(n)} = f(x)$ .**

Уравнение  $y^{(n)} = f(x)$  решается с помощью  $n$ -кратного интегрирования.

**Пример**

$$\begin{aligned} y''' = \sin x &\Leftrightarrow y'' = -\cos x + C_1 \Leftrightarrow y' = -\sin x + C_1 x + C_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \cos x + \frac{C_1}{2} \cdot x^2 + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

**2) Уравнения вида  $\Phi(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ .**

Здесь уравнение не содержит функции  $y$  и её нескольких последовательных производных  $y', y'', \dots, y^{(k-1)}$ .

Сделаем замену:

$$z(x) = y^{(k)}. \quad (62)$$

Тогда порядок уравнения понизится на  $k$  единиц:

$$\Phi\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0. \quad (63)$$

Если мы найдём общий интеграл этого последнего уравнения

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}), \quad (64)$$

то  $y$  определится из уравнения:

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}). \quad (65)$$

### Пример

$$y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

Сделаем замену:  $y' = z(x)$ . Тогда  $y'' = \frac{dz}{dx}$ .

Подставим  $y'$  и  $y''$  в уравнение:

$$z' + \frac{1}{x}z = x \quad \text{— линейное уравнение 1-го порядка.}$$

Замена:

$$z = u \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} \Leftrightarrow z = u \cdot e^{-\ln|x|} \Leftrightarrow z = \frac{u}{|x|} \Leftrightarrow z = \frac{u}{x}.$$

/ Знак и константу интегрирования внести в функцию  $u$  /

Тогда  $z' = -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot u'$  и уравнение примет вид:

$$-\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot u' + \frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x} = x \Leftrightarrow u' = x^2 \Leftrightarrow u = \frac{x^3}{3} + C_1.$$

Вернёмся к старым переменным.

$$z = \frac{u}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$$

$$y' = z \Leftrightarrow y = \int z dx = \int \left( \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \right) dx = \underline{\underline{\frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2}}$$

### 3) Уравнения вида $\Phi(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ .

Здесь уравнение не содержит независимой переменной  $x$ .

Примем  $y$  за независимую переменную и сделаем замену:

$$y' = p(y). \quad (66)$$

Этим мы понизим порядок уравнения на 1. В ответе получим функцию  $x = x(y)$ . Найдём, как преобразуются старшие производные при такой замене.

$$y'' = \frac{d}{dx} \left( \underbrace{\frac{dy}{dx}}_p \right) = \frac{d}{dx}(p(y)) = \frac{dp}{dy} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_p = p \cdot \frac{dp}{dy}. \quad (67)$$

$$\begin{aligned}
y''' &= \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx} \left( p(y) \cdot \frac{dp}{dy} \right) = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} + p(y) \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{dp}{dy} \right) = \\
&\quad \left. \begin{aligned}
\frac{dp}{dx} &= \frac{dp}{dy} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_p \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{dp}{dy} \right) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_p \\
&= p \cdot \left( \frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \cdot \frac{d^2 p}{dy^2}.
\end{aligned} \right) \quad (68)
\end{aligned}$$

### Пример

$$2yy'' + (y')^2 = 0.$$

Сделаем замену:  $y' = p(y)$ . Тогда  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ .

Подставим  $y'$  и  $y''$  в уравнение:

$$\begin{aligned}
2yp \frac{dp}{dy} + p^2 &= 0 \quad \left| \cdot \frac{dy}{p} \right. \leftarrow \text{здесь теряем решение } p = 0 \text{ (или } y = C) \\
\Leftrightarrow 2ydp + pdy &= 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{2yp} \right. \leftarrow \text{здесь теряем решения: } y = 0 \text{ и } p = 0 \Leftrightarrow y = C \\
\Leftrightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dy}{2y} &= 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2} \frac{dy}{y}.
\end{aligned}$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\ln |p| = -\frac{1}{2} \ln |y| + \frac{1}{2} \ln C_1 \Leftrightarrow 2 \ln |p| + \ln |y| = \ln C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln p^2 |y| = \ln C_1 \Leftrightarrow p^2 |y| = C_1 \Leftrightarrow p = \pm \sqrt{\frac{C_1}{|y|}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} p = \pm \frac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{y}} & \text{при } y > 0 \\ p = \pm \frac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{-y}} & \text{при } y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\langle p = y' = \frac{dy}{dx} \right\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}dy = \pm \sqrt{C_1}dx, & y > 0 \\ \sqrt{-y}dy = \pm \sqrt{C_1}dx, & y < 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \pm \sqrt{C_1}x + C_2, & y > 0 \\ \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = \pm \sqrt{C_1}x + C_2, & y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}|y|^{\frac{3}{2}} = \pm \sqrt{C_1}x + C_2 \\
&\Leftrightarrow \underline{|y|^{\frac{3}{2}} = \widetilde{C}_1x + \widetilde{C}_2}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в это решение входят потерянные ранее частные решения  $y = 0$  и  $y = C$ .

**4) Уравнения вида**  $\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$ .

Здесь левая часть уравнения представляет собой полную производную по  $x$ . Проинтегрировав уравнение, мы понизим его порядок на 1.

**Пример**

$$\begin{aligned}
&e^{x+(y')^2} + 2y'y'' \cdot e^{x+(y')^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x+(y')^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow e^{x+(y')^2} = C \Leftrightarrow x + (y')^2 = C_1 \Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{C_1 - x} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow dy = \pm(C_1 - x)^{\frac{1}{2}}dx = \mp(C_1 - x)^{\frac{1}{2}}d(C_1 - x) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \underline{y = \mp\frac{2}{3}(C_1 - x)^{\frac{3}{2}} + C_2}.
\end{aligned}$$

5) Уравнения вида  $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ,

где  $\Phi$  – однородная функция относительно  $y, y', \dots, y^{(n)}$ .

*Определение*

$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)})$  называется однородной функцией  $k$ -го порядка относительно переменных  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , если она удовлетворяет следующему свойству:

$$\Phi(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k \cdot \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}). \quad (69)$$

При  $y \neq 0$  сделаем замену переменных:

$$z = \frac{y'}{y}. \quad (70)$$

Тогда производные преобразуются по следующему правилу:

$$\begin{aligned} y' &= zy, \\ y'' &= z'y + zy' = z'y + z^2y. \end{aligned}$$

И так далее. Таким образом, порядок уравнения понизится на 1. Функцию  $y = 0$  следует рассмотреть отдельно.

**Пример**

$$xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0.$$

Сделаем замену:

$$z = \frac{y'}{y} \Leftrightarrow y' = zy \quad \left/ \text{Здесь мы предполагаем, что } y \neq 0 \right/$$

Соответственно,  $y'' = y(z' + z^2)$ .

Подставим  $y'$  и  $y''$  в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} xy^2(z' + z^2) - xz^2y^2 - y^2z &= 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{y^2} \right. \\ \Leftrightarrow xz' - z &= 0 \Leftrightarrow xdz = zdx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dz}{z} &= \frac{dx}{x} \quad \leftarrow \text{здесь теряем решение } z = 0 \Leftrightarrow y = C \\ \Leftrightarrow \ln|z| &= \ln|x| + \ln C \Leftrightarrow |z| = C|x|, \quad C > 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow z = C_1x, \quad C_1 \neq 0 \Leftrightarrow \left| z = \frac{y'}{y} \right| \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = C_1x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = C_1xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = C_1x dx \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{C_1x^2}{2} + \ln C_2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow |y| = C_2 \cdot e^{\frac{C_1x^2}{2}}, \quad C_2 > 0 \Leftrightarrow y = \widetilde{C}_2 \cdot e^{\frac{C_1x^2}{2}}, \quad \text{где } \widetilde{C}_2 \neq 0, \quad C_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что функция  $y = 0$  также является решением уравнения. Однако, в процессе решения мы её потеряли. Следовательно, нужно добавить её в ответ. Сделаем это, сняв ограничение на постоянную  $\widetilde{C}_2$ . Аналогично поступим с решением  $y = C$ , сняв ограничение на  $C_1$ .

Ответ:  $y = C_3 \cdot e^{\frac{C_4x^2}{2}}$ .

### 3 Линейные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка

#### 3.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения

*Определение*

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (71)$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка.

*Обозначение:* ЛОДУ.

#### Теорема 4

Если  $y_1$  и  $y_2$  – частные решения ЛОДУ (71), то  $\lambda y_1 + \mu y_2$ , где  $\lambda, \mu = \text{const}$  также будет решением этого уравнения.

Доказательство:

Подставим  $\lambda y_1 + \mu y_2$  в уравнение (71):

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)^{(n)} + a_1(x) \cdot (\lambda y_1 + \mu y_2)^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot (\lambda y_1 + \mu y_2) =$$

/ Перегруппируем слагаемые, воспользовавшись  
 линейностью операции дифференцирования /

$$\lambda \underbrace{\left( y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_1 \right)}_{=0 \text{ в силу уравнения (71)}} +$$

$$+ \mu \underbrace{\left( y_2^{(n)} + a_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_2 \right)}_{=0 \text{ в силу уравнения (71)}} = 0.$$

■

Итак, мы доказали, что множество решений замкнуто относительно ли-

нейных операций (сложение функций и умножение функций на число). Следовательно, оно образует линейное пространство.

Определение линейной независимости элементов уже было дано в линейной алгебре. Поясним, какую специфику оно имеет в случае пространства функций  $y(x)$ .

### *Определение*

Функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  называют линейно зависимыми на интервале  $(a, b)$ , если существуют постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , не все равные нулю, такие, что для всех значений  $x$  из этого интервала справедливо тождество:

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0. \quad (72)$$

Если же тождество выполняется только при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , то функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  называют линейно независимыми.

### *Замечание*

Для двух функций определение упрощается. Две функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  будут линейно зависимыми на интервале  $(a, b)$ , если выполнено:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda = \text{const} \quad (\text{то есть } y_1 = \lambda y_2).$$

### **Пример 1**

Набор функций  $1, x, x^2, x^3$  будет линейно независимым на всей вещественной оси. Чтобы проверить это, приравняем к нулю линейную комбинацию этих функций.

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 \equiv 0 \quad \forall x \text{ только при } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Действительно, если хотя бы один из коэффициентов  $\alpha_i \neq 0$ , то в левой части тождества стоит полином степени не выше третьей.

По основной теореме алгебры он может обращаться в нуль не более чем в 3 точках. А у нас равенство нулю тождественное.

Значит  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ .

**Пример 2**

Набор функций:  $1, 3\sin^2 x, 4\cos^2 x$  является линейно зависимым на  $\mathbb{R}$ .

Действительно, при  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = \frac{1}{3}, \alpha_3 = \frac{1}{4}$  получим:

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 3\sin^2 x + \alpha_3 \cdot 4\cos^2 x = -1 + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} = 0.$$

**Определение**

Любой набор из  $n$  линейно независимых решений  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  уравнения (71) называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

Проверить линейную независимость решений  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  можно с помощью определителя Вронского:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (73)$$

Поскольку вронскиан составлен из функций  $y_i(x)$ , то он сам является функцией одной переменной  $x$ .

**Теорема 5**

$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv 0 \quad \forall x \Leftrightarrow$  решения  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы.

$W \neq 0$  хотя бы для какого-нибудь  $x \Leftrightarrow$  решения  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  линейно независимы.

Без доказательства.

**Пример 3**

В примерах 1 и 2 линейную независимость решений можно было прове-

рить с помощью определителя Вронского.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{функции } 1, x, x^2, x^3 \text{ линейно независимы.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3\sin^2 x & 4\cos^2 x \\ 0 & 3\sin 2x & -4\sin 2x \\ 0 & 6\cos 2x & -8\cos 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\sin 2x & -4\sin 2x \\ 6\cos 2x & -8\cos 2x \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Следовательно,  $1, 3\sin^2 x, 4\cos^2 x$  линейно зависимы.

### *Замечание*

Теорему 5 можно уточнить на случай, когда функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  являются решениями ЛОДУ (71):

### **Теорема 6**

Если  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  – решения одного и того же ЛОДУ (71) с непрерывными коэффициентами  $a_1(x), \dots, a_n(x)$ , то вронскиан  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$  либо равен нулю тождественно, либо не обращается в нуль ни в одной точке.

Доказательство будет приведено позднее.

### **Теорема 7**

Общее решение ЛОДУ есть линейная комбинация решений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  из фундаментальной системы решений:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (74)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные.

Доказательство:

По теореме 4 линейная комбинация решений ЛОДУ есть решение. Для того, чтобы проверить, что это общее решение, нужно убедиться, что

при любых начальных условиях в некоторой точке  $x_0$ :

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \quad (75)$$

найдутся такие постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , что  $y(x)$  будет удовлетворять этим условиям.

Проверим это. Подставим  $y(x)$  из (74) в условия (75). Мы получим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов  $C_1, C_2, \dots, C_n$ :

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \dots + C_ny_n(x_0) = y_0, \\ C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) + \dots + C_ny'_n(x_0) = y'_0, \\ \dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (76)$$

Определитель этой неоднородной линейной системы — это вронскиан  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Для фундаментальной системы решений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  он не обращается в нуль ни в одной точке (согласно теоремам 5 и 6 и определению фундаментальной системы). Значит определитель системы (76) отличен от нуля и по альтернативе Фредгольма система имеет единственное решение при любой правой части.

■

### Свойства определителя Вронского.

#### 1) Формула Лиувилля-Остроградского.

а) Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (77)$$

Пусть  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  – решения этого уравнения.

Воронскиан решений  $y_1$ ,  $y_2$  имеет вид:

$$W(x) = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2. \quad (78)$$

Выясним характер зависимости  $W(x)$ . Для этого составим дифференциальное уравнение для  $W(x)$  и решим его.

Найдём производную  $\frac{dW}{dx}$ .

$$\frac{dW}{dx} = (y_1 y'_2 - y'_1 y_2)'_x = y'_1 y'_2 + y_1 y''_2 - y''_1 y_2 - y'_1 y'_2 = y_1 y''_2 - y''_1 y_2 =$$

↗  $y''_1$  и  $y''_2$  выразим из уравнения (77) :

$$y''_1 = -py'_1 - qy_1, \quad y''_2 = -py'_2 - qy_2. \quad \text{↗}$$

$$= -py_1 y'_2 - qy_1 y_2 + py'_1 y_2 + qy_1 y_2 = -p(y_1 y'_2 - y'_1 y_2) = -pW. \quad (79)$$

Таким образом,  $\frac{dW}{dx}$  оказалось выражено через  $W(x)$ , и мы получили дифференциальное уравнение:

$$\frac{dW}{dx} = -pW. \quad (80)$$

Пусть  $W(x) \neq 0$ . Тогда  $W(x)$  отлична от нуля в некоторой точке  $x_0$ . В силу непрерывности  $W(x)$  будет отлична от нуля в некоторой окрестности точки  $x_0$ . В этой окрестности разделим обе части уравнения (80) на  $W$ :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{W} = -p(x)dx &\Leftrightarrow \ln|W| = - \int_{x_0}^x p(x)dx + C_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow W = C \cdot e^{- \int_{x_0}^x p(x)dx}. \end{aligned}$$

При  $x = x_0$  получим:

$$W(x_0) = C \cdot \underbrace{e^{- \int_{x_0}^{x_0} p(x)dx}}_{=1} = C.$$

Следовательно,

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx} \quad (81)$$

– формула Лиувилля-Остроградского.

Из формулы (81) следует, что если определитель Вронского отличен от нуля в некоторой точке  $x_0$ , то он будет отличен от нуля на всей вещественной оси.

Формула (81) доказывает теорему 6 для уравнения второго порядка.

**б)** Докажем формулу Лиувилля-Остроградского для линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0. \quad (82)$$

Пусть  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – решения уравнения (82).

$$W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (83)$$

Найдём производную  $\frac{dW}{dx}$ . Производная от определителя есть сумма определителей, в каждом из которых продифференцирована одна из его строк.

$$\frac{dW}{dx} = \underbrace{\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (ибо две строки определителя совпали)}} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_n \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (ибо две строки определителя совпали)}} + \dots$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} =$$

Выразим  $y^{(n)}$  из уравнения (82) :  $y^{(n)} = -a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_n y$ . //

$$= \begin{vmatrix} y_1 & \dots & & y_n \\ y'_1 & \dots & & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & & y_n^{(n-2)} \\ -a_1 y_1^{(n-1)} - a_2 y_1^{(n-2)} - \dots - a_n y_1 & \dots & -a_1 y_n^{(n-1)} - a_2 y_n^{(n-2)} - \dots - a_n y_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -a_1 y_1^{(n-1)} & \dots & -a_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -a_2 y_1^{(n-2)} & \dots & -a_2 y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}}_{=0} + \dots + \dots + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -a_n y_1 & \dots & -a_n y_n \end{vmatrix}}_{=0} = -a_1 W(x). \quad (84)$$

Мы получили уравнение, аналогичное уравнению (80):

$$\frac{dW}{dx} = -a_1(x)W. \quad (85)$$

Решая его, приходим к формуле:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x a_1(x)dx} \quad (86)$$

– формула Лиувилля-Остроградского для уравнения  $n$  – го порядка.

Формула (86) доказывает теорему 6 в общем случае.

**2) Построение общего решения уравнения  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  в случае, когда одно из частных решений известно.**

Рассмотрим уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (87)$$

В общем случае его решение найти не удаётся. Однако, если известно некоторое частное решение  $y_1(x) \neq 0$ , то можно построить линейно независимое с ним решение  $y_2(x)$ . Это позволит написать общее решение уравнения (87):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (88)$$

Составим дифференциальное уравнение для  $y_2$  и решим его. Найдём производную  $\frac{d}{dx} \left( \frac{y_2}{y_1} \right)$ .

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{y'_2 y_1 - y'_1 y_2}{y_1^2} = \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2} \stackrel{\substack{\uparrow \\ (81)}}{=} \frac{W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}}{y_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}}{y_1^2} dx \Leftrightarrow y_2 = W(x_0) \cdot y_1 \cdot \int e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} \cdot \frac{dx}{y_1^2}. \quad (89)$$

Если  $\int e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} \cdot \frac{dx}{y_1^2} \neq 0$ , то решения  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы

и можно написать общее решение уравнения (87) :  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ .

### 3.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (90)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – некоторые постоянные. Согласно теореме 7, для того чтобы найти общее решение уравнения (90), нужно найти фундаментальную систему решений, то есть  $n$  линейно независимых решений уравнения (90):  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Будем искать эти решения в виде:

$$y = e^{\lambda x}. \quad (91)$$

Подставим  $y = e^{\lambda x}$  в уравнение (90).

Так как  $y' = \lambda e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ , получим:

$$\begin{aligned} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n) e^{\lambda x} &= 0 \Leftrightarrow \\ \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n &= 0. \end{aligned} \quad (92)$$

Пусть  $\lambda$  – корень уравнения (92). Тогда  $e^{\lambda x}$  есть решение уравнения (90). Уравнение (92) называется характеристическим уравнением для ЛОДУ (90). По основной теореме алгебры уравнение (92) имеет  $n$  корней (с учётом кратности). Вообще говоря, это комплексные корни.

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – корни уравнения (92). Нетрудно увидеть, что решения, отвечающие различным корням  $\lambda_1, \lambda_2$ , линейно независимы. Действительно, составим определитель Вронского:

$$W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0.$$

#### Замечание

Линейную независимость решений можно проверить и для  $n$  различных

корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

$$\begin{aligned}
 W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = \\
 &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \\
 &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \cdot \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^n (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0 \Rightarrow \text{решения линейно независимы.}
 \end{aligned}$$

Здесь мы получили определитель Вандермонда, значение которого известно. Таким образом, если все корни характеристического уравнения кратности  $n$  вещественны, то фундаментальная система решений состоит из следующих функций:

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}. \quad (93)$$

Если среди корней есть кратные, то для каждого из них нужно найти столько линейно независимых решений, какова его кратность. Рассмотрим эту ситуацию для уравнения 2 порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (94)$$

Напишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \quad (95)$$

Пусть  $\lambda_1$  – корень 2 кратности характеристического уравнения. Тогда дискриминант уравнения равен нулю:  $D = a_1^2 - 4a_2 = 0$ . Следовательно,

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2}. \quad (96)$$

Одно из решений уравнения (94) – это  $e^{\lambda_1 x}$ . Найдём второе решение, линейно независимое с ним. Будем искать его в виде:

$$y_2 = u(x) \cdot e^{\lambda_1 x}. \quad (97)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} y'_2 &= e^{\lambda_1 x} (u' + \lambda_1 u), \\ y''_2 &= e^{\lambda_1 x} (u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2 u). \end{aligned}$$

Подставим  $y_2$ ,  $y'_2$ ,  $y''_2$  в исходное уравнение (94):

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x} (u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2 u) + a_1 e^{\lambda_1 x} (u' + \lambda_1 u) + a_2 u e^{\lambda_1 x} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{\lambda_1 x} (u'' + \underbrace{(2\lambda_1 + a_1)}_{=0 \text{ (в силу (96))}} u' + \underbrace{(\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_2)}_{=0 \text{ (в силу (95))}} u) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u'' &= 0 \Leftrightarrow u = C_1 x + C_2. \end{aligned} \quad (98)$$

Выберем функцию  $u$  следующим образом:  $u = x$ . Тогда:

$$y_2 = x \cdot e^{\lambda_1 x}. \quad (99)$$

Проверим, что решения  $y_1$  и  $y_2$  будут линейно независимы:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x} \neq 0.$$

Таким образом, фундаментальная система решений для уравнения (94) имеет вид:

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}.$$

В общем случае для уравнения  $n$ -го порядка ситуация такова:

Каждому вещественному корню  $\lambda$  уравнения (92) кратности  $r$  соответствуют  $r$  линейно независимых решений уравнения (90):

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda x}. \quad (100)$$

Пусть  $\lambda = \alpha + i\beta$  – комплексный корень характеристического уравнения. Так как мы рассматриваем уравнение с вещественными коэффициентами, то из линейной алгебры известно, что если комплексное число

$\alpha + i\beta$  есть корень полинома кратности  $r$ , то  $\alpha - i\beta$  также будет являться корнем этого полинома кратности  $r$ . Тогда  $e^{(\alpha+i\beta)x}$  и  $e^{(\alpha-i\beta)x}$  будут решениями уравнения (90).

Линейные комбинации этих решений также будут решениями уравнения (90):

$$\frac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (101)$$

$$\frac{1}{2i}e^{(\alpha+i\beta)x} - \frac{1}{2i}e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (102)$$

Составим определитель Вронского и убедимся, что эти решения будут линейно независимыми:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} = \\ &= \alpha e^{2\alpha x} \cos \beta x \sin \beta x + \beta e^{2\alpha x} \cos^2 \beta x - \alpha e^{2\alpha x} \sin \beta x \cos \beta x + \\ &+ \beta e^{2\alpha x} \sin^2 \beta x = \underbrace{\beta e^{2\alpha x} (\cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x)}_{=1} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, паре комплексно сопряжённых корней  $\alpha \pm i\beta$  первой кратности соответствуют 2 линейно независимых решения уравнения (90):

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (103)$$

Если  $\alpha \pm i\beta$  являются корнями кратности  $r$ , то соответствующий набор линейно независимых решений таков:

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad e^{(\alpha-i\beta)x}, \quad xe^{(\alpha+i\beta)x}, \quad xe^{(\alpha-i\beta)x}, \quad \dots, \quad x^{r-1}e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad x^{r-1}e^{(\alpha-i\beta)x}. \quad (104)$$

Проверим, что функции из набора (104) действительно являются решениями уравнения (90).

Введём обозначение:  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  (аналогично для  $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ ).

При  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  набор функций (104) приобретает вид:

$$e^{\lambda_1 x}, \ x e^{\lambda_1 x}, \ \dots, \ x^{r-1} e^{\lambda_1 x}.$$

Выясним специфику уравнения (90) в случае, когда характеристическое уравнение имеет корень  $\lambda_1$  кратности  $r$ .

После подстановки  $e^{\lambda x}$  в уравнение (90) его левая часть примет вид:

$$(e^{\lambda x})^{(n)} + a_1 (e^{\lambda x})^{(n-1)} + \dots + a_n e^{\lambda x} = P(\lambda) e^{\lambda x}, \quad (105)$$

$$\text{где } P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (106)$$

— характеристический полином (левая часть характеристического уравнения).

Напомним определение кратности корня.  $\lambda_1$  есть корень кратности  $r$  характеристического полинома, если выполнено:

$$P(\lambda_1) = 0, \ P'(\lambda_1) = 0, \ \dots, \ P^{(r-1)}(\lambda_1) = 0, \ P^{(r)}(\lambda_1) \neq 0. \quad (107)$$

Продифференцируем  $m$  раз уравнение (105) по переменной  $\lambda$ . Используя формулу Лейбница для  $m$ -ой производной произведения  $P(\lambda) e^{\lambda x}$ , получим:

$$\begin{aligned} (x^m e^{\lambda x})^{(n)} + a_1 (x^m e^{\lambda x})^{(n-1)} + \dots + a_n (x^m e^{\lambda x}) = \\ = \sum_{k=0}^m C_m^k \cdot P^{(k)}(\lambda) \cdot x^{m-k} \cdot e^{\lambda x}. \end{aligned} \quad (108)$$

Подставим в уравнение  $\lambda = \lambda_1$ . При  $m \leq r-1$  по формуле (107) в правой части уравнения (108) получим 0:

$$(x^m e^{\lambda_1 x})^{(n)} + a_1 (x^m e^{\lambda_1 x})^{(n-1)} + \dots + a_n (x^m e^{\lambda_1 x}) = 0. \quad (109)$$

Из уравнения (109) нетрудно увидеть, что функция  $x^m e^{\lambda_1 x}$  будет являться решением уравнения (90) при  $m \leq r-1$ .

Следовательно, функции из набора (104) являются решениями уравнения (90).

Подведём итог. В фундаментальную систему решений ЛОДУ (90) нужно включать следующие функции, соответствующие корням характеристического уравнения:

**а)**  $\lambda_1$  – вещественный корень первой кратности:

$$e^{\lambda_1 x}; \quad (110)$$

**б)**  $\lambda_1$  – вещественный корень кратности  $r$ :

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda_1 x}; \quad (111)$$

**в)**  $\lambda_1 = \alpha \pm i\beta$  – пара комплексно сопряжённых корней первой кратности:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x; \quad (112)$$

**г)**  $\lambda_1 = \alpha \pm i\beta$  – пара комплексно сопряжённых корней кратности  $r$ :

$$\begin{aligned} & e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots \\ & \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned} \quad (113)$$

Общее решение ЛОДУ в соответствии с теоремой 7 есть линейная комбинация функций из фундаментальной системы решений с произвольными коэффициентами.

### Примеры

Найдём общие решения следующих уравнений:

**1)**  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ .

Характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 & \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0. \end{aligned}$$

Фундаментальная система решений (Ф.С.Р.):

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}, \\ y_2 = e^x, \\ y_3 = e^{-x}. \end{cases}$$

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.}$$

2)  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0.$$

$\lambda = 1$  – корень третьей кратности.

$$\Phi.C.P. : \begin{cases} y_1 = e^x, \\ y_2 = xe^x, \\ y_3 = x^2 e^x. \end{cases}$$

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x.}$$

3)  $y''' - 8y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \underbrace{-1}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{3}}_{\beta} i \end{cases} ; \quad \Phi.C.P. : \begin{cases} y_1 = e^{2x}, \\ y_2 = e^{-x} \cos(\sqrt{3}x), \\ y_3 = e^{-x} \sin(\sqrt{3}x). \end{cases}$$

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + C_3 e^{-x} \sin(\sqrt{3}x).}$$

4)  $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i$$

– каждый из корней второй кратности.

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x.}$$

5)  $y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i \text{ – каждый из корней второй кратности.}$$

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + C_3 x e^{-x} \cos x + C_4 x e^{-x} \sin x.}$$

6)  $y^V - y^{IV} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \pm i \text{ – каждый из корней второй кратности.} \end{cases}$$

Общее решение:

$$\underline{y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \cos x + C_5 x \sin x.}$$

### 3.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

*Определение*

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (114)$$

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка.

**Обозначение:** ЛНДУ.

**Теорема 8 (Теорема об общем решении ЛНДУ)**

Общее решение ЛНДУ (114) есть сумма частного решения неоднородного уравнения (114) и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$y(x) = \tilde{y}(x) + Y(x), \quad (115)$$

где  $\tilde{y}(x)$  – общее решение однородного уравнения,  $Y(x)$  – частное решение неоднородного уравнения.

Доказательство:

Пусть  $Y$  – некоторое решение ЛНДУ (114). Будем искать общее решение  $y$  уравнения (114) в виде:  $y = \tilde{y} + Y$ . Мы докажем теорему, если покажем, что для  $\tilde{y}$  возникает задача об общем решении соответствующего ЛОДУ.

Подставим  $y = \tilde{y} + Y$  в уравнение (114):

$$\tilde{y}^{(n)} + Y^{(n)} + a_1(x)\tilde{y}^{(n-1)} + a_1Y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\tilde{y} + a_n(x)Y = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{y}^{(n)} + a_1\tilde{y}^{(n-1)} + \dots + a_n\tilde{y} \right) + \underbrace{\left( Y^{(n)} + a_1Y^{(n-1)} + \dots + a_nY \right)}_{=f(x) \text{ (так как } Y \text{ – решение (114))}} = f(x) \\ & \Leftrightarrow \tilde{y}^{(n)} + a_1(x)\tilde{y}^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\tilde{y} = 0, \end{aligned}$$

то есть функция  $\tilde{y}$  удовлетворяет однородному уравнению. Для того, чтобы проверить, что  $\tilde{y}$  есть общее решение, нужно убедиться, что  $\tilde{y}$  удовлетворяет задаче Коши с произвольными начальными условиями.

Функция  $y$  должна удовлетворять следующим начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = \tilde{y}(x_0) + Y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = \tilde{y}'(x_0) + Y'(x_0) = y'_0, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) + Y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \quad (116)$$

где  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  – произвольные числа.

Тогда для функции  $\tilde{y}$  возникает задача Коши:

$$\begin{cases} \tilde{y}(x_0) = y_0 - Y(x_0), \\ \tilde{y}'(x_0) = y'_0 - Y'(x_0), \\ \dots \\ \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - Y^{(n-1)}(x_0), \end{cases} \quad (117)$$

где начальные условия могут быть произвольными. Таким образом, для  $\tilde{y}$  возникла задача Коши об общем решении ЛОДУ, что и доказывает теорему.

■

Общее решение ЛОДУ даётся формулой (74):

$$\tilde{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (118)$$

где  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – функции из фундаментальной системы решений,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные.

Если известно общее решение  $\tilde{y}$  однородного уравнения, то можно найти частное решение неоднородного. Для этого существуют различные методы.

### 3.4 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

1) Рассмотрим уравнение второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \quad (119)$$

Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$\tilde{y} = C_1y_1 + C_2y_2, \quad (120)$$

где  $y_1, y_2$  – линейно независимые решения однородного уравнения,  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Будем искать частное решение ЛНДУ (119) в следующем виде:

$$Y = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2. \quad (121)$$

Здесь  $u_1(x), u_2(x)$  – некоторые функции, которые нам нужно найти.

Отметим сходство формул (120) и (121). Мы варьируем произвольные постоянные  $C_1, C_2$  в формуле (120) и получаем вместо них некоторые функции  $u_1(x), u_2(x)$ .

Найдём производные  $Y', Y''$  и подставим их в уравнение (119).

$$Y' = u'_1y_1 + u_1y'_1 + u'_2y_2 + u_2y'_2.$$

Так как мы ищем частное решение уравнения, наложим на функции  $u_1, u_2$  дополнительное ограничение:

$$u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0. \quad (122)$$

Тогда  $Y'$  примет вид:

$$Y' = u_1y'_1 + u_2y'_2.$$

Соответственно,

$$Y'' = u'_1y'_1 + u_1y''_1 + u'_2y'_2 + u_2y''_2.$$

Подставим  $Y$ ,  $Y'$ ,  $Y''$  в исходное уравнение (119):

$$u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2 + a_1 u_1 y'_1 + a_1 u_2 y'_2 + a_2 u_1 y_1 + a_2 u_2 y_2 = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 \underbrace{(y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1)}_{=0 \text{ (} y_1 \text{ - решение ЛОДУ)}} + u_2 \underbrace{(y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2)}_{=0 \text{ (} y_2 \text{ - решение ЛОДУ)}} + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x). \quad (123)$$

Учитывая введённые ранее ограничения (122), получаем систему уравнений для функций  $u'_1$ ,  $u'_2$ :

$$\begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0, \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x). \end{cases} \quad (124)$$

Определитель этой системы представляет собой определитель Вронского решений  $y_1$ ,  $y_2$ :

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (125)$$

Определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке в силу линейной независимости решений  $y_1$ ,  $y_2$ .

Следовательно, система (124) разрешима единственным образом и при любой правой части. Пусть её решения имеют вид:

$$\begin{cases} u'_1 = \varphi_1(x), \\ u'_2 = \varphi_2(x). \end{cases} \quad (126)$$

Тогда функции  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  находятся интегрированием:

$$\begin{cases} u_1 = \int \varphi_1(x) dx, \\ u_2 = \int \varphi_2(x) dx. \end{cases} \quad (127)$$

**2)** Рассмотрим уравнение  $n$ -го порядка:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x). \quad (128)$$

Здесь все построения аналогичны.

Решение ЛОДУ имеет вид:

$$\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n. \quad (129)$$

Частное решение ЛНДУ ищем в виде:

$$Y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \dots + u_n(x)y_n(x). \quad (130)$$

Следуя описанной процедуре, получаем следующую систему уравнений для функций  $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ :

$$\begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 + \dots + u'_n y_n = 0, \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + \dots + u'_n y'_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + u'_n y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \quad (131)$$

Определитель этой системы – это определитель Вронского:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ни в одной точке.} \quad (132)$$

Следовательно, система (131) разрешима единственным образом и при любой правой части. Решая её, находим  $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ . Функции  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  находятся интегрированием.

## Пример

Решим следующее неоднородное уравнение:

$$y'' - \frac{1}{x}y' = x^2.$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$\tilde{y}'' - \frac{1}{x}\tilde{y}' = 0.$$

Сделаем замену:  $\tilde{y}' = z(x)$ . Тогда  $\tilde{y}'' = \frac{dz}{dx}$ .

Подставим  $\tilde{y}'$  и  $\tilde{y}''$  в уравнение:

$$\begin{aligned} z' - \frac{1}{x} \cdot z = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot z &\quad \left| \cdot \frac{dx}{z} \right. \leftarrow \text{здесь мы теряем решение } z = \tilde{y}' = 0 \Leftrightarrow \tilde{y} = \text{const} \\ \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} &\Leftrightarrow \left/ \text{Проинтегрируем} \right. \Leftrightarrow \ln|z| = \ln|x| + \ln C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \pm Cx = \tilde{C}_1 x. \end{aligned}$$

Вернёмся к старой переменной.

$$\tilde{y}' = \tilde{C}_1 x \Leftrightarrow \tilde{y} = \frac{\tilde{C}_1}{2} x^2 + C_2 = C_1 x^2 + C_2.$$

Заметим, что в это решение входит потерянное ранее решение  $\tilde{y} = \text{const}$ .

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$Y = u_1(x) \cdot x^2 + u_2(x).$$

Система уравнений (124) для функций  $u'_1$ ,  $u'_2$  примет вид:

$$\begin{cases} u'_1 \cdot x^2 + u'_2 = 0 \\ u'_1 \cdot 2x + u'_2 \cdot 0 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 = \frac{1}{2}x, \\ u'_2 = -\frac{1}{2}x^3. \end{cases}$$

Функции  $u_1$ ,  $u_2$  находятся интегрированием. Поскольку мы ищем частное решение уравнения, положим константы интегрирования равными нулю:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4}x^2, \\ u_2 = -\frac{1}{8}x^4. \end{cases}$$

Соответственно,

$$Y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^4 = \frac{1}{8}x^4.$$

Следовательно, общее решение ЛНДУ имеет вид:

$$y = \tilde{y} + Y = C_1 x^2 + C_2 + \frac{1}{8}x^4.$$

### 3.5 Интеграл Дюамеля

Рассмотрим важный частный случай ЛНДУ с постоянными коэффициентами:

$$y'' + k^2 y = f(x), \quad (133)$$

где  $k$  – некоторая вещественная постоянная.

Решим соответствующее однородное уравнение:

$$\tilde{y}'' + k^2 \tilde{y} = 0. \quad (134)$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -k^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm ik.$$

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\tilde{y} = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \quad (135)$$

Частное решение  $Y$  ЛНДУ (133) ищем в виде:

$$Y = u_1(x) \cos kx + u_2(x) \sin kx. \quad (136)$$

Система уравнений (124) для функций  $u'_1$ ,  $u'_2$  примет вид:

$$\begin{cases} u'_1 \cos kx + u'_2 \sin kx = 0, \end{cases} \quad (137)$$

$$\begin{cases} u'_1 \cdot (-k \sin kx) + u'_2 \cdot k \cos kx = f(x). \end{cases} \quad (138)$$

Домножим каждое из уравнений на соответствующий коэффициент и сложим их между собой.

$(137) \cdot k \cos kx + (138) \cdot (-\sin kx) :$

$$u'_1 \cdot k \cos^2 kx + u'_1 \cdot k \sin^2 kx = -f(x) \cdot \sin kx \Leftrightarrow u'_1(x) = -\frac{1}{k} f(x) \sin kx. \quad (139)$$

$(137) \cdot k \sin kx + (138) \cdot \cos kx :$

$$u'_2 \cdot k \sin^2 kx + u'_2 \cdot k \cos^2 kx = f(x) \cdot \cos kx \Leftrightarrow u'_2(x) = \frac{1}{k} f(x) \cos kx. \quad (140)$$

Функции  $u_1$ ,  $u_2$  находятся интегрированием:

$$u_1(x) = -\frac{1}{k} \int_{x_0}^x f(z) \sin kz dz, \quad (141)$$

$$u_2(x) = \frac{1}{k} \int_{x_0}^x f(z) \cos kz dz. \quad (142)$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{\cos kx}{k} \int_{x_0}^x f(z) \sin kz dz + \frac{\sin kx}{k} \int_{x_0}^x f(z) \cos kz dz = \\ &= \frac{1}{k} \int_{x_0}^x f(z) \cdot \underbrace{(-\cos kx \sin kz + \sin kx \cos kz)}_{\sin(kx - kz)} = \\ &= \frac{1}{k} \int_{x_0}^x f(z) \sin(k(x - z)) dz. \end{aligned} \quad (143)$$

Полученный интеграл называется интегралом Дюамеля.

Общее решение уравнения (133) имеет вид:

$$y = \tilde{y} + Y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{1}{k} \int_{x_0}^x f(z) \sin(k(x - z)) dz. \quad (144)$$

### Замечание

При решении задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + k^2 y = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (145)$$

в формуле (144) необходимо выбрать константы  $C_1$ ,  $C_2$  чтобы удовлетворить начальным условиям. При этом следует иметь в виду, что интеграл Дюамеля

$$Y = \frac{1}{k} \int_{x_0}^x f(z) \sin(k(x - z)) dz$$

удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$\begin{cases} Y(x_0) = 0, \\ Y'(x_0) = 0, \end{cases} \quad (146)$$

что позволяет упростить поиск констант  $C_1, C_2$ .

Проверим это.

$$Y(x_0) = \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x_0} f(z) \sin(k(x_0 - z)) dz = 0.$$

Для вычисления  $Y'$  воспользуемся формулой:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, z) dz = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} (f(x, z)) dz + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x). \quad (147)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y'(x_0) &= \left. \left( \frac{1}{k} \int_{x_0}^x f(z) \frac{\partial}{\partial x} (\sin(k(x - z))) dz + \frac{1}{k} f(x) \underbrace{\sin(k(x - x))}_{=0} \right) \right|_{x=x_0} = \\ &= \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x_0} f(z) \cdot k \cos(k(x_0 - z)) dz = 0. \end{aligned}$$

Интеграл Дюамеля часто используется при решении задач о колебаниях в механических системах или электрических цепях.

### 3.6 Метод неопределённых коэффициентов

Метод неопределённых коэффициентов работает только для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью  $f(x)$  специального вида.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (148)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – некоторые постоянные.

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения удаётся подобрать. Составим таблицу видов частных решений для различных видов правых частей  $f(x)$ .

**Таблица видов частных решений для различных видов правых частей**

Правая часть дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Виды частного решения
$P_m(x)$	1) Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$\tilde{P}_m(x)$
	2) Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности $s$	$x^s \tilde{P}_m(x)$
$P_m(x)e^{\alpha x}$	1) Число $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения	$\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
	2) Число $\alpha$ является корнем характеристического уравнения кратности $s$	$x^s \tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
$P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x$	1) Числа $\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x$
	2) Числа $\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности $s$	$x^s (\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x)$
$e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$	1) Числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$(\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$
	2) Числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности $s$	$x^s (\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$

$k$  – это наибольшая из степеней  $m$  и  $n$ .

$\tilde{P}_m(x)$  – это полином степени  $m$  с неопределенными коэффициентами.

### Замечание

Если правая часть уравнения  $f(x)$  есть сумма двух правых частей специального вида:  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , то частное решение следует искать в виде суммы двух решений:  $Y_1 + Y_2$ , где  $Y_1$  отвечает правой части  $f_1$ , а  $Y_2$  отвечает правой части  $f_2$ .

### Примеры

Найдём общие решения следующих уравнений:

1)  $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$ .

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$y''' - y'' = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2 &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 - \text{корень второй кратности} \\ \lambda = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\tilde{y} = C_1 + C_2x + C_3e^x.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом неопределённых коэффициентов. Посмотрим таблицу видов частных решений.

Число 0 является корнем характеристического уравнения второй кратности. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде:

$$Y = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Соответственно,

$$Y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,$$

$$Y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

$$Y''' = 24Ax + 6B.$$

Подставим  $Y'''$  и  $Y''$  в исходное уравнение:

$$24Ax + 6B - 12Ax^2 - 6Bx - 2C = 12x^2 + 6x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ :

$$\begin{array}{l} x^2 : \left. \begin{array}{l} -12A = 12 \\ 24A - 6B = 6 \\ 6B - 2C = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} A = -1, \\ B = -5, \\ C = -15. \end{array} \right. \end{array}$$

Тогда  $Y = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$ .

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = \tilde{y} + Y = \underline{C_1 + C_2x + C_3e^x} - x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

**2)  $y'' + y' = 4x^2e^x$ .**

Соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + y' = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda = 0, \\ \lambda = -1. \end{bmatrix}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\tilde{y} = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Число 1 не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение нужно искать в виде:

$$Y = (Ax^2 + Bx + C)e^x.$$

Соответственно,

$$Y' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x,$$

$$Y'' = 2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x.$$

Подставим  $Y'$  и  $Y''$  в исходное уравнение:

$$2Ae^x + (4Ax + 2B)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x + (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x = 4x^2e^x.$$

Разделим обе части уравнения на  $e^x$  и приведём подобные члены:

$$2Ax^2 + 6Ax + 2Bx + 2A + 3B + 2C = 4x^2.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ :

$$\left. \begin{array}{l} x^2 : 2A = 4 \\ x^1 : 6A + 2B = 0 \\ x^0 : 2A + 3B + 2C = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = -6, \\ C = 7. \end{cases}$$

Тогда  $Y = (2x^2 - 6x + 7)e^x$ .

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = \tilde{y} + Y = \underline{C_1 + C_2 e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)e^x}.$$

3)  $y'' + 4y = \sin 2x$ .

Соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\tilde{y} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Числа  $\pm 2i$  являются корнями характеристического уравнения кратности 1. Следовательно, частное решение нужно искать в виде:

$$Y = x(A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Соответственно,

$$Y' = A \sin 2x + B \cos 2x + 2Ax \cos 2x - 2Bx \sin 2x,$$

$$Y'' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x + 2A \cos 2x - 4Ax \sin 2x - 2B \sin 2x - 4Bx \cos 2x.$$

Подставим  $Y''$  и  $Y$  в исходное уравнение:

$$4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 4Ax \sin 2x - 4Bx \cos 2x + 4Ax \sin 2x + \\ + 4Bx \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow 4A \cos 2x - 4B \sin 2x = \sin 2x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\begin{array}{l} \cos 2x : \left. \begin{array}{l} 4A = 0 \\ -4B = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0, \\ B = -\frac{1}{4}. \end{array} \right. \\ \sin 2x : \end{array}$$

Тогда  $Y = -\frac{1}{4}x \cos 2x$ .

Общее решение уравнения:

$$\underline{y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x.}$$

4)  $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$ .

Соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3 - \text{корень второй кратности.}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\tilde{y} = (C_1 + C_2x)e^{3x}.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Числа  $1 \pm i$  не являются корнями характеристического уравнения. Следовательно, частное решение нужно искать в виде:

$$Y = (A \cos x + B \sin x)e^x.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned}
 Y' &= (-A \sin x + B \cos x)e^x + (A \cos x + B \sin x)e^x = \\
 &= (A + B) \cos x \cdot e^x + (B - A) \sin x \cdot e^x, \\
 Y'' &= -(A + B) \sin x \cdot e^x + (A + B) \cos x \cdot e^x + (B - A) \cos x \cdot e^x + \\
 &\quad +(B - A) \sin x \cdot e^x = -2A \sin x \cdot e^x + 2B \cos x \cdot e^x.
 \end{aligned}$$

Подставим  $Y'', Y'$  и  $Y$  в исходное уравнение:

$$\begin{aligned}
 -2A \sin x \cdot e^x + 2B \cos x \cdot e^x - 6(A + B) \cos x \cdot e^x - 6(B - A) \sin x \cdot e^x + \\
 +9A \cos x \cdot e^x + 9B \sin x \cdot e^x = 25e^x \cdot \sin x.
 \end{aligned}$$

Разделим обе части уравнения на  $e^x$  и приведём подобные члены:

$$(4A + 3B) \sin x + (3A - 4B) \cos x = 25 \sin x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\begin{array}{l}
 \sin x : \left. \begin{array}{l} 4A + 3B = 25 \\ 3A - 4B = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} B = \frac{3}{4}A \\ 4A + \frac{9}{4}A = 25 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} A = 4, \\ B = 3. \end{array} \right. \\
 \cos x : \left. \begin{array}{l} 4A + 3B = 25 \\ 3A - 4B = 0 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Тогда  $Y = (4 \cos x + 3 \sin x)e^x$ .

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = \tilde{y} + Y = \underline{(C_1 + C_2x)e^{3x}} + (4 \cos x + 3 \sin x)e^x.$$

5)  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \cos 2x$ .

Соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\tilde{y} = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x}.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Числа  $-1 \pm 2i$  являются корнями характеристического уравнения первой кратности. Следовательно, частное решение нужно искать в виде:

$$Y = x(A \cos 2x + B \sin 2x)e^{-x}.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} Y' &= (A \cos 2x - 2Ax \sin 2x + B \sin 2x + 2Bx \cos 2x)e^{-x} - \\ &\quad -(Ax \cos 2x + Bx \sin 2x)e^{-x} = \\ &= e^{-x} \cdot ((A - Ax + 2Bx) \cos 2x + (B - Bx - 2Ax) \sin 2x), \\ Y'' &= -e^{-x} \cdot ((A - Ax + 2Bx) \cos 2x + (B - Bx - 2Ax) \sin 2x) + \\ &\quad + e^{-x} \cdot ((2B - A) \cos 2x - 2(A - Ax + 2Bx) \sin 2x - (2A + B) \sin 2x + \\ &\quad + 2(B - Bx - 2Ax) \cos 2x) = \\ &= e^{-x} \cdot ((-2A + 4B - 3Ax - 4Bx) \cos 2x + (-4A - 2B + 4Ax - 3Bx) \sin 2x). \end{aligned}$$

Подставим  $Y''$ ,  $Y'$  и  $Y$  в уравнение и разделим обе части уравнения на  $e^{-x}$ :

$$\begin{aligned} &(-2A + 4B - 3Ax - 4Bx) \cos 2x + (-4A - 2B + 4Ax - 3Bx) \sin 2x + \\ &+(2A - 2Ax + 4Bx) \cos 2x + (2B - 2Bx - 4Ax) \sin 2x + \\ &+ 5Ax \cos 2x + 5Bx \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4B \cos 2x - 4A \sin 2x = \cos 2x. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\begin{aligned} \cos 2x : & \quad 4B = 1 \\ \sin 2x : & \quad -4A = 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Тогда  $Y = \frac{1}{4}xe^{-x} \sin 2x$ .

Общее решение уравнения:

$$y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x} \sin 2x.$$


---

## 4 Системы дифференциальных уравнений

### 4.1 Основные понятия

Система дифференциальных уравнений – это набор дифференциальных уравнений, решаемых совместно. Решение системы – это набор функций, который удовлетворяет всем уравнениям системы.

Мы будем рассматривать системы первого порядка, в которых все уравнения разрешены относительно производных. Такая форма записи системы называется нормальной формой Коши:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (149)$$

#### *Замечание*

Рассматривая только системы первого порядка, мы не умаляем общности задачи. Действительно, если система (149) содержит, например, уравнение

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (150)$$

то вводя новую функцию  $z_1 = \frac{dy_1}{dx}$  и добавляя это в уравнение к системе, мы получим систему первого порядка, где вместо уравнения (150) стоят два уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_1}{dx} = z_1. \end{cases} \quad (151)$$

Решением системы (149) называется совокупность  $n$  функций

$$y_i = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (152)$$

таких, что при подстановке их в уравнения системы (149) эти уравнения обращаются в тождества относительно  $x$ . При этом функции  $\psi_i(x)$  предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Как и в случае одного уравнения первого порядка, имеет место теорема, аналогичная теореме Пикара. Начальные условия имеют вид:

$$y_1 \Big|_{x=x_0} = y_1^{(0)}, \quad y_2 \Big|_{x=x_0} = y_2^{(0)}, \quad \dots, \quad y_n \Big|_{x=x_0} = y_n^{(0)}. \quad (153)$$

### *Определение*

Система уравнений (149) вместе с заданными начальными условиями (153) называется задачей Коши.

С геометрической точки зрения, решение – это интегральная кривая в  $(n+1)$ -мерном пространстве, а решение задачи Коши есть интегральная кривая, проходящая через заданную точку.

### **Теорема 9 (аналог теоремы Пикара)**

Если функции  $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}, i, j = 1, \dots, n$  в области  $\Omega$ , то через каждую точку, принадлежащую  $\Omega$ , проходит одна и только одна интегральная кривая системы уравнений (149).

Или: то для любой точки  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \in \Omega$  существует единственное решение

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x), \\ \dots \\ y_n = y_n(x) \end{cases}$$

системы (149), удовлетворяющее начальным условиям (153).

### *Определение*

Общим решением системы уравнений 1-го порядка (149) называется семейство функций  $y_1 = \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \dots, y_n = \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n)$  таких, что при любых постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  функции  $\varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \dots, \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n)$  удовлетворяют системе (149) и для любых начальных условий (153) (точка  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \in \Omega$ ) можно найти значения  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , при которых функции

$\varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \dots, \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n)$  удовлетворяют данному начальному условию.

### **Замечание**

Функции  $y_i = \varphi_i(x, C_1, \dots, C_n)$  могут быть заданы в неявной форме:

$$\psi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

### **Определение**

Соотношение  $\psi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i$  называется первым интегралом системы, если функция  $\psi_i$  не является константой и при подстановке в неё любого решения системы  $y_i = \varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  соотношение обращается в тождество.

Для того, чтобы решить систему, нужно найти  $n$  независимых первых интегралов. Интегралы  $\psi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  называются независимыми, если эти равенства однозначно разрешимы относительно  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Общего метода решения систем дифференциальных уравнений не существует. Однако, в некоторых частных случаях их удаётся решать.

## **4.2 Метод исключения**

Метод исключения аналогичен соответствующему алгебраическому методу.

Если одно из уравнений системы позволяет выразить одну из неизвестных функций через другие, то сделаем это и подставим данное выражение в остальные уравнения. Мы получим систему из  $(n - 1)$ -го уравнения с  $(n - 1)$ -ой неизвестной функцией. Однако, порядок уравнений возрастёт. Повторяя эту процедуру до тех пор, пока не придём к одному уравнению  $n$ -го порядка. Решаем это уравнение и через его решение выражаем остальные искомые функции.

Проиллюстрируем этот метод на примере системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = ay_1 + by_2 + f(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = cy_1 + dy_2 + g(x). \end{cases} \quad (154)$$

Здесь  $a, b, c, d$  – постоянные коэффициенты, а  $f(x)$  и  $g(x)$  – заданные функции.  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  – искомые функции.

Выразим  $y_2$  из первого уравнения системы (154):

$$y_2 = \frac{1}{b} \cdot \left( \frac{dy_1}{dx} - ay_1 - f(x) \right). \quad (155)$$

Подставим во второе уравнение системы (154) вместо  $y_2$  правую часть (155), а вместо  $\frac{dy_2}{dx}$  производную от правой части (155), получаем уравнение второго порядка относительно  $y_1(x)$ :

$$A \frac{d^2y_1}{dx^2} + B \frac{dy_1}{dx} + Cy_1 + P(x) = 0, \quad (156)$$

где  $A, B, C$  – некоторые постоянные.

Решая уравнение (156), находим  $y_1 = y_1(x)$ . Подставив найденное выражение для  $y_1$  и  $\frac{dy_1}{dx}$  в (155), найдём  $y_2$ .

### Пример

Решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -\frac{y_1}{x} + y_2, \end{cases} \quad (157)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{dx} = -\frac{2}{x^2}y_1 + \frac{1}{x}y_2. \end{cases} \quad (158)$$

Выразим  $y_2$  из уравнения (157):

$$y_2 = \frac{y_1}{x} + \frac{dy_1}{dx}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{y_1}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{dy_1}{dx} + \frac{d^2y_1}{dx^2}.$$

Подставим  $y_2$  и  $\frac{dy_2}{dx}$  в уравнение (158):

$$\begin{aligned} -\frac{y_1}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{dy_1}{dx} + \frac{d^2y_1}{dx^2} &= -\frac{2}{x^2}y_1 + \frac{1}{x} \left( \frac{y_1}{x} + \frac{dy_1}{dx} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d^2y_1}{dx^2} &= 0 \Leftrightarrow y_1 = C_1x + C_2. \end{aligned}$$

Соответственно,

$$\underline{y_2 = \frac{C_1x + C_2}{x} + C_1 = 2C_1 + \frac{C_2}{x}}.$$

### 4.3 Матричный метод (метод Эйлера)

Матричный метод применим только для линейных однородных систем уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{cases} \quad (159)$$

где  $a_{ij}$  – некоторые постоянные коэффициенты.

Система уравнений (159) может быть записана в матричном виде:

$$Y' = AY, \quad (160)$$

где введены следующие обозначения:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}. \quad (161)$$

### *Определение*

Матрица-столбец

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

называется частным решением матричного уравнения (160) на интервале  $(a, b)$ , если её подстановка в уравнение обращает его в тождество для любых  $x \in (a, b)$ .

### *Определение*

Система  $n$  частных решений уравнения (160)

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(1)}(x) \end{pmatrix}, \dots, Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(n)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

называется фундаментальной на интервале  $(a, b)$ , если функции  $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$  линейно независимы.

### **Утверждение**

Линейная независимость решений  $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$  уравнения (160) эквивалентна тому, что определитель

$$\begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \dots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_2^{(n)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (162)$$

Без доказательства.

Заметим, что верхние индексы  $(1), (2), \dots, (n)$  – это номер частного решения (а не порядок производной).

**Теорема 10 (Теорема об общем решении матричного уравнения)**

Общее решение матричного дифференциального уравнения (160) есть линейная комбинация фундаментальной системы решений с произвольными коэффициентами  $C_1, C_2, \dots, C_n$ :

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \dots + C_n Y_n(x). \quad (163)$$

В обычной записи это даёт решение системы (159):

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 y_1^{(1)}(x) + C_2 y_1^{(2)}(x) + \dots + C_n y_1^{(n)}(x), \\ \dots \\ y_n(x) = C_1 y_n^{(1)}(x) + C_2 y_n^{(2)}(x) + \dots + C_n y_n^{(n)}(x). \end{cases} \quad (164)$$

Доказательство:

Для того, чтобы проверить, что (163) есть общее решение, нужно убедиться в том, что для любых начальных условий  $y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)$  можно найти значения  $C_1, C_2, \dots, C_n$  такие, что решение (163) будет им удовлетворять:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = C_1 y_1^{(1)}(x_0) + \dots + C_n y_1^{(n)}(x_0), \\ \dots \\ y_n(x_0) = C_1 y_n^{(1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n)}(x_0). \end{cases} \quad (165)$$

Система (165) – это неоднородная линейная система алгебраических уравнений относительно  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Её определитель отличен от нуля при любом  $x$  (формула (162)), поэтому система (165) однозначно разрешима при любых  $y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$ , что и доказывает теорему.

■

В соответствии с теоремой 10, для решения системы (159) нам требуется найти фундаментальную систему решений уравнения (160). Будем

искать решения в следующем виде:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x}, \quad \xi_i \in \mathbb{R}. \quad (166)$$

Подставим (166) в (160):

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \lambda e^{\lambda x} = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} e^{\lambda x}. \quad (167)$$

Сокращая на  $e^{\lambda x}$ , приходим к алгебраическому матричному уравнению:

$$AX = \lambda X, \quad \text{где } X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (168)$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)X = \mathbb{O}.$$

Мы получили задачу о собственных векторах и собственных значениях матрицы  $A$ . Условие существования нетривиального решения уравнения (168) таково:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (169)$$

Корни  $\lambda_i$  этого алгебраического уравнения  $n$ -ой степени – это собственные значения матрицы  $A$ , а нетривиальные решения уравнения (168), соответствующие  $\lambda = \lambda_i$  – это собственные векторы.

Подстановка собственного вектора и собственного значения в формулу (166) даст нам решение  $Y(x)$  матричного уравнения (160) (или системы (159)). Таким образом, линейно независимые собственные векторы матрицы  $A$  дают нам вектор-функции из фундаментальной системы решений.

Для того, чтобы получить всю фундаментальную систему, требуется найти  $n$  линейно независимых решений.

### Замечание

При рассмотрении теории систем дифференциальных уравнений мы обозначали независимую переменную через  $x$ , а функции через  $y_1, y_2, \dots, y_n$  для того, чтобы продемонстрировать сходство с теорией отдельных дифференциальных уравнений. При решении задач мы будем использовать для независимой переменной более традиционное обозначение  $t$ , а для функций – обозначения  $x, y, z$  во избежание излишней индексации.

### Пример 1

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases}$$

1) Выписываем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Найдём собственные числа и собственные векторы матрицы  $A$ . Для поиска собственных чисел составим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3 - \lambda)^2(5 - \lambda) + 1 + 1 - (5 - \lambda) - (3 - \lambda) - 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (9 - 6\lambda + \lambda^2)(5 - \lambda) + 2 - 5 + \lambda - 3 + \lambda - 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 45 - 9\lambda - 30\lambda + 6\lambda^2 + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 9 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0. \end{aligned}$$

Итак, собственные числа:  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 6$ .

Найдём собственные векторы.

1.  $\lambda_1 = 2$ .

$$(A - \lambda_1 I)X_1 = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ -\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left/ \begin{matrix} (I) + (II) \rightarrow (II) \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_3, \\ \xi_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть  $\xi_3 = C_1$ . Тогда  $\xi_1 = -C_1$ .

Соответственно, собственный вектор имеет вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.  $\lambda_2 = 3$ .

$$(A - \lambda_2 I)X_2 = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\eta_2 + \eta_3 = 0 \\ -\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3 = 0 \\ \eta_1 - \eta_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_1 = \eta_2, \\ \eta_3 = \eta_2. \end{cases}$$

Пусть  $\eta_2 = C_2$ . Тогда  $\eta_1 = \eta_3 = C_2$ .

Соответствующий собственный вектор имеет вид:

$$X_2 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.  $\lambda_3 = 6$ .

$$(A - \lambda_3 I)X_3 = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 = 0 & (\text{I}) \\ -\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 = 0 & (\text{II}) \\ \zeta_1 - \zeta_2 - 3\zeta_3 = 0 & (\text{III}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (\text{I}) - (\text{II}) \rightarrow (\text{I}), \\ (\text{II}) + (\text{III}) \rightarrow (\text{II}) \end{array} \begin{cases} -2\zeta_1 + 2\zeta_3 = 0 \\ -2\zeta_2 - 4\zeta_3 = 0 \\ \zeta_1 - \zeta_2 - 3\zeta_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \zeta_1 = \zeta_3, \\ \zeta_2 = -2\zeta_3. \end{cases}$$

Пусть  $\zeta_3 = C_3$ . Тогда  $\zeta_1 = C_3, \zeta_2 = -2C_3$ .

Соответствующий собственный вектор имеет вид:

$$X_3 = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) Запишем ответ:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=Y} = e^{\lambda_1 t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}}_{=X_1} + e^{\lambda_2 t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}}_{=X_2} + e^{\lambda_3 t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}}_{=X_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

Также ответ можно записать в координатной форме:

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, \\ y(t) = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}, \\ z(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}. \end{cases}$$

## Пример 2

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = y + z. \end{cases} \quad (170)$$

1) Выписываем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Найдём собственные числа и собственные векторы матрицы A. Для поиска собственных чисел составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(1 - \lambda)^2 + 1 - \lambda - (1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda)^2 = 0.$$

Итак, собственные числа:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = 1$ .

1. Найдем собственный вектор для  $\lambda_1 = 0$ .

$$(A - \lambda_1 I)X_1 = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0 \\ \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = 2\xi_3, \\ \xi_2 = -\xi_3. \end{cases}$$

Пусть  $\xi_3 = C_1$ . Тогда  $\xi_1 = 2C_1$ ,  $\xi_2 = -C_1$ .

Соответствующий собственный вектор имеет вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее решение из фундаментальной системы:

$$Y_1(t) = e^{\lambda_1 t} X_1 = / \lambda_1 = 0 / = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Собственное число  $\lambda = 1$  имеет вторую кратность. Поэтому процедуру построения решения необходимо изменить. Будем искать решение системы (170) в следующем виде:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \cdot e^t + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} \cdot te^t. \quad (171)$$

Подставим  $Y(t)$  в исходную систему (170):

$$\begin{cases} \eta_1 e^t + \zeta_1 e^t + \zeta_1 t e^t = \eta_2 e^t + \zeta_2 t e^t + \eta_3 e^t + \zeta_3 t e^t, \\ \eta_2 e^t + \zeta_2 e^t + \zeta_2 t e^t = \eta_1 e^t + \zeta_1 t e^t + \eta_2 e^t + \zeta_2 t e^t - \eta_3 e^t - \zeta_3 t e^t, \\ \eta_3 e^t + \zeta_3 e^t + \zeta_3 t e^t = \eta_2 e^t + \zeta_2 t e^t + \eta_3 e^t + \zeta_3 t e^t. \end{cases}$$

В каждом из уравнений приравняем коэффициенты при линейно независимых функциях  $e^t$  и  $te^t$ :

$$\left. \begin{array}{l} e^t : \quad \eta_1 + \zeta_1 = \eta_2 + \eta_3 \\ te^t : \quad \zeta_1 = \zeta_2 + \zeta_3 \\ e^t : \quad \eta_2 + \zeta_2 = \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 \\ te^t : \quad \zeta_2 = \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 \\ e^t : \quad \eta_3 + \zeta_3 = \eta_2 + \eta_3 \\ te^t : \quad \zeta_3 = \zeta_2 + \zeta_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = \zeta_3, \\ \zeta_2 = 0, \\ \eta_2 = \zeta_3, \\ \eta_1 = \eta_3. \end{array} \right.$$

Тогда формула (171) примет вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \eta_3 \\ \zeta_3 \\ \eta_3 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} \zeta_3 \\ 0 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} te^t \Leftrightarrow$$

/ Соберём подобные члены при  $\eta_3$  и  $\zeta_3$  /

$$\Leftrightarrow Y(t) = \eta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \zeta_3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} te^t \right). \quad (172)$$

Таким образом, мы получили два линейно независимых решения системы (170):

$$Y_2(t) = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t,$$

$$Y_3(t) = C_3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} te^t \right).$$

3) Запишем ответ.

Общее решение системы (170) имеет вид:

$$Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t \right).$$

В координатной форме:

$$\begin{cases} x = 2C_1 + C_2 e^t + C_3 t e^t, \\ y = -C_1 + C_3 e^t, \\ z = C_1 + C_2 e^t + C_3 t e^t. \end{cases}$$

**Замечание о кратных собственных значениях.**

Если корень  $\lambda = \lambda_0$  имеет кратность  $s$ , то ему должны отвечать  $s$  линейно независимых решений. Одной функции  $e^{\lambda_0 t}$  будет недостаточно. В этом случае ищем решение в виде:

$$Y_1 e^{\lambda_0 t} + Y_2 t e^{\lambda_0 t} + \dots + Y_s t^{s-1} e^{\lambda_0 t}. \quad (173)$$

Для определения координат векторов  $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$  подставляем (173) в исходную систему уравнений и в каждом из уравнений приравниваем коэффициенты при линейно независимых функциях.

## 5 Операционное исчисление

### 5.1 Преобразование Лапласа

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и их системы можно решать путем сведения к алгебраическим уравнениям. Этот подход называется операционным методом. Он основан на преобразовании Лапласа. Дадим основные определения, связанные с этим преобразованием.

#### *Определение*

Функцией-оригиналом называется комплекснозначная функция  $f(t)$  вещественной переменной  $t$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $f(t) = 0$ , если  $t < 0$ ;
- 2)  $f(t)$  интегрируема на любом конечном интервале оси  $t$ ;
- 3) с возрастанием  $t$  модуль функции  $f(t)$  растет не быстрее некоторой показательной функции, то есть существуют числа  $M > 0$  и  $s_0 \geq 0$  такие, что для всех  $t$  имеем:

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t}. \quad (174)$$

#### *Определение*

Преобразованием Лапласа  $L$  функции-оригинала  $f(t)$ , заданной на  $[0, \infty)$ , называется преобразование вида:

$$(Lf)(p) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (175)$$

где образ функции  $f$  будем обозначать за  $F(p)$ . Функцию  $F(p)$  называют изображением функции-оригинала  $f(t)$ .

#### Свойства преобразования Лапласа

$$1) \ L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg \quad - \text{линейность}; \quad (176)$$

Доказательство очевидно в силу линейности интеграла.

$$2) \ L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0 \quad - \text{теорема подобия}; \quad (177)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
 L(f(at)) &= \int_0^\infty e^{-pt} f(at) dt = \left/ \text{Замена: } s = at \Rightarrow ds = adt \right/ = \\
 &= \int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}s} f(s) \frac{1}{a} ds = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

3)  $L(e^{at} f(t)) = F(p - a)$  – теорема смещения; (178)

Доказательство:

$$L(e^{at} f(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} f(t) dt = F(p - a).$$

■

4)  $L(f(t - a)) = e^{-ap} F(p), \quad a > 0$  – теорема запаздывания; (179)

Доказательство:

$$\begin{aligned}
 L(f(t - a)) &= \int_0^\infty e^{-pt} f(t - a) dt = \left/ \text{Замена: } s = t - a \Rightarrow ds = dt \right/ = \\
 &= \int_{-a}^\infty e^{-ps} e^{-ap} f(s) ds = \left/ f(s) = 0 \text{ при } s < 0 \right/ = e^{-ap} \int_0^\infty e^{-ps} f(s) ds = e^{-ap} F(p). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

5)  $L(tf(t)) = -\frac{d}{dp} F(p)$  – теорема о дифференцировании изображения; (180)

$L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p);$  (181)

Доказательство:

Продифференцируем по параметру  $p$  формулу (175) из определения преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$

$$\frac{d}{dp}F(p) = - \int_0^\infty e^{-pt}tf(t)dt = -L(tf(t)).$$

Соответственно,

$$\frac{d^n}{dp^n}F(p) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-pt}t^n f(t)dt = (-1)^n L(t^n f(t)).$$

■

6)  $L(f'(t)) = pF(p) - f(0)$  – теорема о дифференцировании оригинала;

(182)

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (183)$$

Доказательство:

$$L(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \begin{cases} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt}dt \\ v = f(t) & dv = f'(t)dt \end{cases} =$$

$$= f(t)e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = -f(0) + pF(p).$$

Формула для  $f^{(n)}(t)$  доказывается по индукции.

База проверена ( $n = 1$ ). Переход  $n \rightarrow n + 1$ :

$$L(f^{(n+1)}(t)) = \int_0^\infty f^{(n+1)}(t)e^{-pt}dt = \begin{cases} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt}dt \\ v = f^{(n)}(t) & dv = f^{(n+1)}(t)dt \end{cases} =$$

$$= f^{(n)}(t)e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-pt}dt = -f^{(n)}(0) + p \left( p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \right) = p^{n+1} F(p) - p^n f(0) - p^{n-1} f'(0) - \dots - f^{(n)}(0).$$

■

**Определение**

Сверткой функций  $g$  и  $f$  называется функция:

$$(g * f)(s) = \int_0^s g(s-t)f(t)dt. \quad (184)$$

7)  $L(g * f) = L\left(\int_0^s g(s-t)f(t)dt\right) = L(g) \cdot L(f)$  – теорема Лапласа о свертке;

$$(185)$$

Доказательство:

$$L\left(\int_0^s g(s-t)f(t)dt\right) = \int_0^\infty ds \cdot e^{-ps} \int_0^s g(s-t)f(t)dt =$$

Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле. Пределы удобно расставить с помощью рисунка:

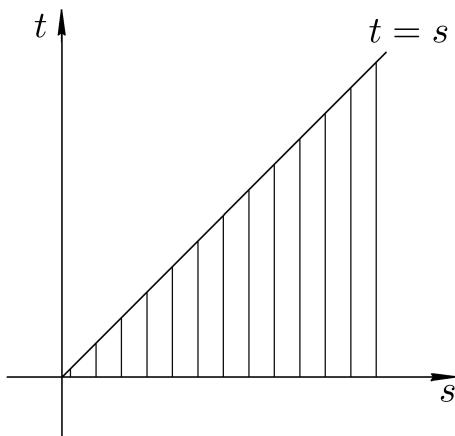


Рис. 9: Расстановка пределов интегрирования

$$= \int_0^\infty dt \int_t^\infty ds \cdot e^{-ps} g(s-t)f(t) = \left. \int \begin{array}{l} \text{Замена: } s-t = \tau \\ ds = d\tau \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^\infty dt \int_0^\infty d\tau \cdot e^{-p(t+\tau)} g(\tau) f(t) = \int_0^\infty dt e^{-pt} f(t) \int_0^\infty d\tau e^{-p\tau} g(\tau) = L(f) \cdot L(g)$$

■

8)  $L\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(p)}{p}$  – теорема об интегрировании оригинала.

(186)

Доказательство:

Введем функцию Хевисайда по следующему правилу:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} L\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) &= L\left(\int_0^\infty \underbrace{\theta(t-\tau)}_{=1 \text{ при } 0 \leq \tau \leq t} \cdot f(\tau)d\tau\right) = \left/ \text{определение свертки (184)} \right. = \\ &= L(\theta * f) = \left/ \text{свойство 7} \right. = L(\theta)L(f) = \frac{1}{p}F(p). \\ \left/ L(\theta(t)) \right. &= \int_0^\infty e^{-pt} \cdot 1 dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^\infty = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

■

## Преобразования Лапласа простейших функций

### (таблица изображений)

Преобразование Лапласа определено только для функций, обращающихся в ноль при  $t < 0$ . Поэтому выписывая таблицу изображений, будем считать, что функции-оригиналы обращаются в ноль на отрицательной полуоси.

1)  $L(1) = \frac{1}{p};$  (187)

Доказательство:

$$L(1) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot 1 dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

■

**2)**  $L(e^{at}) = \frac{1}{p-a};$  (188)

Доказательство:

$$L(e^{at}) = L(e^{at} \cdot 1) = \frac{1}{p-a}.$$

$$\left/ \begin{cases} \text{Свойство 3: } L(e^{at}f(t)) = F(p-a); \\ \text{Формула (187): } L(1) = \frac{1}{p}. \end{cases} \right/$$

■

**3)**  $L(\sin at) = \frac{a}{p^2 + a^2};$  (189)

Доказательство:

$$\begin{aligned} L(\sin at) &= L\left(\frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})\right) = \left/ \text{Линейность преобразования Лапласа} \right/ = \\ &= \frac{1}{2i}\left(L(e^{iat}) - L(e^{-iat})\right) = \left/ \text{формула (188)} \right/ = \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia}\right) = \frac{1}{2i} \frac{2ia}{p^2 + a^2} = \frac{a}{p^2 + a^2}. \end{aligned}$$

■

**4)**  $L(\cos at) = \frac{p}{p^2 + a^2};$  (190)

Доказательство:

$$\begin{aligned} L(\cos at) &= L\left(\frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat})\right) = \left/ \text{Линейность преобразования Лапласа} \right/ = \\ &= \frac{1}{2}\left(L(e^{iat}) + L(e^{-iat})\right) = \left/ \text{формула (188)} \right/ = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia}\right) = \frac{1}{2} \frac{2p}{p^2 + a^2} = \frac{p}{p^2 + a^2}. \end{aligned}$$

■

$$5) L(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (191)$$

Доказательство:

$$L(t^n) = L(t^n \cdot 1) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \frac{1}{p} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

$$\left/ \left\{ \begin{array}{l} \text{Свойство 5: } L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p); \\ \text{Формула (187): } L(1) = \frac{1}{p}. \end{array} \right. \right/ \quad \blacksquare$$

## Примеры

Найдем преобразования Лапласа от следующих функций:

$$1) L(\sin^2 t) = L\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t\right) = \frac{1}{2p} - \frac{p}{2(p^2 + 4)}.$$

$$2) L(t \sin 3t) = \left/ L(tf(t)) = -\frac{d}{dp} F(p) \right/ = -\frac{d}{dp} (L(\sin 3t)) =$$

$$= -\frac{d}{dp} \left( \frac{3}{p^2 + 9} \right) = \frac{6p}{(p^2 + 9)^2}.$$

## Нахождение оригинала функции по ее изображению

Преобразование Лапласа  $L$  является взаимно однозначным. У него существует обратное преобразование  $L^{-1}$ , которое по изображению восстанавливает оригинал. В большинстве задач функция-изображение является правильной рациональной дробью. В этом случае оригинал по изображению можно восстановить, используя таблицу изображений и свойства преобразования Лапласа. Правильная рациональная дробь раскладывается на простейшие, а для каждой простейшей оригинал известен.

### Замечание

Мы не будем выписывать формулу для обратного преобразования Лапласа, так как она требует знаний из теории функции комплексной переменной.

### Примеры

Найдем функции-оригиналы по заданным изображениям:

$$1) \frac{1}{p^2 - 4} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+2} \right).$$

$$L^{-1} \left( \frac{1}{p^2 - 4} \right) = \frac{1}{4} \left( L^{-1} \left( \frac{1}{p-2} \right) - L^{-1} \left( \frac{1}{p+2} \right) \right) = \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}.$$

$$2) \frac{p}{p^2 - 2p + 5} = \frac{p-1+1}{(p-1)^2 + 4} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} + \frac{1}{(p-1)^2 + 4}.$$

Из таблицы изображений:  $L(\cos 2t) = \frac{p}{p^2 + 4}$ ;

По свойству 3 преобразования Лапласа:  $L(e^t \cos 2t) = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4}$ ;

Из таблицы изображений:  $L(\sin 2t) = \frac{2}{p^2 + 4}$ ;

По свойству 3 преобразования Лапласа:  $L(e^t \sin 2t) = \frac{2}{(p-1)^2 + 4}$ .

Следовательно,  $L^{-1} \left( \frac{p}{p^2 - 2p + 5} \right) = e^t (\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t)$ .

## 5.2 Операционный метод

Применим преобразование Лапласа к решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

### Операционный метод для одного дифференциального уравнения

Опишем процедуру построения решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t), \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y'_0, \\ \dots, \\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \quad (192)$$

где  $a_i$  – некоторые постоянные.

Сделаем преобразование Лапласа от дифференциального уравнения в системе (192) (по свойству 6) с учетом начальных условий:

$$\underbrace{p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y'_0 - \dots - y_0^{(n-1)}}_{=L(y^{(n)})} + \underbrace{a_1 p^{n-1} Y(p) - a_1 p^{n-2} y_0 - \dots - a_1 y_0^{(n-2)}}_{=L(a_1 y^{(n-1)})} + \dots + a_n Y(p) = F(p). \quad (193)$$

Здесь  $Y(p)$  есть преобразование Лапласа от функции  $y(t)$ .

Мы получили линейное алгебраическое уравнение относительно  $Y(p)$ . Его решение дается формулой:

$$Y = \frac{F(p) + p^{n-1} y_0 + p^{n-2} y'_0 + \dots + y^{(n-1)} + a_1 p^{n-2} y_0 + \dots + a_1 y_0^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y_0}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (194)$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа от функции  $Y(p)$  и получим решение задачи (192).

#### Замечание

Отметим, что мы нашли частное решение задачи Коши (192), не на-

ходя общего решения уравнения. Начальные условия были учтены автоматически при вычислении преобразований Лапласа от производных  $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'$ . В этом заключается удобство операционного метода.

### Пример

Решим задачу Коши для следующего дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = e^{3t}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Сделаем преобразование Лапласа от уравнения:

$$\begin{aligned} p^2Y(p) - p \underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} - 2(pY(p) - \underbrace{y(0)}_{=0}) - 3Y(p) &= \frac{1}{p-3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p^2Y(p) - 2pY(p) - 3Y(p) &= \frac{1}{p-3} \Leftrightarrow Y(p) = \frac{1}{(p-3)(p^2-2p-3)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Y(p) &= \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}. \end{aligned}$$

Получившуюся дробь разложим на простейшие:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+1)(p-3)^2} &= \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(p+1)(p-3)^2} &= \frac{A(p+1) + B(p-3)(p+1) + C(p-3)^2}{(p-3)^2(p+1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow A(p+1) + B(p-3)(p+1) + C(p-3)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Для нахождения коэффициентов  $A, B, C$  подставим в последнее равенство различные значения  $p$ :

$$\begin{array}{l} p = -1 : \left| \begin{array}{l} 16C = 1 \\ 4A = 1 \\ A - 3B + 9C = 1 \end{array} \right. \\ p = 3 : \left| \begin{array}{l} 16C = 1 \\ 4A = 1 \\ A - 3B + 9C = 1 \end{array} \right. \\ p = 0 : \left| \begin{array}{l} 16C = 1 \\ 4A = 1 \\ A - 3B + 9C = 1 \end{array} \right. \end{array} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{16}, \\ A = \frac{1}{4}, \\ B = -\frac{1}{16}. \end{cases}$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа от функции  $Y(p)$ :

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{(p-3)^2} - \frac{\frac{1}{16}}{p-3} + \frac{\frac{1}{16}}{p+1}\right) =$$

$$\begin{aligned}
& \left/ \text{В силу линейности преобразования Лапласа} \right/ \\
& = \frac{1}{4} L^{-1} \left( \frac{1}{(p-3)^2} \right) - \frac{1}{16} L^{-1} \left( \frac{1}{p-3} \right) + \frac{1}{16} L^{-1} \left( \frac{1}{p+1} \right) = \\
& = \left/ L(t) = \frac{1}{p^2}, \quad L(te^{3t}) = \frac{1}{(p-3)^2} \right/ = \frac{1}{4} te^{3t} - \frac{1}{16} e^{3t} + \frac{1}{16} e^{-t}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $y(t) = \frac{1}{4} te^{3t} - \frac{1}{16} e^{3t} + \frac{1}{16} e^{-t}$ .

### Операционный метод для системы дифференциальных уравнений

Опишем процедуру построения решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left\{
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\
&\dots, \\
\frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(t), \\
y_1(0) &= y_1^{(0)}, \\
y_2(0) &= y_2^{(0)}, \\
&\dots, \\
y_n(0) &= y_n^{(0)},
\end{aligned}
\right. \quad (195)$$

где  $a_{ij}$  – некоторые постоянные.

Сделаем преобразования Лапласа от всех уравнений в системе (195) (по свойству 6) с учетом начальных условий:

$$\left\{
\begin{aligned}
pY_1(p) - y_1^{(0)} &= a_{11}Y_1(p) + \dots + a_{1n}Y_n(p) + F_1(p), \\
&\dots, \\
pY_n(p) - y_n^{(0)} &= a_{n1}Y_1(p) + \dots + a_{nn}Y_n(p) + F_n(p).
\end{aligned}
\right. \quad (196)$$

Решая систему (196), находим  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Сделав обратные преобразования Лапласа, получим решение задачи (195).

## Пример

Решим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = 2y_1 + y_2 + 1, \\ y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 5. \end{cases}$$

Сделаем преобразования Лапласа от уравнений в системе с учетом начальных условий:

$$\begin{aligned} \begin{cases} pY_1 - \underbrace{y_1(0)}_{=0} = Y_1 + 2Y_2 \\ pY_2 - \underbrace{y_2(0)}_{=5} = 2Y_1 + Y_2 + \frac{1}{p} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} pY_1 = Y_1 + 2Y_2 \\ pY_2 - 5 = 2Y_1 + Y_2 + \frac{1}{p} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} Y_2 = \frac{p-1}{2}Y_1 \\ \frac{(p-1)^2}{2}Y_1 - 2Y_1 = 5 + \frac{1}{p} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} Y_2 = \frac{p-1}{2}Y_1 \\ \frac{(p-3)(p+1)}{2}Y_1 = \frac{5p+1}{p} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} Y_2 = \frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)} \\ Y_1 = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} \end{cases} & \\ Y_1(p) = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} = \frac{A(p+1)(p-3) + B(p-3)p + Cp(p+1)}{p(p+1)(p-3)} &\Rightarrow \\ \Rightarrow A(p+1)(p-3) + B(p-3)p + Cp(p+1) = 10p+2. & \end{aligned}$$

Для нахождения коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  подставим в последнее равенство различные значения  $p$ :

$$\begin{aligned} p = -1 : & \quad 4B = -8 \\ p = 0 : & \quad -3A = 2 \\ p = 3 : & \quad 12C = 32 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} B = -2, \\ A = -\frac{2}{3}, \\ C = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа от функции  $Y_1(p)$ :

$$y_1(t) = L^{-1}(Y_1) = L^{-1}\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p} - 2 \frac{1}{p+1} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{p-3}\right) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}.$$

$$\begin{aligned}
Y_2(p) &= \frac{5p^2 - 4p - 1}{p(p+1)(p-3)} = \frac{D}{p} + \frac{E}{p+1} + \frac{F}{p-3} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{5p^2 - 4p - 1}{p(p+1)(p-3)} &= \frac{D(p+1)(p-3) + E(p-3)p + Fp(p+1)}{p(p+1)(p-3)} \Rightarrow \\
\Rightarrow D(p+1)(p-3) + E(p-3)p + Fp(p+1) &= 5p^2 - 4p - 1.
\end{aligned}$$

Для нахождения коэффициентов  $D$ ,  $E$ ,  $F$  подставим в последнее равенство различные значения  $p$ :

$$\begin{aligned}
p = -1 : \quad &4E = 8 \\
p = 0 : \quad &-3D = -1 \\
p = 3 : \quad &12F = 32
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \left\{
\begin{aligned}
E &= 2, \\
D &= \frac{1}{3}, \\
F &= \frac{8}{3}.
\end{aligned}
\right.$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа от функции  $Y_2(p)$ :

$$y_2(t) = L^{-1}(Y_2) = L^{-1}\left(\frac{1}{3p} + 2\frac{1}{p+1} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{p-3}\right) = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}.$$

Итак,

$$\left\{
\begin{aligned}
y_1(t) &= -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}, \\
y_2(t) &= \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}.
\end{aligned}
\right.$$

## 6 Теория устойчивости

### 6.1 Введение

Мы надеемся, что предыдущие главы убедили читателя в справедливости идеи Ньютона о том, что мир описывается дифференциальными уравнениями. А если задать начальные условия, то решение дифференциального уравнения будет единственным. В философии известен принцип лапласовского детерминизма, предложенный выдающимся математиком Пьером-Симоном Лапласом. Он гласит, что если известен закон эволюции системы (в частности, всей Вселенной) и заданы начальные условия, то будущее системы однозначно предопределено. Когда Наполеону Бонапарту, пришедшему к власти, стало необходимо наладить управление страной, он, всегда с уважением относившийся к математике, назначил министром внутренних дел именно П.-С. Лапласа, который может все правильно рассчитать. Нет сомнения, что Лаплас, самый лучший в то время математик Франции, все расчеты произвел правильно. Но почему-то реальное развитие все больше отличалось от предсказанного. Конечно, нельзя абсолютно точно задать начальные условия, но эту погрешность можно сделать маленькой. Однако оказалось, что решение при таком малом изменении отличается разительно. И неудача Лапласа не является единственным примером. Похожие ситуации регулярно встречаются в физике. Иногда малое изменение начальных данных почти не меняет решение и со временем становится незаметным. А иногда даже очень малое изменение начальных условий приводит к гигантскому изменению решения. И в реальной жизни хотелось бы знать, какая из ситуаций будет иметь место. Например, полет самолета описывается уравнениями аэродинамики. Пусть какой-то пассажир пересел в другое кресло, и у самолета появился небольшой крен, то есть изменились начальные условия. Жизненно важно понимать, вернется ли самолет в исходное положение, или крен будет нарастать. Выяснением таких

вопросов занимается теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, которой и посвящена настоящая глава. Основы этой теории заложил знаменитый русский математик Александр Михайлович Ляпунов.

## 6.2 Устойчивость по Ляпунову. Основные понятия и определения

Рассмотрим систему  $n$  дифференциальных уравнений относительно  $n$  функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , записанную в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{cases} \quad (197)$$

Сокращенно её можно записать так:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (198)$$

Здесь  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  – некоторые заданные функции  $(n + 1)$ -ой переменной.

Объясним, что означает устойчивость решения системы дифференциальных уравнений (198). Пусть функции  $f_i$  таковы, что выполнены условия теоремы 9 из главы 4 (аналог теоремы Пикара для систем дифференциальных уравнений). Такой выбор функций обеспечит единственность решения задачи Коши. Зададим некоторые начальные условия  $x_i(t_0) = \varphi_{i0}, i = 1, 2, \dots, n$ . Они порождают решения  $x_i(t) = \varphi_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ . Если изменить начальные условия, то решение системы тоже изменится. Решение будет устойчивым, если при малых изменениях начальных условий оно меняется мало. Дадим теперь более строгое определение устойчивости решения, которое впервые было сформулировано

А.М. Ляпуновым в 1892 году (докторская диссертация “Общая задача об устойчивости движения”).

### *Определение*

Пусть  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  – решение системы (198), удовлетворяющее начальным условиям  $\varphi_i(t_0) = \varphi_{i0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Это решение называется устойчивым по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всякого решения  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , системы (198), начальные условия которого отличаются от  $\varphi_i(t_0)$  меньше, чем на  $\delta$ :

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (199)$$

значения функций будут отличаться от  $\varphi_i(t)$  меньше, чем на  $\varepsilon$ :

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (200)$$

для всех  $t \geq t_0$ .

Если при сколь угодно малом  $\delta > 0$  хотя бы для одного решения  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , неравенства (200) не выполняются, то решение  $\varphi_i(t)$  называется неустойчивым.

Если кроме выполнения неравенств (200) при условии (199) выполняется также условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (201)$$

то решение  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , называется асимптотически устойчивым.

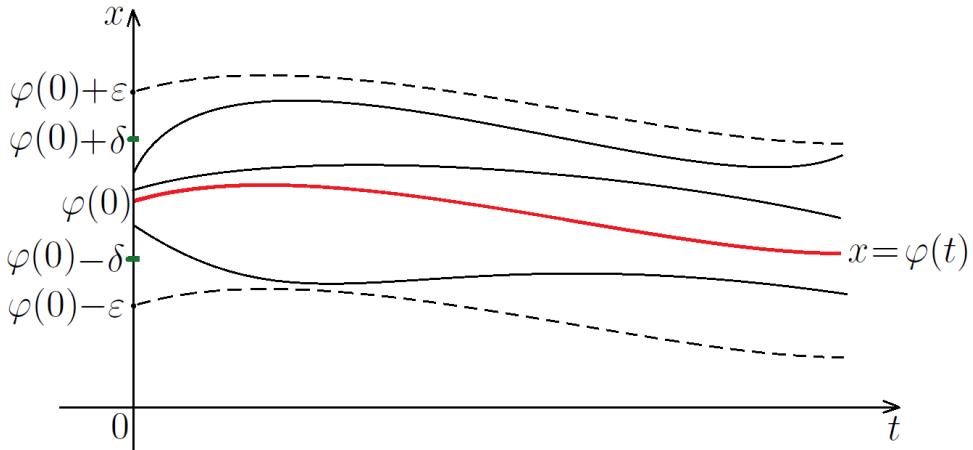


Рис. 10: Устойчивость решения  $x = \varphi(t)$ . В системе уравнений (198):  $n = 1$ ,  $t_0 = 0$ . Если начальные данные не выходят за пределы интервала  $(\varphi(0) - \delta, \varphi(0) + \delta)$ , то решение во все моменты времени  $t$  будет находиться внутри коридора  $(\varphi(t) - \varepsilon, \varphi(t) + \varepsilon)$

### Замечание

Из асимптотической устойчивости решения следует просто устойчивость. Но не наоборот.

Исследовать произвольное решение на устойчивость часто бывает неудобно. Вместо этого можно исследовать некоторое конкретное решение. Самый простой путь – рассмотреть нулевое решение. Попробуем реализовать эту идею, переформулировав задачу.

Исследование на устойчивость решения  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , системы (198) можно свести к исследованию на устойчивость нулевого (тривиального) решения  $x_i \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , некоторой системы, аналогичной системе (198),

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (202)$$

где  $F_i(0, 0, \dots, 0, t) \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Докажем эквивалентность систем уравнений (198) и (202). Рассмотрим исходную систему (198):

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (203)$$

и введем новые переменные  $\tilde{x}_i = x_i - \varphi_i$ . Получим:

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} + \frac{d\varphi_i}{dt} = f_i(\tilde{x}_1 + \varphi_1, \dots, \tilde{x}_n + \varphi_n, t). \quad (204)$$

Эту систему можно записать в виде

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = F_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (205)$$

где  $F_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, t) = f_i(\tilde{x}_1 + \varphi_1, \dots, \tilde{x}_n + \varphi_n, t) - \frac{d\varphi_i}{dt}$ . Заметим, что поскольку  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  является решением системы (198), то есть оно удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (206)$$

то

$$F_i(0, \dots, 0, t) = f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, t) - \frac{d\varphi_i}{dt} = 0. \quad (207)$$

Таким образом, приходим к задаче об устойчивости нулевого решения системы (205).

■

Говорят, что точка  $x_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , есть точка покоя системы (202). Применительно к точке покоя определения устойчивости и неустойчивости могут быть сформулированы так.

### *Определение*

Точка покоя  $x_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , устойчива по Ляпунову, если, каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ , можно найти такое  $\delta > 0$ , что для любого решения  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , начальные данные которого  $x_{i0} = x_i(t_0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяют условию

$$|x_{i0}| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (208)$$

выполняются неравенства

$$|x_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (209)$$

для всех  $t \geq t_0$ .

Если кроме выполнения неравенств (200), выполняется также условие  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ , то устойчивость асимптотическая.

Точка покоя  $x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ , неустойчива, если при сколь угодно малом  $\delta > 0$  хотя бы для одного решения  $x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$ , условие (209) не выполняется.

Для случая  $n = 2$  геометрически устойчивость решения означает следующее. Какова бы ни была сторона  $2\varepsilon$  квадратного основания цилиндра с осью  $Ot$ , в плоскости  $t = t_0$  найдется квадрат с центром  $(0, 0, t_0)$  и стороной  $2\delta$  такой, что все интегральные кривые

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t),$$

выходящие из этого квадрата, для всех  $t \geq t_0$  будут оставаться внутри данного цилиндра (рис. 11).

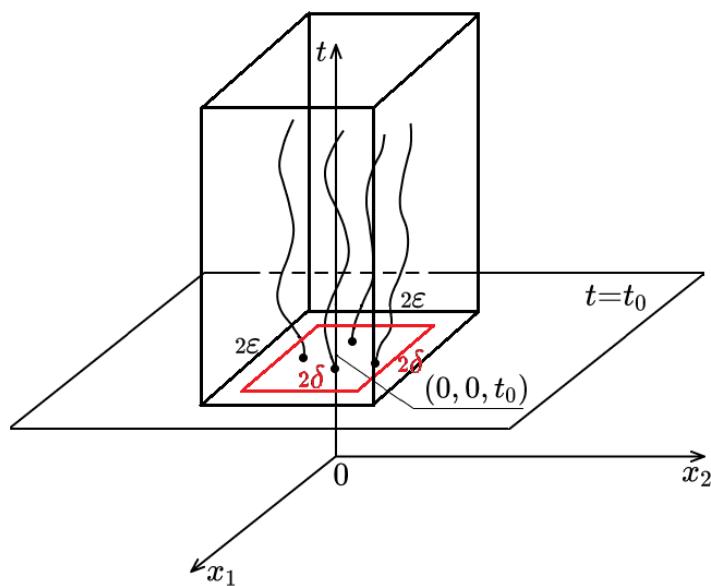


Рис. 11: Устойчивость по Ляпунову в случае  $n = 2$

### Замечание

Можно изменить определение так, что показанный на рисунке 11 цилиндр будет круговым. Для этого условия (199) и (200) нужно заменить,

соответственно, на следующие:

$$(x_1(t_0) - \varphi_1(t_0))^2 + (x_2(t_0) - \varphi_2(t_0))^2 + \dots + (x_n(t_0) - \varphi_n(t_0))^2 < \delta^2, \quad (210)$$

$$(x_1(t) - \varphi_1(t))^2 + (x_2(t) - \varphi_2(t))^2 + \dots + (x_n(t) - \varphi_n(t))^2 < \varepsilon^2. \quad (211)$$

### Пример 1

Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать на устойчивость решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t - x, \quad (212)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = 0.$$

Уравнение (212) есть линейное неоднородное уравнение. Его общее решение  $x(t) = Ce^{-t} + t$  есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения  $\frac{dx}{dt} + x = 0$  и частного решения неоднородного уравнения, которое нетрудно подобрать. Начальному условию  $x(0) = 0$  удовлетворяет решение

$$\varphi(t) = t \quad (213)$$

уравнения (212). Начальному условию  $x(0) = x_0$  удовлетворяет решение

$$x(t) = x_0 e^{-t} + t. \quad (214)$$

Рассмотрим разность решений (214) и (213) уравнения (212) и запишем её так:

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-t} + t - t = (x_0 - 0) e^{-t}.$$

Очевидно, что если  $|x_0 - 0|$  будет маленьким, то  $|x(t) - \varphi(t)|$  тоже будет маленьким. То есть для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  (например,  $\delta = \varepsilon$ ) такое, что для всякого решения  $x(t)$  уравнения (212), начальные значения которого удовлетворяют условию  $|x_0 - 0| < \delta$ , выполняется неравенство

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0| e^{-t} < \varepsilon$$

для всех  $t \geq 0$ . Следовательно, решение  $\varphi(t) = t$  является устойчивым. Более того, поскольку

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_0 - 0| e^{-t} = 0,$$

решение  $\varphi(t) = t$  является асимптотически устойчивым. Это решение  $\varphi(t)$  является неограниченным при  $t \rightarrow +\infty$ .

### Замечание

Приведённый пример показывает, что из устойчивости решения дифференциального уравнения не следует ограниченности решения. На рисунке 10 показано устойчивое ограниченное решение (по координатам  $x_1$ ,  $x_2$ ). Однако, если цилиндр наклонить, решение (“зажатое” в цилиндре) останется устойчивым, но станет неограниченным.

### Пример 2

Исследовать на устойчивость решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2 x. \quad (215)$$

Оно имеет очевидные частные решения

$$x = \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (216)$$

Проанализируем устойчивость решения  $x(t) \equiv 0$ . Для этого найдем общее решение уравнения (215). Разделим переменные:  $\frac{dx}{\sin^2 x} = dt$ ,  $x \neq \pi k$  и проинтегрируем уравнение:

$$-\operatorname{ctg} x = t - C, \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 - t,$$

откуда

$$x = \operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} x_0 - t) + \pi k, \quad x \neq \pi k. \quad (217)$$

Все решения (216) и (217) ограничены при  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Однако решение  $x(t) \equiv 0$  неустойчиво при  $t \rightarrow +\infty$ , так как при любом

$x_0 \in (0, \pi)$  имеем  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \pi$  (рис. 12), то есть при больших  $t$  значения  $x(t)$  будут близки к  $\pi$ , а не к 0.

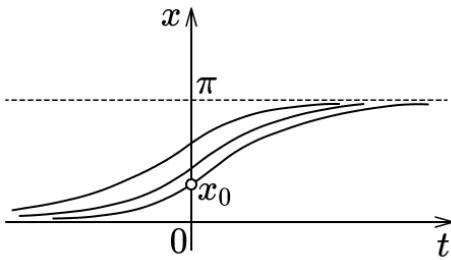


Рис. 12: График функции  $x = \text{arcctg}(\text{ctg}x_0 - t)$

Если в начальный момент времени мы выберем  $x_0$ , отличное от нуля, то с течением времени окажемся в окрестности точки  $x = \pi$ . Наше решение ограничено, но устойчивости нет.

### Замечание

Пример 2 показывает, что из ограниченности решений дифференциального уравнения, вообще говоря, не следует их устойчивости. Это явление характерно для нелинейных уравнений и систем.

### Пример 3

Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, показать, что решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad (218)$$

удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ , устойчиво.

Решение системы (218), удовлетворяющее заданным начальным условиям, есть  $x(t) \equiv 0$ ,  $y(t) \equiv 0$ . Проверим устойчивость данного нулевого решения. Найдем общее решение этой системы методом исключения.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ x = \frac{dy}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \\ x = \frac{dy}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = A \cos t + B \sin t, \\ x = -A \sin t + B \cos t. \end{cases} \quad (219)$$

Любое решение этой системы, удовлетворяющее условиям

$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$ , имеет вид

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Проверим устойчивость нулевого решения по определению. Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$  и покажем, что существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что при  $|x_0 - 0| < \delta, \quad |y_0 - 0| < \delta$  имеют место неравенства

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon,$$

$$|y(t) - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon,$$

для всех  $t \geq 0$ . Это и будет означать, согласно определению, что нулевое решение  $x(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv 0$  системы (218) устойчиво по Ляпунову. Имеем, очевидно,

$$\begin{aligned} |x_0 \cos t - y_0 \sin t| &\leq |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leq |x_0| + |y_0|, \\ |x_0 \sin t + y_0 \cos t| &\leq |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \leq |x_0| + |y_0| \end{aligned} \quad (220)$$

для всех  $t$ . Поэтому, если  $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$ , то и подавно

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon, \quad |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon \quad (221)$$

для всех  $t$ .

Следовательно, если, например, взять  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$ , то при  $|x_0| < \delta$  и  $|y_0| < \delta$  в силу (220) будут иметь место неравенства (221) для всех  $t \geq 0$ , то есть действительно нулевое решение системы (218) устойчиво по Ляпунову, но эта устойчивость не асимптотическая (так как найденные  $x(t)$  и  $y(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  не имеют предела).

**Теорема 1 (об общем характере устойчивости решений линейных систем)**

Решения системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы.

Без доказательства.

**Замечание**

Теорема 1 неверна для нелинейных систем, некоторые решения которых могут быть устойчивыми, а другие – неустойчивыми.

#### Пример 4

Исследовать на устойчивость решение нелинейного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2. \quad (222)$$

Оно имеет очевидные частные решения  $\varphi(t) = -1$  и  $\varphi(t) = 1$ , отвечающие начальным условиям  $x(t_0) = 1$  и  $x(t_0) = -1$  соответственно. Решение  $\varphi(t) = -1$  этого уравнения неустойчиво, а решение  $\varphi(t) = 1$  является асимптотически устойчивым. Проверим это. Найдем общее решение уравнения. Разделим переменные:

$$\frac{dx}{1 - x^2} = dt$$

и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = t + C_1 &\Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = \pm e^{2(t+C_1)} = C e^{2(t-t_0)}, \text{ где } C = \pm e^{2(t_0+C_1)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1+x = C e^{2(t-t_0)} - C x e^{2(t-t_0)} \Leftrightarrow x(1 + C e^{2(t-t_0)}) = C e^{2(t-t_0)} - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{C e^{2(t-t_0)} - 1}{C e^{2(t-t_0)} + 1}. \end{aligned}$$

Пусть начальные условия отличаются от  $x(t_0) = 1$  и  $x(t_0) = -1$  и имеют некоторый общий вид:  $x(t_0) = x_0$ . Найдем решение задачи Коши с данными начальными условиями:

$$\begin{aligned} x(t_0) = x_0 &\Leftrightarrow x_0 = \frac{C-1}{C+1} \Leftrightarrow C x_0 + x_0 = C - 1 \Leftrightarrow C(x_0 - 1) = -(x_0 + 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow C = \frac{1+x_0}{1-x_0}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{(1+x_0)e^{2(t-t_0)} - (1-x_0)}{(1+x_0)e^{2(t-t_0)} + (1-x_0)}.$$

Проверим, что решение  $x(t) \equiv 1$  асимптотически устойчиво. При  $t \rightarrow +\infty$  (если  $x_0 \neq -1$ ), получим:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{2(t-t_0)} ((1+x_0) - (1-x_0)e^{-2(t-t_0)})}{e^{2(t-t_0)} ((1+x_0)e^{2(t-t_0)} + (1-x_0)e^{-2(t-t_0)})} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1+x_0) - (1-x_0)e^{-2(t-t_0)}}{(1+x_0)e^{2(t-t_0)} + (1-x_0)e^{-2(t-t_0)}} = 1 \end{aligned}$$

Проиллюстрируем устойчивость / неустойчивость решений на графике:

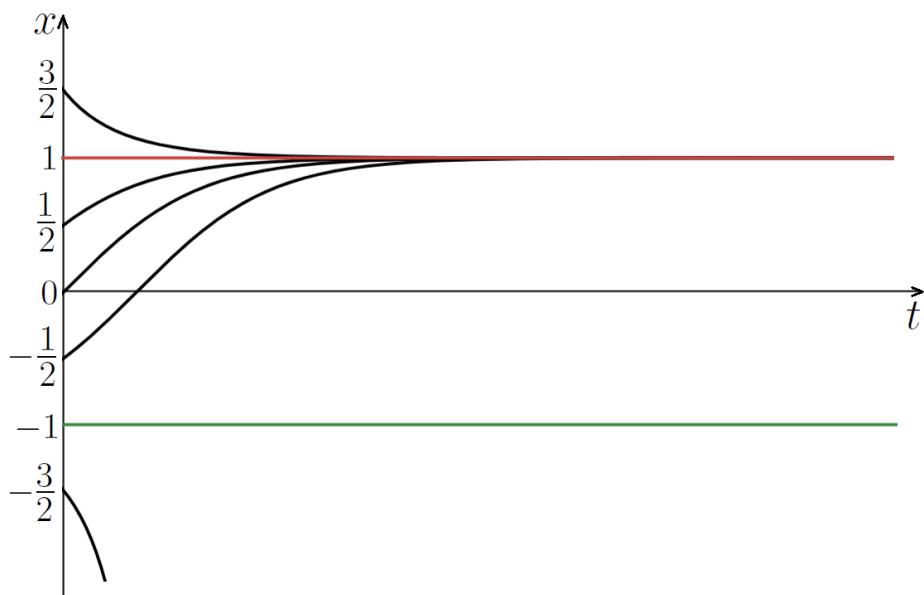


Рис. 13: График функции  $x(t) = \frac{(1+x_0)e^{2(t-t_0)} - (1-x_0)}{(1+x_0)e^{2(t-t_0)} + (1-x_0)}$  при различных значениях  $x_0$ :  $x_0 = \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}$ .  $t_0 = 0$ .

Как видно из рисунка 13, все интегральные кривые при  $x_0 > -1$  приближаются к прямой  $x(t) = 1$ , что означает асимптотическую устойчивость решения  $x(t) \equiv 1$ . Интегральные кривые, отличные от прямой  $x(t) = -1$ , удаляются от неё, то есть решение  $x(t) \equiv -1$  неустойчиво. Действительно, если  $x_0 < -1$ , то найдется момент времени  $t > t_0$ , при котором знаменатель  $(1 + x_0)e^{2(t-t_0)} + (1 - x_0)$  обращается в 0, а соответствующее решение  $x(t)$  обратится в  $-\infty$ .

### Задачи для самостоятельного решения

Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать на устойчивость решения следующих уравнений и систем уравнений:

1.  $\frac{dx}{dt} = x + t, x(0) = 1.$
2.  $\frac{dx}{dt} = 2t(x + 1), x(0) = 0.$
3.  $\frac{dx}{dt} = -x + t^2, x(1) = 1.$
4.  $\frac{dx}{dt} = 2 + t, x(0) = 1.$
5. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 13y, & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}x - 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$$
6. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 9y, & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

### 6.3 Простейшие типы точек покоя

Для анализа поведения решений линейных систем оказывается удобным выделить в картине интегральных кривых характерные элементы. Такими элементами оказываются окрестности точек покоя. Поясним, о чём идет речь.

Рассмотрим систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (223)$$

причём

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

#### *Определение*

Точка  $x = x_0, y = y_0$ , в которой правые части уравнений системы (223) обращаются в ноль, называется точкой покоя системы (223).

#### *Замечание*

Условие  $\Delta \neq 0$  гарантирует, что точка покоя системы – это только нулевая точка:  $x = 0, y = 0$ .

Для исследования точки покоя системы (223) надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (224)$$

и найти его корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Возможны следующие случаи.

1. Корни  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  характеристического уравнения (224) вещественные и разные:

- а)**  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел, рис. 14);
- б)**  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ . Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел, рис. 15);
- в)**  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . Точка покоя неустойчива (седло, рис. 16).

2. Корни характеристического уравнения (224) комплексные:

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = p - iq:$$

- а)**  $p < 0$ ,  $q \neq 0$ . Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый фокус, рис. 17);
- б)**  $p > 0$ ,  $q \neq 0$ . Точка покоя неустойчива (неустойчивый фокус, рис. 18);
- в)**  $p = 0$ ,  $q \neq 0$ . Точка покоя устойчива (центр, рис. 19).

3. Корни  $\lambda_1 = \lambda_2$  кратные:

- а)**  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ . Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел, рис. 20, 21);
- б)**  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ . Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел, рис. 22, 23).

На нижеприведенных рисунках на плоскости  $XOY$  показаны траектории решений системы  $(x(t), y(t))$  при изменении  $t$  для различных типов точек покоя.

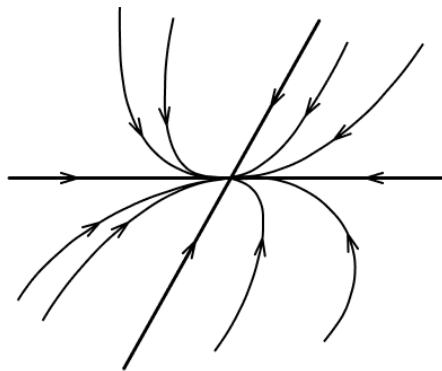


Рис. 14: Точка покоя типа «устойчивый узел».  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . Асимптотически устойчива

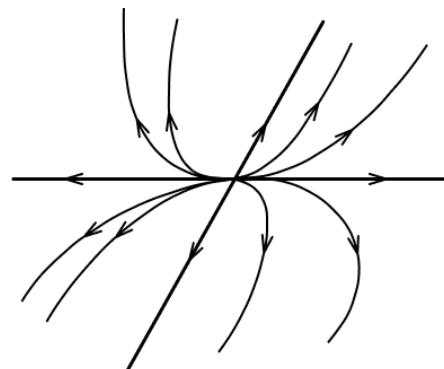


Рис. 15: Точка покоя типа «неустойчивый узел».  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$

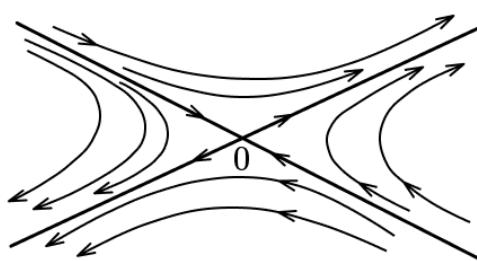


Рис. 16: Точка покоя типа «седло».  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . Неустойчива

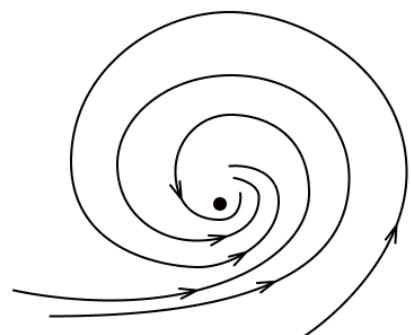


Рис. 17: Точка покоя типа «устойчивый фокус».  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\beta \neq 0$ . Асимптотически устойчива

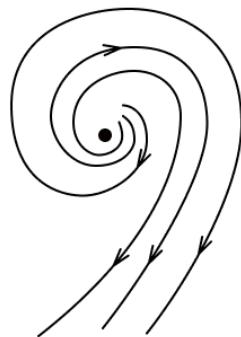


Рис. 18: Точка покоя типа «неустойчивый фокус».  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \neq 0$

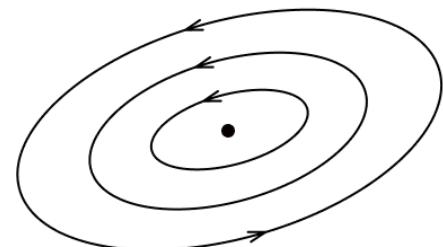


Рис. 19: Точка покоя типа «центр».  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_1 = i\beta$ ,  $\lambda_2 = -i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ . Устойчива

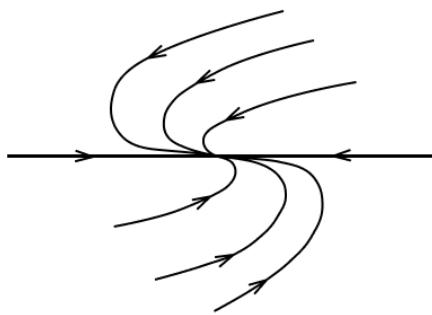


Рис. 20: Точка покоя типа «устойчивый узел».  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda < 0$ . Асимптотически устойчива

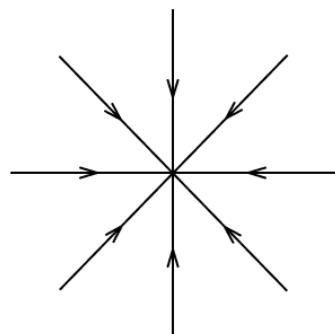


Рис. 21: Точка покоя типа «устойчивый узел». Вырожденный случай.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda < 0$ . Асимптотически устойчива

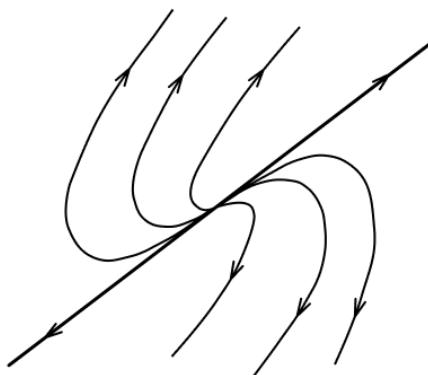


Рис. 22: Точка покоя типа «неустойчивый узел».  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ .

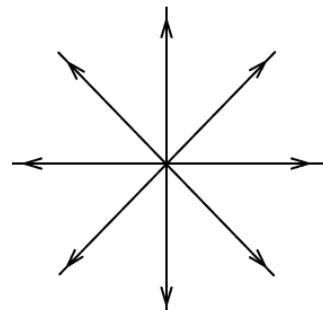


Рис. 23: Точка покоя типа «неустойчивый узел». Вырожденный случай.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ .

### Пример 1

Определить характер точки покоя  $(0, 0)$  системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0.$$

Его корни  $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} > 0$ ,  $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2} > 0$  вещественные, разные, положительные. Следовательно, точка покоя  $(0, 0)$  — неустойчивый узел.

### Связь между типами точек покоя и коэффициентами характеристического уравнения

Тип точки покоя связан с корнями характеристического уравнения. Эту связь можно представить наглядно, используя коэффициенты характеристического уравнения (224). Для этого введем обозначения

$\sigma = -(a_{11} + a_{22})$ ,  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Тогда характеристическое уравнение запишется в виде  $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$ .

Рассмотрим плоскость с прямоугольными декартовыми координатами  $\Delta$  и  $\sigma$  и отметим на ней области, соответствующие различным типам покоя (рис. 24). Из приведенной выше классификации следует, что условиями устойчивости точки покоя являются  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$ . Они выполняются при  $\Delta > 0$  и  $\sigma > 0$  (по теореме Виета,  $\Delta = \lambda_1\lambda_2 > 0 \Rightarrow$  корни одного знака;  $\lambda_1 + \lambda_2 = -\sigma < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ), то есть для точек, которые находятся в первой четверти.

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексные, то есть дискриминант квадратного уравнения  $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$  отрицательный, то точка покоя будет типа фокуса. Этому условию удовлетворяют точки, которые лежат между ветвями параболы  $\sigma^2 = 4\Delta$  и не принадлежат оси  $O\Delta$  ( $\sigma^2 < 4\Delta$ ,  $\sigma \neq 0$ ).

Точки полуоси  $\sigma = 0$ , для которых  $\Delta > 0$ , соответствуют точкам покоя типа центра. Точки, расположенные вне параболы  $\sigma^2 = 4\Delta$  (то есть,  $\sigma^2 > 4\Delta$ ), соответствуют точкам покоя типа узла. Область плоскости  $\sigma O \Delta$ , где  $\Delta < 0$ , содержит точки покоя типа седла (дискриминант  $\sigma^2 - 4\Delta > 0 \Rightarrow$  корни вещественные; по теореме Виета,  $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow$  корни разных знаков).

Исключая особые случаи (прохождение через начало координат), замечаем, что седло может перейти в узел устойчивый или неустойчивый (рис. 24).

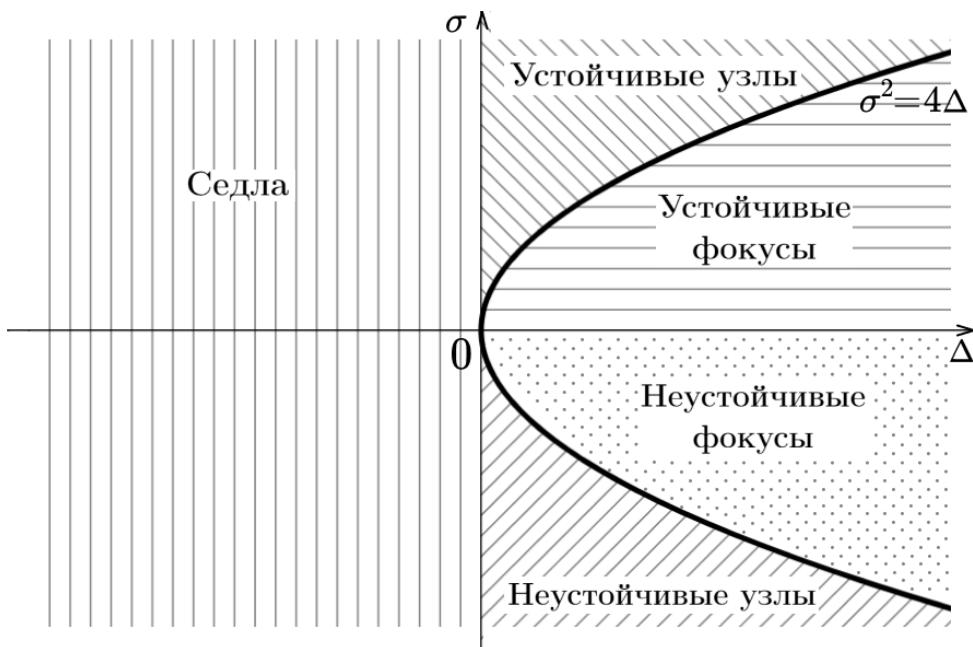


Рис. 24: Типы точек покоя на плоскости  $\sigma O \Delta$

Устойчивый узел может перейти либо в седло, либо в устойчивый фокус. Случай равных корней  $\lambda_1 = \lambda_2$  соответствует границе между узлами и фокусами, т.е. параболе  $\sigma^2 = 4\Delta$ .

## Пример 2

Исследовать поведение решения для уравнения упругих колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \beta^2 x = 0 \quad (225)$$

с учётом трения и сопротивления среды (при  $\alpha > 0$ ).

Переходим от уравнения (225) к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\beta^2 x - 2\alpha y. \end{cases} \quad (226)$$

Для определения характера точки покоя  $(0, 0)$  системы (226) составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta^2 & -2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \beta^2 = 0,$$

отсюда

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (227)$$

Рассмотрим следующие случаи:

- a)**  $\alpha = 0$  (сопротивление среды отсутствует). Из (227) получаем  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ . По известным корням характеристического уравнения удобно выписать решение дифференциального уравнения (225):

$$x(t) = A \cos \beta t + B \sin \beta t$$

Найдем траекторию точки, соответствующую начальному условию  $x(0) = 1, y(0) = 0$ .

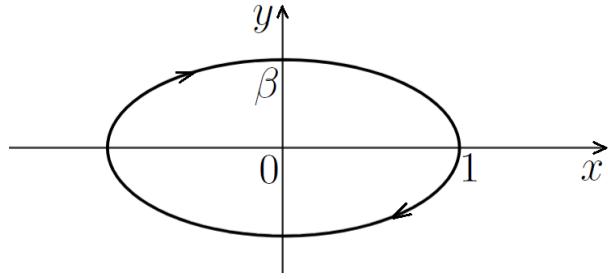
$$x(0) = 1 \Rightarrow A = 1.$$

$$y(0) = x'(0) = 0 \Rightarrow -A\beta \sin 0 + B\beta \cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Решение уравнения (227) или аналогичной ему системе (226):

$$x(t) = \cos \beta t, \quad y(t) = x'(t) = -\beta \sin \beta t. \quad (228)$$

Заметим, что  $x^2(t) + \frac{y^2(t)}{\beta^2} = 1$ , то есть точка движется по эллипсу с полуосами 1 и  $\beta$  и центром в точке покоя.

Рис. 25: Траектория точки на фазовой плоскости  $XOY$ 

Точка покоя устойчива — центр (все движения являются периодическими).

- б)  $\alpha > 0$ ,  $\alpha^2 - \beta^2 < 0$ . Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексно-сопряженные, причем  $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 < 0$ :

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

Точка покоя — устойчивый фокус (колебания затухают). Действительно,

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}t) + Be^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}t). \quad (229)$$

Колебания затухают из-за наличия в формуле экспоненциального множителя  $e^{-\alpha t}$ .

- в)  $\alpha < 0$  (случай «отрицательного трения»),  $\alpha^2 - \beta^2 < 0$ . Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — комплексно-сопряженные, причем  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Точка покоя — неустойчивый фокус. Решение дается формулой (229), но так как  $\alpha < 0$ , то  $e^{-\alpha t}$  стремится к бесконечности и решение не ограничено.

- г)  $\alpha > 0$ ,  $\alpha^2 - \beta^2 \geq 0$  (сопротивление среды велико  $\alpha \geq \beta > 0$ ).

Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — вещественные и отрицательные. Точка покоя — устойчивый узел (все движения затухающие и неколеблющиеся).

Действительно,

$$x(t) = Ae^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})t} + Be^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})t}. \quad (230)$$

Так как  $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} < \alpha$ , обе экспоненты стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

д)  $\alpha < 0$ ,  $\alpha^2 - \beta^2 \geq 0$  (случай большого «отрицательного трения»). Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественные и положительные. Точка покоя — неустойчивый узел. Решение дается формулой (230), но так как  $\alpha < 0$ , то  $e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})t}$  стремится к бесконечности и решение не ограничено.

### Задачи для самостоятельного решения

Определить характер точки покоя  $(0, 0)$  для следующих систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + \frac{5}{7}y, \\ \frac{dy}{dt} = 7x - 3y. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x, \\ \frac{dy}{dt} = 3y. \end{cases}$$

14. При каких значениях  $\alpha$  точка покоя  $(0, 0)$  системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + \alpha y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

устойчива?

---

Пусть имеем систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (n \geq 2). \quad (231)$$

Для неё имеют место аналогичные типы расположения интегральных кривых около начала координат (обобщенное седло, обобщенный узел и т.д.).

**Теорема 2 (об устойчивости точки покоя системы линейных дифференциальных уравнений)**

Если все корни характеристического уравнения для системы (231) имеют отрицательную вещественную часть, то точка покоя системы (231)  $x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ , асимптотически устойчива. Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть, то точка покоя неустойчива.

**Пример 3**

Будет ли устойчива точка покоя  $(0, 0)$  системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + z, \\ \frac{dy}{dt} = -2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = y - z. \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или  $(1 + \lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 0$ . Корни этого уравнения

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

имеют отрицательные вещественные части. Следовательно, точка покоя данной системы асимптотически устойчива.

### Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на устойчивость точку покоя  $(0, 0, 0)$  систем:

$$\begin{array}{ll} 15. \text{ a)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + 5z, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + z, \\ \frac{dz}{dt} = -3z; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = y + z, \\ \frac{dz}{dt} = z + x; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z; \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + z, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + z, \\ \frac{dz}{dt} = y - 3z. \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dz}{dt} = x + 3y - z; \end{cases} & \end{array}$$

## 6.4 Метод функций Ляпунова

Метод функций Ляпунова состоит в непосредственном исследовании устойчивости положения равновесия системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

при помощи подходящим образом подобранный функции  $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  — функции Ляпунова, причём делается это без предварительного нахождения решений системы.

Ограничимся рассмотрением автономных систем

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (232)$$

для которых  $x_i \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ , есть точка покоя.

Функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определённая в некоторой окрестности начала координат, называется знакопределённой (определенноположительной или определенно-отрицательной), если она в области

$$|x_i| \leq h, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (233)$$

где  $h$  — достаточно малое положительное число, может принимать значения только одного определённого знака и обращается в ноль лишь при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Так, в случае  $n = 3$  функции

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{и} \quad V = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

будут определено-положительными, причём здесь величина  $h > 0$  может быть взята сколько угодно большой.

Функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется знакопостоянной (положительной или отрицательной), если она в области (233) может принимать значения только одного определённого знака, но может обращаться в ноль и при  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$ . Например, функция

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$$

будет знакопостоянной (положительной). В самом деле, функцию  $V(x_1, x_2, x_3)$  можно записать так:  $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$ , откуда видно, что она обращается в ноль и при  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$ , а именно при  $x_3 = 0$  и любых  $x_1$  и  $x_2$  таких, что  $x_1 = -x_2$ .

Пусть  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть дифференцируемая функция своих аргументов и пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются некоторыми функциями времени, удовлетворяющими системе дифференциальных уравнений (232). Тогда для полной производной функции  $V$  по времени будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (234)$$

Величина  $\frac{dV}{dt}$ , определяемая формулой (234), называется полной производной функции  $V$  по времени, составленной в силу системы уравнений (232).

### Теорема 3 (теорема Ляпунова об устойчивости)

Если для системы дифференциальных уравнений (232) существует зна-коопределённая функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (функция Ляпунова), полная производная  $\frac{dV}{dt}$  которой по времени, составленная в силу системы (232), есть функция знакопостоянная, знака, противоположного с  $V$ , или тождественно равная нулю, то точка покоя  $x_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , системы (232) устойчива.

### Теорема 4 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости)

Если для системы дифференциальных уравнений (232) существует зна-коопределённая функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , полная производная которой по времени, составленная в силу системы (232), есть также функция знакопределённая, знака противоположного с  $V$ , то точка покоя  $x_i = 0$  системы (232) асимптотически устойчива.

### Пример 1

Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (235)$$

Выберем в качестве функции  $V(x, y)$  функцию  $V = x^2 + y^2$ . Эта функция определённо-положительная. Производная функции  $V$  в силу системы (235) равна

$$\frac{dV}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2xy - 2xy \equiv 0.$$

Из теоремы 3 следует, что точка покоя  $O(0, 0)$  системы (235) устойчива. Однако асимптотической устойчивости нет: траектории системы (235) — окружности и они не стремятся к точке  $O(0, 0)$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

### Пример 2

Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y^3. \end{cases} \quad (236)$$

Беря опять  $V(x, y) = x^2 + y^2$ , найдём

$$\frac{dV}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - 3y^3) = -2(x^4 + 3y^4).$$

Таким образом,  $\frac{dV}{dt}$  есть определённо-отрицательная функция. В силу теоремы 4 точка покоя  $O(0, 0)$  системы (236) устойчива асимптотически.

Общего метода построения функции Ляпунова нет. В простейших случаях функцию Ляпунова можно искать в виде

$$V(x, y) = ax^2 + by^2, \quad V(x, y) = ax^4 + by^4,$$

$$V(x, y) = ax^4 + by^2 \quad (a > 0, b > 0) \quad \text{и т.д.}$$

### Пример 3

С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость тривиальное решение  $x \equiv 0, y \equiv 0$  системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2y^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}. \end{cases}$$

Будем искать функцию Ляпунова в виде  $V = ax^2 + by^2$ , где  $a > 0, b > 0$  — произвольные параметры. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \\ &= 2ax(-x - 2y + x^2y^2) + 2by \left( x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2} \right) = \\ &= -(2ax^2 + by^2) + (2xy - x^3y^2)(b - 2a). \end{aligned}$$

Полагая  $b = 2a$ , получим, что  $\frac{dV}{dt} = -2a(x^2 + y^2) \leq 0$ . Таким образом, при всяком  $a > 0$  и  $b = 2a$  функция  $V = ax^2 + 2ay^2$  будет определённо-положительной, а её производная  $\frac{dV}{dt}$ , составленная в силу данной системы, является определённо-отрицательной. Из теоремы 4 следует, что тривиальное решение  $x \equiv 0, y \equiv 0$  данной системы устойчиво асимптотически.

Если бы в указанной выше форме функцию  $V(x, y)$  не удалось найти, то её следовало бы поискать в форме  $V = ax^4 + by^4$  или  $V = ax^4 + by^2$  и т.д.

### Теорема 5 (теорема Ляпунова о неустойчивости)

Пусть для системы дифференциальных уравнений (232) существует дифференцируемая в окрестности начала координат функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  такая, что  $V(0, 0, \dots, 0) = 0$ . Если её полная производная  $\frac{dV}{dt}$ , составленная в силу системы (232), есть определённо-положительная функция и сколь угодно близко от начала координат

имеются точки, в которых функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  принимает положительные значения, то точка покоя  $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , неустойчива.

**Теорема 6 (теорема Четаева о неустойчивости)**

Пусть для системы дифференциальных уравнений (232) существует непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки покоя  $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющая в некоторой замкнутой окрестности точки покоя условиям:

- 1) в сколь угодно малой окрестности  $\Omega$  точки покоя  $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , существует область  $\Omega_1$ , в которой  $v(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ , причём  $v = 0$  в тех граничных точках  $\Omega_1$ , которые являются внутренними для  $\Omega$  (рис. 26);
- 2) точка покоя  $O(0, 0, \dots, 0)$  является граничной точкой области  $\Omega_1$ ;
- 3) в области  $\Omega_1$  производная  $\frac{dv}{dt}$ , составленная в силу системы (232), определённо-положительная.

Тогда точка покоя  $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , системы (232) неустойчива.

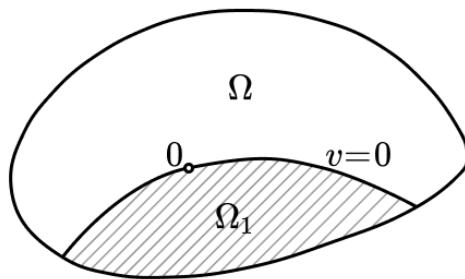


Рис. 26: Область  $\Omega_1$ , лежащая внутри  $\Omega$  и имеющая с  $\Omega$  общую часть границы

**Пример 4**

Исследовать на устойчивость точку покоя  $x = 0, y = 0$  системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

Возьмём функцию  $v(x, y) = x^2 - y^2$ . Тогда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2x^2 + 2y^2$$

есть функция определённо-положительная. Так как сколь угодно близко к началу координат найдутся точки, в которых  $v > 0$  (например,  $v = x^2 > 0$  вдоль прямой  $y = 0$ ), то выполнены все условия теоремы 6 и точка покоя  $O(0, 0)$  неустойчива (седло).

### Пример 5

Исследовать на устойчивость точку покоя  $x = 0, y = 0$  системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^3 + x^5, \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + y^5. \end{cases}$$

Функция  $v = x^4 - y^4$  удовлетворяет условиям теоремы Четаева:

1)  $v > 0$  при  $|x| > |y|$ ;

2)  $\frac{dv}{dt} = 4(x^8 - y^8)$  — определённо-положительная в области  $|x| > |y|$ .

Следовательно, точка покоя  $x = 0, y = 0$  неустойчива.

### Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на устойчивость точку покоя  $(0, 0)$  систем:

16. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3y - 2x^3, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y^3. \end{cases}$$

18. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + 4x^2y. \end{cases}$$

17. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xy^4, \\ \frac{dy}{dt} = x^4y. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4}, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{1}{4}y^3. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y^3. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - x^3y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -y - y^3. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy^4 - 2x^3 - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x^2y^3 - y^7 + 2x. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^5 + y^3, \\ \frac{dy}{dt} = x^3 - y^5. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy - x^3 + y, \\ \frac{dy}{dt} = x^4 - x^2y - x^3. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^3 + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x^2y. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y - x(x - y)^2, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - \frac{3}{2}y(x - y)^2. \end{cases}$$

30. Пусть  $v = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  дважды непрерывно дифференцируемая определённо-положительная функция такая, что

$$v(0) = \frac{\partial v(0)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial v(0)}{\partial x_n} = 0.$$

Исследовать на устойчивость тривиальное решение  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$  системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}, \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial x_n}. \end{cases}$$

---

## 6.5 Устойчивость по первому приближению

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (237)$$

и пусть  $x_i \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , есть точка покоя системы (237), т. е.  $f_i(0, 0, \dots, 0) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Будем предполагать, что функции  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  дифференцируемы в начале координат достаточночное число раз.

Разложим функции  $f_i$  по формуле Тейлора по  $x$  в окрестности начала координат:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

здесь  $a_{ij} = \frac{\partial f_i(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_j}$ , а  $R_i$  — члены второго порядка малости относительно  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Тогда исходная система (237) запишется так:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (238)$$

Вместо системы (238) рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad a_{ij} = \text{const}, \quad (239)$$

называемую системой уравнений первого приближения для системы (237).

Справедливы следующие утверждения.

1. Если все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (240)$$

имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение  $x_i \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , системы (239) и системы (238) асимптотически устойчиво.

2. Если хотя бы один корень характеристического уравнения (240) имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение системы (239) и системы (238) неустойчиво.

Говорят, что в случаях 1 и 2 возможно исследование решения на устойчивость по первому приближению. Случай, когда вещественные части всех корней характеристического уравнения (240) неположительны (то есть отрицательные или нулевые), являются критическими. Если вещественная часть хотя бы одного корня равна нулю, то исследование решения на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно (так как начинают влиять нелинейные члены  $R_i$ ).

### Пример 1

Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя  $x = 0$ ,  $y = 0$  системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 5y^2, \\ \dot{y} = 3x + y + \frac{x^3}{2} \end{cases} \quad \left( \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \right). \quad (241)$$

Система первого приближения имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases} \quad (242)$$

Нелинейные члены удовлетворяют нужным условиям: их порядок больше или равен двум. Составим характеристическое уравнение для системы (242):

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0. \quad (243)$$

Корни характеристического уравнения (243)  $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$  и  $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$  вещественные и  $\lambda_1 > 0$ . Следовательно, нулевое решение  $x = 0, y = 0$  системы (241) неустойчиво.

## Пример 2

Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя  $x \equiv 0, y \equiv 0$  систем

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x - y^3 \end{cases} \quad (244)$$

и

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y^3. \end{cases} \quad (245)$$

Для начала проверим устойчивость решения методом Ляпунова. Для системы (244) можно подобрать функцию Ляпунова:  $v = x^2 + y^2$ . Для неё будет выполнено:

$$\frac{dv}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0.$$

Тогда по теореме Ляпунова получаем, что точка покоя  $x \equiv 0, y \equiv 0$  системы (244) асимптотически устойчива.

В то же время точка покоя  $x \equiv 0, y \equiv 0$  системы (245) неустойчива в силу теоремы Четаева. Взяв  $v = x^2 + y^2$ , будем иметь

$$\frac{dv}{dt} = 2x(y + x^3) + 2y(-x + y^3) = 2(x^4 + y^4) \geq 0.$$

Системы (244) и (245) имеют одну и ту же систему первого приближения

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (246)$$

Характеристическое уравнение для системы (246)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 + 1 = 0$$

имеет чисто мнимые корни, так что вещественные части корней характеристического уравнения равны нулю.

Для системы первого приближения (246) начало координат является центром. Системы (244) и (245) получаются малым возмущением правых частей системы (246) в окрестности начала координат. Однако эти малые возмущения приводят к тому, что замкнутые траектории превращаются в спирали, в случае (244) приближающиеся к началу координат и образующие в точке  $O(0, 0)$  устойчивый фокус, а в случае (245) — удаляющиеся от начала координат и образующие в точке  $O(0, 0)$  неустойчивый фокус. Таким образом, в критическом случае нелинейные члены могут влиять на устойчивость точки покоя.

### Пример 3

Рассмотрим замкнутый контур с линейными элементами (рис. 27); уравнение контура

$$L \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + \frac{1}{C}x + g \left( x, \frac{dx}{dt} \right) = 0. \quad (247)$$

Здесь  $x$  — заряд конденсатора и, следовательно,  $\frac{dx}{dt}$  — ток в цепи;  $R$  — сопротивление;  $L$  — индуктивность;  $C$  — ёмкость;  $g \left( x, \frac{dx}{dt} \right)$  — нелинейные члены, имеющие степень не ниже второй,  $g(0, 0) = 0$ .

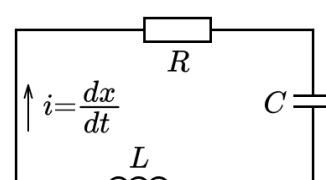


Рис. 27: Замкнутый контур с линейными элементами

Уравнение (247) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{LC}x - \frac{R}{L}y - \frac{1}{L}g(x, y), \end{cases} \quad (248)$$

для которой начало координат  $O(0, 0)$ , есть точка покоя.

Рассмотрим систему первого приближения

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{LC}x - \frac{R}{L}y. \end{cases} \quad (249)$$

Характеристическое уравнение для системы (249) имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (250) \\ \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \end{aligned}$$

Если дискриминант отрицательный, то есть  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \Leftrightarrow R^2 < \frac{4L}{C}$ , то уравнение (250) имеет комплексные корни с отрицательной вещественной частью  $p = -\frac{R}{4L}$  и, значит, начало координат  $O(0, 0)$  для системы (249) и (248) асимптотически устойчиво.

Если  $R^2 > \frac{4L}{C}$ , то начало координат также асимптотически устойчиво, так как корни характеристического уравнения отрицательны (все параметры  $R, L, C$  положительны).

Асимптотическую устойчивость точки покоя можно также увидеть из физических соображений. При наличии резистора в цепи с течением времени ток неизбежно исчезнет.

### Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя  $(0, 0)$  следующих систем:

31. 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2, \\ \dot{y} = -x - 3y + x \left( e^{x^2/2} - 1 \right). \end{cases}$$

32. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y, \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y^2. \end{cases}$$

33. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 8 \sin^2 y, \\ \dot{y} = x - 3y + 4x^3. \end{cases}$$

34. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 22 \sin y + x^2 - y^3, \\ \dot{y} = \sin x - 5y + e^{x^2} - 1. \end{cases}$$

35. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -10x + 4e^y - 4 \cos y^2, \\ \dot{y} = 2e^x - 2 - y + x^4. \end{cases}$$

36. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2 \sin y - y^4, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 + \frac{5}{2}x^2. \end{cases}$$

37. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \sin 2y - x^3 y, \\ \dot{y} = -y - 2x + x^4 - y^7. \end{cases}$$

38. 
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{2}x e^x - 3y + \sin x^2, \\ \dot{y} = 2x + y e^{-y^2/2} - y^4 \cos x. \end{cases}$$

39. 
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{4} \sin x - 7y(1-y)^{1/3} + x^3, \\ \dot{y} = \frac{2}{3}x - 3y \cos y - 11y^5. \end{cases}$$

40. 
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y + x^4, \\ \dot{y} = \frac{1}{5}x - \sin y + y^{14}. \end{cases}$$

41. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + y \cos y - \frac{x^3}{3}, \\ \dot{y} = 3x + 2y + \frac{x^4}{12} - y^3 e^y. \end{cases}$$

42. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4y - x^3, \\ \dot{y} = -3x - y^3. \end{cases}$$

43. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^5, \\ \dot{y} = 2x - y^5. \end{cases}$$

## 6.6 Устойчивость решений дифференциальных уравнений по отношению к изменению правых частей уравнений

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (251)$$

$$y' = f(x, y) + \Theta(x, y), \quad (252)$$

где функции  $f(x, y)$  и  $\Theta(x, y)$  непрерывны в замкнутой области  $\bar{G}$  плоскости  $xOy$  и функция  $f(x, y)$  имеет в этой области непрерывную частную производную  $\frac{df}{dy}$ .

**Теорема 7 (об оценке разности решений при малом изменении правой части уравнения)**

Пусть в области  $\bar{G}$  выполняется неравенство  $|\Theta(x, y)| \leq \varepsilon$ . Если  $y = \varphi(x)$  и  $y = \psi(x)$  есть решения уравнений (251) и (252) соответственно, удовлетворяющие одному и тому же начальному условию  $\varphi|_{x=x_0} = \psi|_{x=x_0} = y_0$ , то

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M} \left( e^{M|x-x_0|} - 1 \right), \quad (253)$$

где  $M = \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ .

Доказательство:

Функция  $\varphi(x)$  является решением уравнения (251):  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ .

Функция  $\psi(x)$  является решением уравнения (252):

$$\psi'(x) = f(x, \psi(x)) + \Theta(x, \psi(x)).$$

Проведем оценку функции  $z = |\varphi(x) - \psi(x)|$ :

$$\begin{aligned} z &= |\varphi(x) - \psi(x)| = \left| \int_{x_0}^x (\varphi'(x) - \psi'(x)) dx \right| = \\ &= \left| \int_{x_0}^x (f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)) - \Theta(x, \psi(x))) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x \underbrace{|f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))|}_{\leq M|\varphi(x) - \psi(x)|} dx + \int_{x_0}^x \underbrace{|\Theta(x, \psi(x))|}_{\leq \varepsilon \text{ (по условию)}} dx \end{aligned}$$

Для доказательства первой из оценок воспользуемся теоремой Лагранжа для  $f(x, y)$  как функции от  $y$ . Существует точка  $\xi$  между точками  $\varphi(x)$

и  $\psi(x)$  такая, что выполнено:

$$f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) (\varphi(x) - \psi(x)).$$

По условию  $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M$ . Тогда имеет место следующая оценка:

$$|f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))| \leq M |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

Итак, мы доказали, что

$$z \leq \int_{x_0}^x M |\varphi(x) - \psi(x)| dx + \int_{x_0}^x \varepsilon dx. \quad (254)$$

Поскольку при  $x = x_0$  левая и правая части неравенства неравенства (254) равны друг другу, то это неравенство сохранится и для производных:

$$\frac{dz}{dx} \leq M |\varphi(x) - \psi(x)| + \varepsilon = Mz + \varepsilon. \quad (255)$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dz}{dx} = Mz + \varepsilon. \quad (256)$$

Его решение есть сумма общего решения однородного уравнения  $(Ce^{M(x-x_0)})$  и частного решения неоднородного уравнения  $(-\frac{\varepsilon}{M})$ , то есть

$$z = Ce^{M(x-x_0)} - \frac{\varepsilon}{M}. \quad (257)$$

Согласно начальному условию

$$\varphi|_{x=x_0} = \psi|_{x=x_0} = y_0 \Leftrightarrow z|_{x=x_0} = 0 \Leftrightarrow C - \frac{\varepsilon}{M} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\varepsilon}{M},$$

то есть решение уравнения (256) имеет вид

$$z = \frac{\varepsilon}{M} e^{M(x-x_0)} - \frac{\varepsilon}{M}. \quad (258)$$

Следовательно, для неравенства (254) получим следующую оценку:

$$z \leq \frac{\varepsilon}{M} (e^{M(x-x_0)} - 1). \quad (259)$$

■

### Замечание

Из оценки (253) видно, что если возмущение  $\Theta(x, y)$  правой части (251) достаточно мало в области  $\bar{G}$ , то на конечном интервале изменения  $x$  разность решений уравнений (251) и (252) будет малой по абсолютной величине. Это позволяет приближенно решать сложные дифференциальные уравнения путём замены их разумно выбранными уравнениями, решаемыми проще. Последнее обстоятельство может быть использовано при решении дифференциальных уравнений, связанных с задачами физики или техники.

### Пример 1

В квадрате  $Q \left\{ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$  найти приближенное решение уравнения

$$y' = \sin(xy), \quad (260)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y|_{x=0} = 0, 1, \quad (261)$$

и оценить погрешность.

Заменим уравнение (260) уравнением

$$y' = xy, \quad (262)$$

$$y|_{x=0} = 0, 1. \quad (263)$$

Уравнение (262) при начальном условии (263) имеет решение  $y = 0, 1 \cdot e^{x^2/2}$ , которое для всех  $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$  не выходит из основного квадрата  $Q$ .

В силу теоремы существования и единственности решения уравнение (260) при начальном условии (261) имеет единственное решение  $y = \psi(x)$  и в качестве приближенного решения задачи (260)-(261) можно взять  $y = 0, 1 \cdot e^{x^2/2}$  — решение задачи (262)-(263).

Оценим разность

$$\Delta = |\varphi(x) - \psi(x)|, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2},$$

где  $\varphi = 0,1 \cdot e^{x^2/2}$  — решение задачи (262)-(263). В данном случае  $f(x, y) = xy$  и  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = |x| \leq \frac{1}{2}$ . Для оценки  $\Delta$  потребуется разложение  $\sin z$  в ряд Маклорена. Так как это ряд лейбницаевского типа, для остатка ряда после первого члена справедлива оценка:  $|\sin z - z| \leq \frac{|z|^3}{6}$ , поэтому в квадрате  $Q$

$$|\sin xy - xy| \leq \frac{|xy|^3}{6} < \frac{1}{4^3 \cdot 6} = \frac{1}{384}.$$

Воспользуемся оценкой (253) из теоремы 7, взяв  $\varepsilon = \frac{1}{384}$ ,

$$M = \max_{(x,y) \in Q} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \frac{1}{2}:$$

$$\begin{aligned} \Delta = |\varphi(x) - \psi(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{M} \left( e^{M|x-x_0|} - 1 \right) = \left/ x_0 = 0 \right/ = \frac{1}{192} \left( e^{\frac{|x|}{2}} - 1 \right) < \\ &< \left/ \text{так как } x \in \left[ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \right/ < \frac{1}{192} \left( e^{\frac{1}{4}} - 1 \right) < \frac{1}{650}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что решение  $\psi(x)$  задачи (260)-(261) не выходит из основного квадрата  $Q$ :

$$\psi(x) = y = 0,1 \cdot e^{x^2/2} + \Delta < \frac{1}{2} \quad \text{при } x \in \left[ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right].$$

Таким образом, мы нашли приближенное решение задачи (260)-(261) в квадрате  $Q$ .

### Задачи для самостоятельного решения

Установить, насколько разойдутся решения данных уравнений, удовлетворяющие одному и тому же начальному условию  $y|_{x=x_0} = y_0$  на заданных интервалах ( $x_0 = 0$ ):

44.  $y' = \frac{y}{1+x} + x^2, \quad y' = \frac{y}{1+x} + x^2 + 0,01 \sin x \quad \text{на } [0, 1].$

45.  $y' = e^{-\sin y/(1+x^2)}, \quad y' = e^{-\sin y/(1+x^2)} + \frac{\cos xy}{10(4+x^4)} \quad \text{на } [0, 2].$

46.  $y' = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} xy, \quad y' = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} xy + 0,001e^{-x^2}$  на  $[0, 1]$ .

---

## 6.7 Критерий Рауса—Гурвица

Пусть имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_n = \text{const}, \quad a_0 > 0). \quad (264)$$

Нулевое решение  $y \equiv 0$  уравнения (264) асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (265)$$

имеют отрицательные вещественные части.

### Теорема 8 (Критерий Рауса—Гурвица)

Для того, чтобы все корни уравнения (265) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (266)$$

Матрица Гурвица составляется так. По главной диагонали записываются коэффициенты многочлена (265), начиная с  $a_1$  и кончая  $a_n$ . Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с

четными индексами, причем в число последних включается коэффициент  $a_0$ . Все остальные элементы матрицы, отвечающие коэффициентам с индексами, большими  $n$  или меньшими 0, полагаются равными нулю.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица имеют вид

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, условие Гурвица гласит: для устойчивости решения  $y \equiv 0$  уравнения (264) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0. \quad (267)$$

Так как  $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$ , условие  $\Delta_n > 0$  может быть заменено требованием  $a_n > 0$ .

### Пример 1

Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$y^{IV} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0. \quad (268)$$

Составляем характеристическое уравнение

$$f(\lambda) \equiv \lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda + 10 = 0.$$

Здесь  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 13$ ,  $a_3 = 19$ ,  $a_4 = 10$ . Выписываем

диагональные миноры Гурвица

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0, \quad \Delta_1 = 5 > 0,$$

т. е.  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ ,  $\Delta_4 > 0$ . Следовательно, тривиальное решение  $y \equiv 0$  уравнения (268) асимптотически устойчиво.

Вычисление можно, например, организовать так. Составляем сначала старший минор Гурвица  $\Delta_n$ . По нему легко выписываются все младшие миноры  $\Delta_{n-1}, \dots, \Delta_1$ . Затем начинаем вычислять последовательно  $\Delta_1, \Delta_2$  и т.д. Если встретился отрицательный минор, решение неустойчиво и дальнейший подсчёт не нужен.

### Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на устойчивость нулевое решение следующих уравнений:

47.  $y''' - 3y' + 2y = 0$ . 50.  $y^{IV} - 2y''' + y'' + 2y' - 2y = 0$ .

48.  $y^{IV} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0$ . 51.  $y^{IV} + 7y''' + 17y'' + 17y' + 6y = 0$ .

49.  $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$ . 52.  $y''' - 3y'' + 12y' - 10y = 0$ .

53.  $y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 34y' + 20y = 0$ .

54.  $y^{IV} + 7y''' + 19y'' + 23y' + 10y = 0$ .

55.  $y^{IV} + 11y''' + 41y'' + 61y' + 30y = 0$ .

56.  $y^V + 3y^{IV} - 5y''' - 15y'' + 4y' + 12y = 0$ .

57.  $y^V + 7y^{IV} + 33y''' + 88y'' + 122y' + 60y = 0.$

При каких значениях  $\alpha$  будет устойчиво нулевое решение уравнений:

58.  $y''' + 2y'' + \alpha y' + 3y = 0.$

59.  $y^{IV} + \alpha y''' + 2y'' + y' + 3y = 0.$

60.  $y^{IV} + 2y''' + \alpha y'' + y' + y = 0.$

При каких значениях  $\alpha$ ,  $\beta$  будет устойчиво нулевое решение уравнений:

61.  $y''' + \alpha y'' + \beta y' + y = 0.$

62.  $y^{IV} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0.$

---

## 6.8 Геометрический критерий устойчивости (критерий Михайлова)

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными вещественными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (269)$$

Его характеристическое уравнение

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (270)$$

Критерий Михайлова позволяет решить вопрос о расположении корней характеристического уравнения (270) на комплексной плоскости и, следовательно, решить вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (269). Полагая  $\lambda = i\omega$ , получаем

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega),$$

где

$$u(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots, \\ v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots$$

Величину  $f(i\omega)$  при заданном значении параметра  $\omega$  можно изобразить в виде вектора на комплексной плоскости  $u, v$  с началом в начале координат.

При изменении  $\omega$  в интервале  $(-\infty, +\infty)$  конец этого вектора описывает некоторую кривую — так называемую **кривую Михайлова** (рис. 28). Так как функция  $u(\omega)$  — чётная, то кривая Михайлова симметрична относительно оси  $Ou$  и поэтому достаточно строить часть кривой, отвечающую изменению параметра  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ .

Если многочлен  $f(\lambda)$  степени  $n$  имеет  $m$  корней с положительной вещественной частью и  $n-m$  корней с отрицательной, то угол  $\varphi$  поворота вектора  $f(i\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  равен  $\varphi = (n - 2m)\frac{\pi}{2}$ .

Для устойчивости нулевого решения уравнения (269) необходимо и достаточно, чтобы  $m = 0$ . Действительно, по теореме 2, для устойчивости нулевого решения все корни характеристического уравнения (270) должны иметь отрицательную вещественную часть. У нас за  $m$  обозначено количество корней с положительной вещественной частью, значит  $m = 0$ .

### Теорема 9 (Критерий Михайлова)

Для устойчивости нулевого решения  $y \equiv 0$  уравнения (269) необходимо и достаточно, чтобы

- 1) вектор  $f(i\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  совершил поворот на

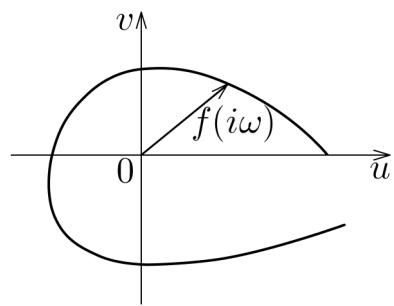


Рис. 28: Кривая Михайлова при изменении параметра  $\omega$  от 0 до  $+\infty$

угол  $\varphi = n\frac{\pi}{2}$ , т. е. сделал  $\frac{n}{4}$  оборотов против часовой стрелки;

- 2) годограф  $f(i\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  не проходил через начало  $(0, 0)$ .

Отсюда следует, что для устойчивости решения уравнения (269) необходимо, чтобы все корни уравнений  $u(\omega) = 0$  и  $v(\omega) = 0$  были вещественными и перемежающимися друг с другом, т. е. между любыми двумя корнями одного уравнения должен находиться корень другого уравнения.

### Пример 1

Исследовать на устойчивость нулевое решение  $y \equiv 0$  уравнения

$$y^{IV} + y''' + 4y'' + y' + y = 0.$$

Составляем характеристический многочлен

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 1.$$

Далее,

$$f(i\omega) = \omega^4 - i\omega^3 - 4\omega^2 + i\omega + 1,$$

$$u(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 1,$$

$$v(\omega) = -\omega^3 + \omega = \omega(1 - \omega)(1 + \omega).$$

Построим кривую (рис. 29)

$$\begin{cases} u = u(\omega), \\ v = v(\omega), \end{cases} \quad 0 \leq \omega < +\infty.$$

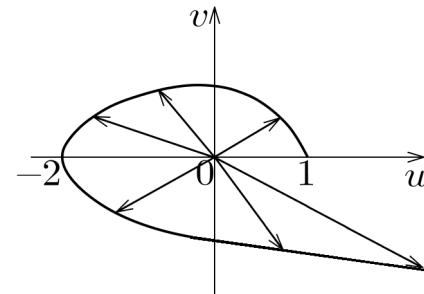


Рис. 29: Кривая Михайлова

$\omega$	0	$\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	1	$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
$u$	1	0	-2	0
$v$	0	+	0	-

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{v}{u} = 0.$$

Угол поворота радиус-вектора  $\varphi = 4\frac{\pi}{2} = (n - 2m)\frac{\pi}{2}$ . Отсюда  $n - 2m = 4$  и так как  $n = 4$ , то  $m = 0$ , то есть все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости (имеют отрицательную вещественную часть). Значит, по теореме 2, тривиальное решение  $y \equiv 0$  асимптотически устойчиво.

### Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на устойчивость с помощью критерия Михайлова нулевое решение следующих уравнений:

63.  $2y''' + 7y'' + 7y' + 2y = 0.$

64.  $y''' + 2y'' + 2y' + y = 0.$

65.  $2y^{IV} + 13y''' + 28y'' + 23y' + 6y = 0.$

66.  $3y^{IV} + 13y''' + 19y'' + 11y' + 2y = 0.$

67.  $2y^{IV} + 6y''' + 9y'' + 6y' + 2y = 0.$

68.  $y^{IV} + 4y''' + 16y'' + 24y' + 20y = 0.$

69.  $y^V + 13y^{IV} + 43y''' + 51y'' + 40y' + 12y = 0.$

70.  $y''' + y = 0.$

71.  $y^{IV} + y''' + y' + y = 0.$

72.  $y^V + 3y^{IV} + 2y''' + y'' + 3y' + 2y = 0.$

73.  $y^V + y^{IV} + y''' + y'' + y' + y = 0.$

74.  $2y^{IV} + 11y''' + 21y'' + 16y' + 4y = 0.$

75.  $y^{VI} + y^V + y^{IV} + y'' + y' + y = 0.$

76.  $2y^{IV} + 9y''' + 32y'' + 54y' + 20y = 0.$

77.  $6y^{IV} + 29y''' + 45y'' + 24y' + 4y = 0.$

78.  $y^V + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + 2y = 0.$

79.  $y^{VI} + y^V + 3y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 2y = 0.$

80.  $y^V + 2y^{IV} + y''' + 2y'' + y' + 2y = 0.$

---

## 6.9 Уравнения с малым параметром при производной

Возьмём дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t), \varepsilon), \quad (271)$$

где  $\varepsilon$  — параметр.

Если функция  $F(t, x, \varepsilon)$  в некоторой замкнутой области изменения  $t, x, \varepsilon$  непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по  $x$ :

$$|F(t, x_2, \varepsilon) - F(t, x_1, \varepsilon)| \leq N|x_2 - x_1|,$$

где  $N$  не зависит от  $t, x, \varepsilon$ , то решение уравнения (271) непрерывно зависит от  $\varepsilon$  (по теореме о непрерывной зависимости решений задачи Коши от параметра).

### Замечание

Здесь речь идет о решении задачи Коши для уравнения (271) с начальными условиями, лежащими в указанной области (где выполнено условие Липшица).

Во многих задачах физики приходится рассматривать уравнения вида

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (272)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр.

Разделив обе части уравнения (272) на  $\varepsilon$ , приведем его к виду

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f(t, x), \quad (273)$$

откуда видно, что правая часть (273) терпит разрыв при  $\varepsilon = 0$ , так что теоремой о непрерывной зависимости решений от параметра  $\varepsilon$  воспользоваться в этом случае нельзя.

Вопрос ставится так: при каких условиях для малых значений  $|\varepsilon|$  в уравнении (272) можно отбросить член  $\varepsilon \frac{dx}{dt}$  и в качестве приближения к решению дифференциального уравнения (272) рассматривать решение так называемого «вырожденного уравнения»

$$f(t, x) = 0. \quad (274)$$

Пусть для определенности  $\varepsilon > 0$  и пусть вырожденное уравнение (274) имеет лишь одно решение  $x = \varphi(t)$ .

### *Определение устойчивости вырожденного уравнения*

Решение  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения (274) называется устойчивым, если при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение полного уравнения (272) стремится к нему. Решение  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения (274) называется неустойчивым, если при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение полного уравнения (272) удаляется от него.

Ситуация с устойчивостью / неустойчивостью решения определяется поведением функции  $f(t, x)$  в окрестности кривой  $x = \varphi(t)$ . А именно,

если при переходе через график решения  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения (274) функция  $f(t, x)$  с возрастанием  $x$  при фиксированном  $t$  меняет знак с  $+$  на  $-$ , то решение вырожденного уравнения  $x = \varphi(t)$  устойчиво и им можно приближенно заменить решение  $x(t, \varepsilon)$  уравнения (272) (рис. 30).

Если же функция  $f(t, x)$  меняет знак с  $-$  на  $+$ , то решение  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения (274) неустойчиво и заменять решение  $x(t, \varepsilon)$  дифференциального уравнения (272) решением вырожденного уравнения (274) нельзя (рис. 31).

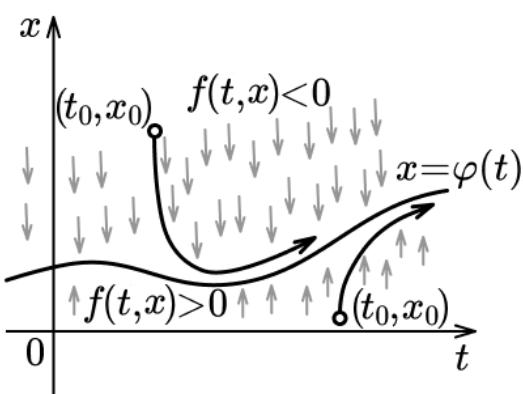


Рис. 30: Пример устойчивого решения вырожденного уравнения  $f(t, x) = 0$

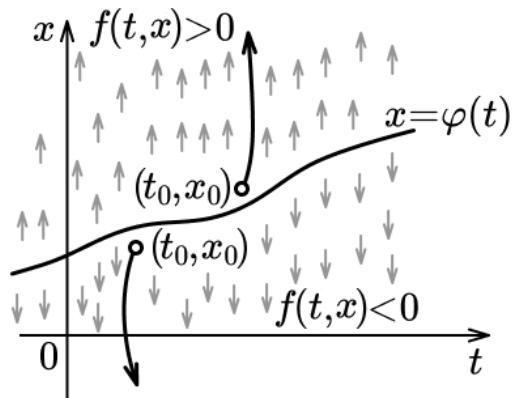


Рис. 31: Пример неустойчивого решения вырожденного уравнения  $f(t, x) = 0$

### Теорема 10 (Достаточные условия устойчивости / неустойчивости решения вырожденного уравнения)

Достаточные условия устойчивости или неустойчивости выражаются следующими утверждениями.

1. Если  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} < 0$  на решении  $x = \varphi(t)$  уравнения (274), то решение  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения устойчиво.
2. Если  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} > 0$  на решении  $x = \varphi(t)$  уравнения (274), то решение  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения неустойчиво.

Если вырожденное уравнение  $f(t, x) = 0$  (274) имеет несколько решений  $x = \varphi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , то каждое из них должно быть ис-

следовано на устойчивость. При этом поведение интегральных кривых дифференциального уравнения (272) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  может быть различным в зависимости от выбора начального условия — начальной точки  $(t_0, x_0)$ .

Возможен также полуустойчивый случай, когда функция  $f(t, x)$  при переходе через кривую  $x = \varphi(t)$  не меняет знак (например, если  $x = \varphi(t)$  есть корень четной кратности вырожденного уравнения (274)). В этом случае при малом  $\varepsilon$  интегральные кривые уравнения (272) с одной стороны кривой  $x = \varphi(t)$  стремятся к этой кривой, а с другой — удаляются от неё.

В первом случае мы говорим, что начальная точка  $(t_0, x_0)$  принадлежит области притяжения полуустойчивого решения  $x = \varphi(t)$ , а во втором случае — области отталкивания.

В полуустойчивом случае, как правило, нельзя заменять решение исходного уравнения (272) решением вырожденного уравнения (274).

Можно указать **критерии полуустойчивости**, когда интегральные кривые уравнения (272) при соответствующем выборе начальной точки  $(t_0, x_0)$  приближаются к решению  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения и остаются в его окрестности при  $t > t_0$ .

Приведём эти критерии. Пусть в окрестности полуустойчивого решения  $x = \varphi(t)$  вырожденного уравнения (274) функция  $f(t, x) \geq 0$ .

Если  $\varphi'(t) > 0$ , то интегральные кривые уравнения (272), приближающиеся к кривой  $x = \varphi(t)$ , не могут пересечь эту кривую и остаются в её окрестности при  $t > t_0$  (начальная точка  $(t_0, x_0)$  должна находиться в области притяжения полуустойчивого решения  $x = \varphi(t)$  (рис. 32), область ниже кривой  $x = \varphi(t)$ ). Действительно, если точка  $x(t)$  оказалась

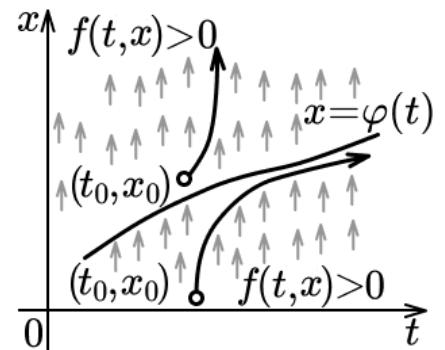


Рис. 32: Полуустойчивый случай

бы на кривой  $x = \varphi(t)$ , то  $\frac{dx}{dt}$  было бы равно 0. А значит траектория  $x = x(t)$  была бы в этой точке горизонтальной, то есть уходила бы с кривой  $x = \varphi(t)$  обратно в область притяжения. Если  $(t_0, x_0)$  находится в области отталкивания, то соответствующая интегральная кривая уравнения (272) быстро удаляется от кривой  $x = \varphi(t)$  (рис. 32, область выше кривой  $x = \varphi(t)$ ).

Если  $\varphi'(t) < 0$ , то интегральные кривые  $x = x(t)$ , приближающиеся на рис. 32 снизу к графику функции  $x = \varphi(t)$ , пересекут его (так как в точках кривой  $x = \varphi(t)$  траектория  $x = x(t)$  горизонтальна, а значит пересечет идущую вниз кривую  $x = \varphi(t)$ ). После пересечения кривой  $x = \varphi(t)$  интегральные кривые пойдут наверх и быстро удаляются от кривой, так как будут находиться в области отталкивания.

Если  $\varphi'(t) > 0$  при  $t_0 \leq t < t_1$  и  $\varphi'(t) < 0$  при  $t > t_1$ , то при достаточно малом  $\varepsilon$  интегральные кривые, выходящие из точки  $(t_0, x_0)$ , принадлежащей области притяжения корня  $x = \varphi(t)$ , остаются вблизи кривой  $x = \varphi(t)$  при  $t_0 = \delta < t < t_1$ ,  $\delta > 0$ ; в окрестности точки  $t = t_1$  они пересекают кривую  $x = \varphi(t)$  и затем удаляются от неё.

Если в окрестности полуустойчивого решения  $x = \varphi(t)$  функция  $f(t, x) \leq 0$ , то для справедливости высказанных утверждений знаки у производной  $\varphi'(t)$  надо заменить противоположными.

### Пример 1

Выяснить, стремится ли решение  $x = x(t, \varepsilon)$  уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = t^2 - x, \quad (275)$$

$\varepsilon > 0$ , удовлетворяющее начальному условию  $x|_{t=t_0} = x_0$ , к решению вырожденного уравнения  $x = t^2$  при  $t > t_0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Имеем

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial(t^2 - x)}{\partial x} = -1 < 0,$$

так что решение вырожденного уравнения  $x = t^2$  устойчиво и, следова-

тельно, решение исходного уравнения  $x = x(t, \varepsilon)$ , выходящее из любой начальной точки  $(t_0, x_0)$ , стремится к решению вырожденного уравнения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $t > t_0$  (рис. 33).

В этом можно убедиться непосредственно проверкой. Преобразуем уравнение (275) к виду:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\varepsilon}x = \frac{1}{\varepsilon}xt^2,$$

Это линейное уравнение типа  $x' + p(t)x = q(t)$ , его решение ищем в виде:  $y = ue^{-\int p(t)dt}$ . В нашем случае замена будет выглядеть так:

$x = ue^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ . Тогда  $x' = u'e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{u}{\varepsilon}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ . Подставим  $x$  и  $x'$  в уравнение:

$$u'e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{u}{\varepsilon}e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \frac{u}{\varepsilon}e^{-\frac{t}{\varepsilon}} = \frac{t^2}{\varepsilon} \Leftrightarrow u' = \frac{t^2}{\varepsilon}e^{\frac{t}{\varepsilon}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\varepsilon} \int t^2 e^{\frac{t}{\varepsilon}} dt = \frac{1}{\varepsilon} \left( t^2 \cdot \varepsilon e^{\frac{t}{\varepsilon}} - 2\varepsilon \int e^{\frac{t}{\varepsilon}} t dt \right) = t^2 e^{\frac{t}{\varepsilon}} - 2 \left( t \varepsilon e^{\frac{t}{\varepsilon}} - \varepsilon \int e^{\frac{t}{\varepsilon}} dt \right) = \\ &= t^2 e^{\frac{t}{\varepsilon}} - 2t\varepsilon e^{\frac{t}{\varepsilon}} + 2\varepsilon^2 e^{\frac{t}{\varepsilon}} + C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x(t) = ue^{-\frac{t}{\varepsilon}} = t^2 - 2t\varepsilon + 2\varepsilon^2 + Ce^{-\frac{t}{\varepsilon}}.$$

Постоянную  $C$  найдем из начального условия:

$$x(t_0) = x_0 \Leftrightarrow x_0 = t_0^2 - 2t_0\varepsilon + 2\varepsilon^2 + Ce^{-\frac{t_0}{\varepsilon}} \Leftrightarrow C = (x_0 - t_0^2 + 2t_0\varepsilon - 2\varepsilon^2) e^{\frac{t_0}{\varepsilon}}.$$

Таким образом, решение уравнения (275) при заданном начальном условии  $x|_{t=t_0} = x_0$  имеет вид:

$$x(t) = t^2 - 2\varepsilon t + 2\varepsilon^2 + (x_0 - t_0^2 + 2\varepsilon t_0 - 2\varepsilon^2) e^{-(t-t_0)/\varepsilon},$$

откуда непосредственно видно, что при  $t > t_0$ , то есть  $t - t_0 > 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем  $x(t, \varepsilon) \rightarrow t^2$ .

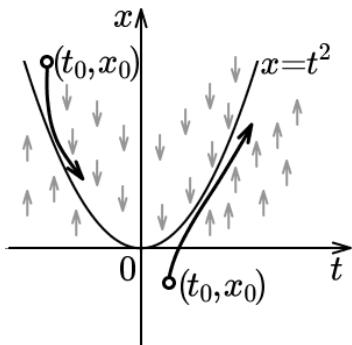


Рис. 33: Пример 1

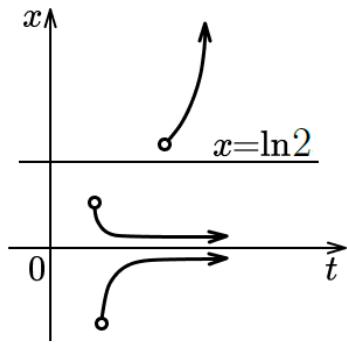


Рис. 34: Пример 2

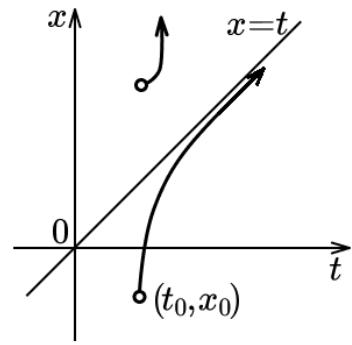


Рис. 35: Пример 3

## Пример 2

Исследовать на устойчивость решение вырожденного уравнения для уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = x(e^x - 2).$$

Вырожденное уравнение  $x(e^x - 2) = 0$  имеет два решения:

$$x = 0, \quad x = \ln 2.$$

Имеем

$$\left. \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = (e^x - 2 + x e^x) \Big|_{x=0} = -1,$$

так что решение  $x = 0$  устойчивое;

$$\left. \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right|_{x=\ln 2} = (e^x - 2 + x e^x) \Big|_{x=\ln 2} = 2 \ln 2 > 0,$$

так что решение  $x = \ln 2$  вырожденного уравнения неустойчивое (рис. 34).

## Пример 3

Исследовать на устойчивость решение вырожденного уравнения, отвечающего уравнению

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = (x - t)^2.$$

Вырожденное уравнение  $(x - t)^2 = 0$  имеет корень  $x = t$  второй кратности.

$$\left. \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right|_{x=t} = 2(x - t) \Big|_{x=t} = 0,$$

то есть Теорема 10 об устойчивости / неустойчивости решения вырожденного уравнения не работает. Воспользуемся определением устойчивости решения вырожденного уравнения, которая определяется знаком функции  $f(t, x)$  в окрестности решения вырожденного уравнения. В нашем случае функция  $f(t, x) \equiv (x - t)^2 > 0$  в окрестности кривой  $x = t$ , что отвечает ситуации полуустойчивости решения. Проверим критерий полуустойчивости, а именно знак  $\varphi'(t)$ . У нас  $x = \varphi(t) = t$  и  $\varphi'(t) = 1 > 0$ . Следовательно, по критерию полуустойчивости, область притяжения находится ниже прямой  $x = t$ , а область отталкивания – выше прямой  $x = t$ . Соответственно, если начальная точка  $(t_0, x_0)$  лежит в полуплоскости под прямой  $x = t$  (область притяжения корня  $x = t$ ), то интегральная кривая  $x = x(t, \varepsilon)$ , выходящая из точки  $(t_0, x_0)$ , будет при  $t > t_0$  оставаться в окрестности линии  $x = t$  (рис. 35). В ином случае, когда точка  $(t_0, x_0)$  лежит выше прямой  $x = t$ , то решение  $x = x(t, \varepsilon)$  будет удаляться от прямой  $x = t$  (рис. 35).

Теперь решим уравнение  $\varepsilon \frac{dx}{dt} = (x - t)^2$  и убедимся в правильности вышеприведенных выводов. Напомним, что уравнение  $y' = f(ax + by + c)$  решается с помощью замены:  $u = ax + by + c$ . В нашем случае подойдет замена:

$$u = x - t \Leftrightarrow x = u + t.$$

Следовательно,  $dx = du + dt$ . После замены уравнение примет вид:

$$\varepsilon du + \varepsilon dt = u^2 dt \Leftrightarrow \frac{\varepsilon du}{u^2 - \varepsilon} = dt. \quad (276)$$

Разложим дробь  $\frac{\varepsilon}{u^2 - \varepsilon}$  на простейшие:

$$\frac{\varepsilon}{u^2 - \varepsilon} = \frac{A}{u - \sqrt{\varepsilon}} + \frac{B}{u + \sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow A(u + \sqrt{\varepsilon}) + B(u - \sqrt{\varepsilon}) = \varepsilon.$$

$$u = \sqrt{\varepsilon} : 2\sqrt{\varepsilon}A = \varepsilon \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon},$$

$$u = -\sqrt{\varepsilon} : -2\sqrt{\varepsilon}B = \varepsilon \Leftrightarrow B = -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}.$$

Итак,

$$\frac{\varepsilon}{u^2 - \varepsilon} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}}{u - \sqrt{\varepsilon}} - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}}{u + \sqrt{\varepsilon}}.$$

Проинтегрируем уравнение (276):

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} (\ln |u - \sqrt{\varepsilon}| - \ln |u + \sqrt{\varepsilon}|) = t + C \Leftrightarrow \left| \frac{u - \sqrt{\varepsilon}}{u + \sqrt{\varepsilon}} \right| = e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}. \quad (277)$$

Модуль будет раскрываться по разному в зависимости от знака  $u - \sqrt{\varepsilon}$ .

Рассмотрим 2 случая.

1)  $x > t \Rightarrow u > 0 \Rightarrow$  при малом  $\varepsilon$  будет выполнено:  $u - \sqrt{\varepsilon} > 0$ .

Тогда уравнение (277) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{u - \sqrt{\varepsilon}}{u + \sqrt{\varepsilon}} = e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}} &\Leftrightarrow u - \sqrt{\varepsilon} = u e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}} + \sqrt{\varepsilon} e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u \left(1 - e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}\right) &= \sqrt{\varepsilon} \left(1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}\right) \Leftrightarrow u = \sqrt{\varepsilon} \frac{1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= t + \sqrt{\varepsilon} \frac{1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}}. \end{aligned} \quad (278)$$

Так как начальная точка имеет координаты  $(x_0, t_0)$ , то из условия

$x(t_0) = x_0$  можно найти постоянную  $C$ :

$$\frac{x_0 - t_0 - \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon}} = e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2t_0}{\sqrt{\varepsilon}}} \Leftrightarrow e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}} = e^{-\frac{2t_0}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{x_0 - t_0 - \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon}}$$

Тогда решение (278) примет вид:

$$x = t + \sqrt{\varepsilon} \frac{1 + e^{\frac{2(t-t_0)}{\sqrt{\varepsilon}}} \cdot \frac{x_0 - t_0 - \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon}}}{1 - e^{\frac{2(t-t_0)}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{x_0 - t_0 - \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon}}}. \quad (279)$$

Найдем корень знаменателя  $t = t_k$ :

$$e^{\frac{2(t_k - t_0)}{\sqrt{\varepsilon}}} = \frac{x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - t_0 - \sqrt{\varepsilon}} \Leftrightarrow t_k = t_0 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \ln \frac{x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - t_0 - \sqrt{\varepsilon}}.$$

$\lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t) = +\infty \Rightarrow$  решение  $x(t)$  удаляется от кривой  $x = t$ .

Точка  $t = t_k$  является вертикальной асимптотой графика  $x = x(t)$ , то есть дальше точки  $t = t_k$  решение не продолжается.

2)  $x < t \Rightarrow u < 0 \Rightarrow$  так как  $\varepsilon > 0$ , будет выполнено:  $u - \sqrt{\varepsilon} < 0$ .

Тогда уравнение (277) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{u - \sqrt{\varepsilon}}{u + \sqrt{\varepsilon}} &= -e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}} \Leftrightarrow u - \sqrt{\varepsilon} = -ue^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}} - \sqrt{\varepsilon} e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u \left(1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}\right) &= \sqrt{\varepsilon} \left(1 - e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}\right) \Leftrightarrow u = \sqrt{\varepsilon} \frac{1 - e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = t + \sqrt{\varepsilon} \frac{1 - e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}}}. \end{aligned} \quad (280)$$

Так как начальная точка имеет координаты  $(x_0, t_0)$ , то из условия

$x(t_0) = x_0$  можно найти постоянную  $C$ :

$$e^{\frac{2C}{\sqrt{\varepsilon}}} = -e^{-\frac{2t_0}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{x_0 - t_0 - \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon}}$$

Тогда решение (280) примет вид:

$$x = t + \sqrt{\varepsilon} \frac{1 - e^{\frac{2(t-t_0)}{\sqrt{\varepsilon}}} \cdot \frac{x_0 - t_0 - \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon}}}{1 + e^{\frac{2(t-t_0)}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{x_0 - t_0 - \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon}}}. \quad (281)$$

Если  $x_0 < t_0$ , то при достаточно малом  $\varepsilon$  будет выполнено:

$x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon} < 0$ . Тогда

$$\frac{x_0 - t_0 - \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon}} > 0 \Rightarrow 1 + e^{\frac{2(t-t_0)}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{x_0 - t_0 - \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - t_0 + \sqrt{\varepsilon}} > 0 \quad \forall t > t_0,$$

то есть решение будет существовать при любом  $t > t_0$  и при  $t \rightarrow +\infty$ :

$$x(t) \sim t - \sqrt{\varepsilon}. \quad (282)$$

Это решение находится в области притяжения кривой  $x = t$ :

$$x(t) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} t. \quad (283)$$

Таким образом, решение с начальным условием  $x(t_0) = x_0 < t_0$  будет оставаться в окрестности кривой  $x = t$ .

### Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на устойчивость решения вырожденных уравнений для следующих дифференциальных уравнений:

$$81. \ \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - t^2.$$

$$82. \ \varepsilon \frac{dx}{dt} = x(t^4 + 1 - x).$$

$$83. \ \varepsilon \frac{dx}{dt} = (x - t)(x - e^t).$$

$$84. \ \varepsilon \frac{dx}{dt} = x^2 - t^2.$$

$$85. \ \varepsilon \frac{dx}{dt} = xt.$$

$$86. \ \varepsilon \frac{dx}{dt} = (x - t)(\ln x - t^2 - 1).$$

$$87. \ \varepsilon \frac{dx}{dt} = (t + x)^2.$$

$$88. \ \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - t + 1.$$

## 6.10 Ответы к задачам

1. Неустойчиво.
2. Неустойчиво.
3. Устойчиво асимптотически.
4. Устойчиво.
5. Устойчиво.
6. Устойчиво.
7. Неустойчивый фокус.
8. Седло.
9. Центр.
10. Устойчивый фокус.
11. Устойчивый узел.
12. Неустойчивый узел.
13. Неустойчивый узел (дикритический узел).
14.  $\alpha < -\frac{3}{2}$ .
15. **а)** точка покоя асимптотически устойчива; **б)** точка покоя неустойчивы; **в)** точка покоя асимптоически устойчива; **г)** точка покоя неустойчива; **д)** точка покоя асимптотически устойчива.
16.  $V = 2x^2 + 3y^2$ , асимптотически устойчиво.
17.  $V = x^4 + y^4$ , устойчиво.
18.  $V = x^2 - \frac{1}{2}y^2$ , неустойчиво.
19.  $V = x^2 + y^2$ , асимптотически устойчиво.
20.  $V = x^2 + y^2$ , неустойчиво.
21.  $V = 2x^2 + y^2$ , устойчиво.
22.  $V = x^2 + y^2$ , асимптотически устойчиво.
23.  $V = x^2 - y^2$ , неустойчиво.
24.  $V = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ , устойчиво.
25.  $V = x^2 + 3y^2$ , асимптотически устойчиво.

26.  $V = x^4 - y^4$ , неустойчиво.

27.  $V = x^4 + 2y^2$ , устойчиво.

28.  $V = x^2 - y^2$ , неустойчиво.

29.  $V = 3x^2 + 2y^2$ , устойчиво.

30. Из условий, налагаемых на функцию  $v(x_1, \dots, x_n)$ , очевидно, что данная система имеет тривиальное решение  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ . Принимая  $v$  за функцию Ляпунова, для производной  $\frac{dv}{dt}$  в силу системы получим.

$$\frac{dv}{dt} = - \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)^2 \right] \dots .$$

Следовательно, тривиальное решение  $x = 0$  данной системы устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ . Устойчивость будет асимптотической, если  $\frac{dv}{dt}$  представляет собой отрицательно определённую функцию.

31. Неустойчиво.

35. Устойчиво.

39. Устойчиво.

32. Устойчиво.

36. Неустойчиво.

40. Устойчиво.

33. Устойчиво.

37. Устойчиво.

34. Устойчиво.

38. Неустойчиво.

41. Неустойчиво.

42. Исследование по первому приближению невозможно, так как корни характеристического уравнения чисто мнимые. Однако существует функция  $V = 3x^2 + 4y^2$ , удовлетворяющая всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, в частности,  $\frac{dV}{dt} = -(6x^4 + 8y^4) \leq 0$ . Следовательно, точка покоя  $x = 0, y = 0$  асимптотически устойчива.

43.  $V = x^2 + y^2$ ; решение  $x \equiv 0, y \equiv 0$  асимптотически устойчиво.

44.  $\Delta < 0,017$ .      51. Устойчиво.      58.  $\alpha > \frac{3}{2}$ .
45.  $\Delta < 0,016$ .      52. Неустойчиво.
46.  $\Delta < 0,0012$ .      53. Устойчиво.
47. Неустойчиво.      54. Устойчиво.
48. Устойчиво.      55. Устойчиво.      60.  $\alpha > \frac{5}{2}$ .
49. Устойчиво.      56. Неустойчиво.
50. Неустойчиво.      57. Устойчиво.      61.  $\alpha > 0$ ,  
 $\alpha\beta > 1$ .
62.  $\alpha > \frac{2}{3}$ ,       $\beta > 0$ ,       $9\beta - 6\alpha + 4 < 0$ .
63. Устойчиво.      70. Неустойчиво.      77. Устойчиво.
64. Устойчиво.      71. Неустойчиво.
65. Устойчиво.      72. Неустойчиво.
66. Устойчиво.      73. Неустойчиво.      79. Неустойчиво.
67. Устойчиво.      74. Устойчиво.
68. Устойчиво.      75. Неустойчиво.
69. Устойчиво.      76. Устойчиво.      81. Неустойчиво.
82.  $x = 0$  неустойчиво,  $x = t^4 + 1$  устойчиво.
83.  $x = t$  устойчиво,  $x = e^t$  неустойчиво.
84.  $x = t$  при  $t < 0$  и  $x = -t$  при  $t > 0$  устойчивы.
85.  $x = 0$  при  $t < 0$  устойчиво.
86.  $x = t$  устойчиво,  $x = e^{t^2+1}$  неустойчиво.
87. Полустойчивое решение. Область притяжения находится выше прямой  $x = -t$ , область отталкивания – ниже прямой  $x = -t$ .

Если начальная точка  $(t_0, x_0)$  лежит в полуплоскости выше прямой  $x = -t$  (область притяжения корня  $x = -t$ ), то интегральная кривая  $x = x(t, \varepsilon)$ , выходящая из точки  $(t_0, x_0)$ , будет при  $t > t_0$  оставаться в окрестности линии  $x = -t$ . В ином случае, когда точка  $(t_0, x_0)$  лежит ниже прямой  $x = -t$ , то решение  $x = x(t, \varepsilon)$  будет удаляться от прямой  $x = -t$ .

**88.** Неустойчиво.

## 7 Нелинейные системы. Циклы и предельные циклы. Теория бифуркаций

### 7.1 Циклы и предельные циклы

При описании поведения физических систем особый интерес представляют случаи, когда состояние системы воспроизводится снова и снова через определенные промежутки времени. Этому отвечают периодические решения систем дифференциальных уравнений, описывающих физический процесс.

#### *Определение*

Решение  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  автономной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (284)$$

называется периодическим, если существует  $T > 0$  такое что для любого  $t$  выполнено:  $x(t+T) = x(t)$  и  $y(t+T) = y(t)$ . Во избежание вырожденных случаев мы подразумеваем, что  $x(t)$  и  $y(t)$  не являются постоянными функциями.

Периодическое решение имеет траектории (орбиту), которая представляет собой замкнутую кривую, проходимую снова и снова при изменении  $t$ . Мы будем называть такую орбиту циклом. Важной частью анализа системы (284) является определение наличия в ней циклов. На протяжении всего этого раздела мы предполагаем, что функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  определены и непрерывно дифференцируемы в каждой точке плоскости  $XOY$ .

Ранее мы уже сталкивались с линейными системами, решения которых являются периодическими функциями. Например, в задаче (218)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad (285)$$

решение представляет собой комбинацию синусов и косинусов:

$$\begin{cases} y = A \cos t + B \sin t, \\ x = -A \sin t + B \cos t, \end{cases} \quad (286)$$

которые являются  $2\pi$ -периодическими функциями. Значения  $x$  и  $y$  повторяются через  $2\pi$ , что означает замкнутость орбиты. Этот результат можно обобщить. В любой двумерной линейной системе  $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ , где собственными значениями матрицы  $\mathbf{A}$  является пара чисто мнимых чисел  $\pm i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ , все непостоянные орбиты являются циклами (точнее, эллипсами). Система Лотки-Вольтерры – система хищник-жертва – имеет орбиты в первом квадранте, которые являются циклами, окружающими точку равновесия  $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} = -dy + cxy, \end{cases} \quad (287)$$

где  $x$  – количество жертв,  $y$  – количество хищников,  $t$  – время,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  – положительные константы, отражающие взаимодействия между видами.

При формулировке уравнений Вольтерра использовал следующие предположения:

1. Популяция планктона, источника пищи для хищных рыб, очень велика в Адриатическом море, поэтому конкуренция за пищу незначительна. Согласно малтузианской модели, в отсутствие хищников популяция жертв будет расти, по крайней мере, в краткосрочной перспективе.
2. Хищные рыбы зависят от добычи как источника пищи; при отсутствии добычи популяция хищников будет экспоненциально сокращаться.

У системы Лотки-Вольтерра (287) есть 2 точки покоя (положения равновесия), которые несложно найти, приравняв к нулю производные  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$ . Тогда система (287) примет вид:

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 \\ -dy + cxy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = \frac{d}{c} \\ y = \frac{a}{b} \end{cases} \quad (288)$$

Точка  $(0, 0)$  интереса не представляет, так как отсутствуют хищники и жертвы. В окрестности точки  $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$  проведем линеаризацию системы, то есть будем искать решение системы (287) в виде:

$$\begin{cases} x = \frac{d}{c} + \tilde{x} \\ y = \frac{a}{b} + \tilde{y} \end{cases}, \quad \text{где } \tilde{x} \text{ и } \tilde{y} \text{ — малые добавки.}$$

Подставим  $x$  и  $y$  в исходную систему (287):

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = a\left(\frac{d}{c} + \tilde{x}\right) - b\left(\frac{d}{c} + \tilde{x}\right)\left(\frac{a}{b} + \tilde{y}\right) = a\frac{d}{c} + a\tilde{x} - b\frac{d}{c}\frac{a}{b} - \frac{bd}{c}\tilde{y} - a\tilde{x} - b\tilde{x}\tilde{y} \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = -d\left(\frac{a}{b} + \tilde{y}\right) + c\left(\frac{d}{c} + \tilde{x}\right)\left(\frac{a}{b} + \tilde{y}\right) = -d\frac{a}{b} - d\tilde{y} + d\frac{a}{b} + d\tilde{y} + \frac{ac}{b}\tilde{x} + c\tilde{x}\tilde{y} \end{cases}$$

Отбросим нелинейные члены  $\tilde{x}\tilde{y}$ , получим линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = -\frac{bd}{c}\tilde{y} \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = \frac{ac}{b}\tilde{x} \end{cases} \quad (289)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dt = \frac{d\tilde{x}}{-\frac{bd}{c}\tilde{y}} \\ dt = \frac{d\tilde{y}}{\frac{ac}{b}\tilde{x}} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\tilde{x}}{-\frac{bd}{c}\tilde{y}} = \frac{d\tilde{y}}{\frac{ac}{b}\tilde{x}} \Leftrightarrow \frac{ac}{b}\tilde{x}d\tilde{x} = -\frac{bd}{c}\tilde{y}d\tilde{y}$$

Проинтегрируем обе части уравнения, получим:

$$\frac{ac}{2b}\tilde{x}^2 = -\frac{bd}{2c}\tilde{y}^2 + C_1, \quad \text{где } C_1 > 0, \quad \tilde{x} = x - \frac{d}{c}, \quad \tilde{y} = y - \frac{a}{b},$$

то есть траектория (орбита) представляет собой эллипс с центром в точке  $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ :

$$\frac{ac}{2b}\left(x - \frac{d}{c}\right)^2 + \frac{bd}{2c}\left(y - \frac{a}{b}\right)^2 = C_1 \quad (290)$$

Данные орбиты при различных значениях  $C_1$  показаны на рисунке 36:

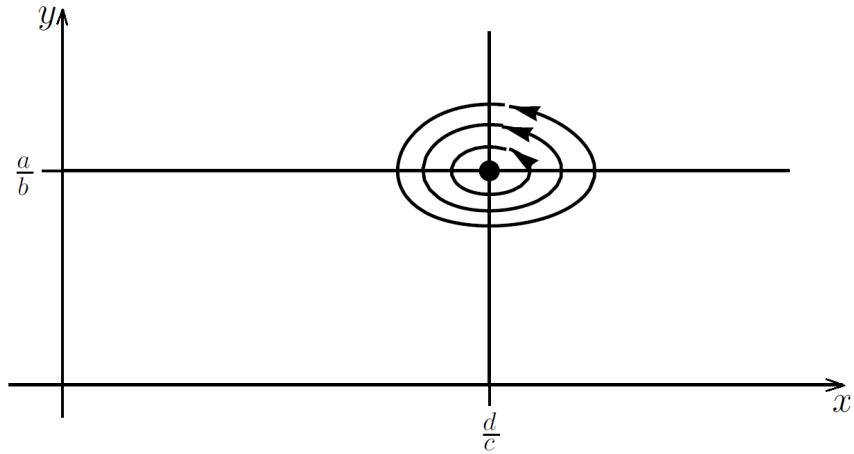
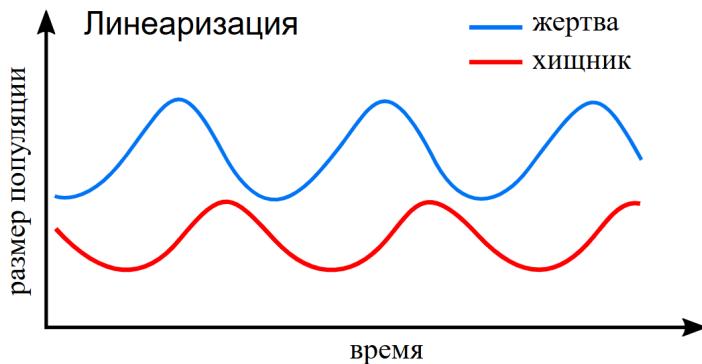


Рис. 36: Фазовый портрет для системы Лотки-Вольтерры

Графики решений линеаризованной системы 289 приведены на рисунке:

Рис. 37: Решения  $x(t)$  и  $y(t)$  линеаризованной системы Лотки-Вольтерры

Более экзотический пример цикла наблюдается в системе:

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2) \quad (291)$$

Данная система имеет точку покоя  $(0, 0)$  – неустойчивый фокус. Система имеет периодическое решение  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ , орбитой которого является единичная окружность  $\mathbb{T}$ . На рисунке 291 показаны фазовые траектории для системы (291).

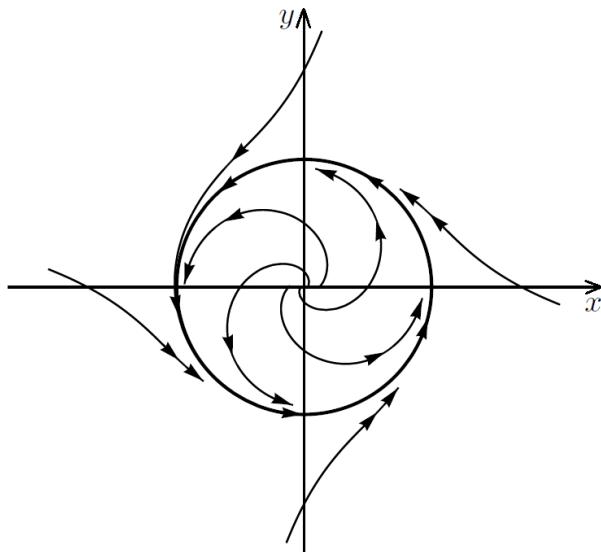


Рис. 38: Фазовый портрет системы (291)

Как видно из рисунка, орбиты, начинающиеся внутри либо вне единичной окружности  $\mathbb{T}$ , закручиваются по спирали по направлению к  $\mathbb{T}$  по мере того, как  $t \rightarrow \infty$ . Можно назвать  $\mathbb{T}$  предельным циклом, так как к нему приближаются другие близлежащие траектории при  $t \rightarrow \infty$ . На самом деле, к  $\mathbb{T}$  приближаются все близлежащие траектории при  $t \rightarrow \infty$ , поэтому можно назвать её притягивающим предельным циклом. Предельные циклы могут быть и отталкивающими; это означает, что близлежащие траектории приближаются к ним при  $t \rightarrow -\infty$ . Циклы в системе Лотки-Вольтерры не являются предельными циклами, поскольку близлежащие траектории сами являются циклами и поэтому находятся на положительном расстоянии от данного цикла.

**Циклы и точки равновесия.** Циклы всегда должны окружать одну или несколько точек равновесия. Этот факт иногда можно использовать, чтобы исключить наличие циклов. Например, модель конкурирующих видов

$$\frac{dx}{dt} = x(2 - x - y), \quad \frac{dy}{dt} = y(1 - x - 4y)$$

не может иметь циклов в биологически значимом первом квадранте  $x > 0, y > 0$ , поскольку его точки равновесия – это  $(0, 0), (0, \frac{1}{4}), (2, 0)$

и  $(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3})$ , ни одна из которых не находится в первом квадранте. Первый квадрант – это пример **односвязной области**, что, грубо говоря, означает область без дыр. Пример неодносвязной области – это кольцо между двумя концентрическими окружностями. Напомним, что мы называем область  $\Omega$  односвязной, если любую простую замкнутую кривую (то есть без самопересечений), лежащую в  $\Omega$ , можно стянуть в точку, не выходя из  $\Omega$ .

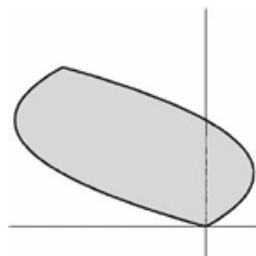


Рис. 39: Односвязная область

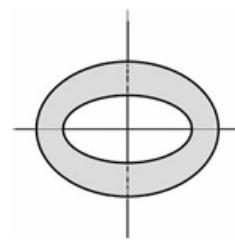


Рис. 40: Неодносвязная область

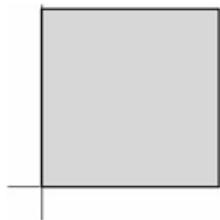


Рис. 41: Еще одна односвязная область – первый квадрант

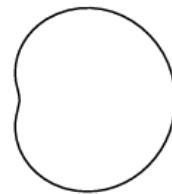


Рис. 42: Простая замкнутая кривая



Рис. 43: Кривая, которая не является ни простой, ни замкнутой



Рис. 44: Замкнутая кривая, которая не является простой

**Содержит ли область циклы?** Ответ на этот вопрос для односвязной области дает следующая теорема.

**Теорема 1 (об отсутствии циклов в односвязной области)**

Если область  $\Omega$  односвязна и не содержит точек равновесия системы (284), то в  $\Omega$  нет циклов.

С другой стороны, есть способы выяснить существование циклов в определенной области. Наиболее важным из них является теорема **Пуанкаре-Бендиксона**, которую мы опишем далее.

В нашей версии теоремы Пуанкаре-Бендиксона рассматривается двусвязная кольцеобразная (кольцевая) область между двумя простыми замкнутыми кривыми, одна из которых лежит внутри другой, как показано на рисунке (45).

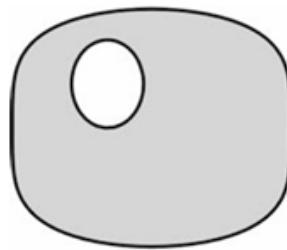


Рис. 45: Кольцевая область между двумя простыми замкнутыми кривыми

### Теорема 2 (Пуанкаре-Бендиксона)

Пусть  $\Omega$  – область, состоящая из двух простых замкнутых кривых  $C_o$  и  $C_i$ , где  $C_i$  находится внутри  $C_o$ , и кольцевая область находится между ними. Предположим, что  $\Omega$  не содержит точек равновесия системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \quad (292)$$

где  $f$  и  $g$  непрерывно дифференцируемы в  $\mathbb{R}^2$ , и предположим, что существует траектория  $(x(t), y(t))$ , которая остается в  $\Omega$  для всех  $t \geq 0$ . Тогда либо эта траектория сама является циклом в  $\Omega$ , либо она движется по спирали к некоторому предельному циклу в  $\Omega$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Обратим внимание, что этот результат, в частности, говорит о том, что при выполнении условий теоремы *область  $\Omega$  обязана содержать цикл*.

### Следствие из теоремы Пуанкаре-Бендиксона

Для того, чтобы доказать существование циклов, требуется найти кри-

вые  $C_o$  и  $C_i$  (а значит и область  $\Omega$ , расположенную между ними) такие, что векторное поле  $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$  для системы 292 во всех точках кривых  $C_o$  и  $C_i$  направлено внутрь области  $\Omega$  (см. рисунок 46). Это гарантирует, что траектория, которая начинается в  $\Omega$ , останется в  $\Omega$  для всех последующих моментов времени.

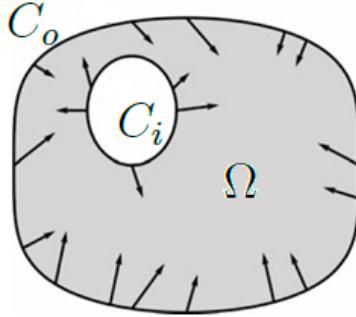


Рис. 46: Векторное поле в граничных точках области  $\Omega$

Проиллюстрируем теорему 2 несколькими примерами.

### Пример 1

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2)$$

Эту систему мы уже рассматривали ранее (система (291) и её фазовые траектории на рисунке 38). Часть её векторного поля с векторами одинаковой длины показана на рисунке (48). Мы хотим использовать теорему Пуанкаре-Бендиксона, чтобы показать, что эта система имеет цикл, который должен заключать в себе единственную точку равновесия, расположенную в точке  $(0, 0)$ . Для этого выберем две окружности  $x^2 + y^2 = r_1^2 < 1$  и  $x^2 + y^2 = r_2^2 > 1$ . Посмотрим, как направлено векторное поле для нашей системы, то есть вектор  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$  для нашей системы. Сравним направление вектора  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  с известным направлением радиус-вектора  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$  (направленного от начала координат). Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = x(-y + x(1 - x^2 - y^2)) + y(x + y(1 - x^2 - y^2)) = \\ = (x^2 + y^2)(1 - (x^2 + y^2)).$$

На окружности  $C_i$  выполнено:

$$x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow 1 - (x^2 + y^2) > 0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} > 0,$$

а значит угол между векторами  $\widehat{\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)} < \frac{\pi}{2}$ , то есть векторное поле  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  на окружности  $C_i$  направлено от центра, то есть внутрь кольцевой области.

На окружности  $C_o$  все наоборот:

$$x^2 + y^2 > 1 \Rightarrow 1 - (x^2 + y^2) < 0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} < 0,$$

а значит угол между векторами  $\widehat{\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)} > \frac{\pi}{2}$ , то есть векторное поле  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  на окружности  $C_o$  направлено к центру, то есть также внутрь кольцевой области.

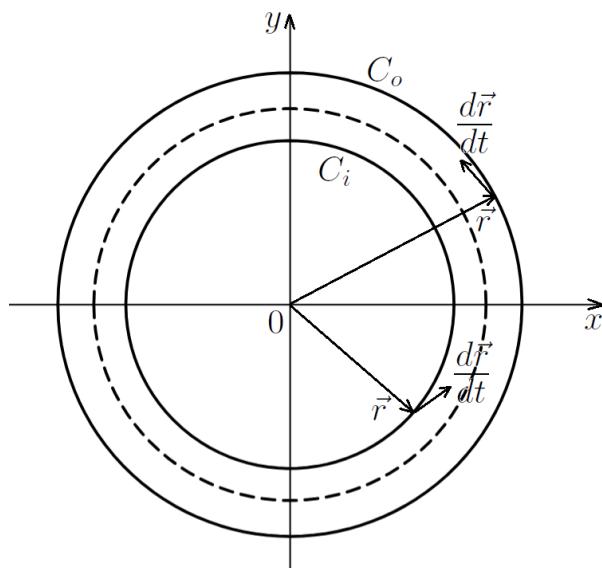


Рис. 47: Направление векторного поля на окружностях  $C_i$  и  $C_o$

Следовательно, выполнены условия для следствия из теоремы Пуанкаре-Бендиксона и существует предельный цикл, содержащийся в

выбранном кольце. Этот предельный цикл содержит внутри единственную точку равновесия системы  $(0, 0)$ . Рассуждение верно при любом выборе  $r_1 < 1 < r_2$ , что оставляет нам единственно возможный вывод, что единичная окружность является циклом. Мы можем убедиться в этом непосредственно, проверив, что  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$  является решением; его орбита показана на рисунке 49.

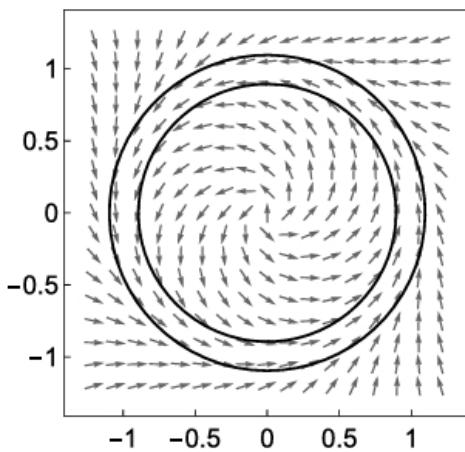


Рис. 48: Векторное поле и окружности  $x^2 + y^2 = r_1$ ,  $x^2 + y^2 = r_2$  для  $r_1 < 1 < r_2$

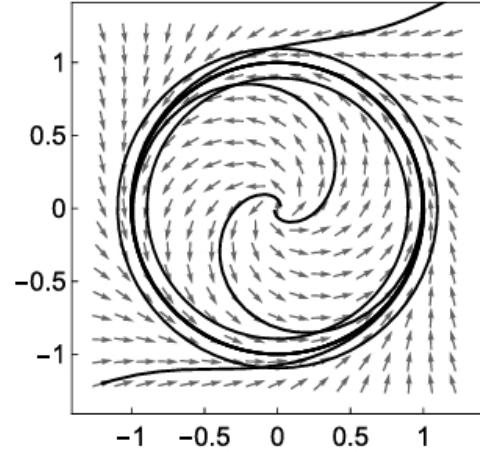


Рис. 49: Некоторые траектории для примера 1

## Пример 2

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - y \ln(9x^2 + 4y^2 + \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (293)$$

Мы покажем, как применить теорему Пуанкаре-Бендиксона в области  $\Omega$ , состоящей из окружностей  $x^2 + y^2 = 1$  и  $x^2 + y^2 = \frac{1}{25}$  и круглого кольца между ними (смотри рисунок 50), чтобы сделать вывод, что эта область содержит цикл. Единственная точка равновесия нашей системы —  $(0, 0)$ , и она лежит за пределами  $\Omega$ .

Перевод в полярные координаты упростит вычисления:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Заметим, что в полярных координатах окружности, ограничивающие область  $\Omega$ , задаются уравнениями  $r = 1$  и  $r = \frac{1}{5}$ . Для того, чтобы найти  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ , продифференцируем по  $t$  равенство  $r^2 = x^2 + y^2$ :

$$2r \frac{dr}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

Подставим  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$  из системы (293):

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{xy + y(-x - y \ln(9x^2 + 4y^2 + \frac{1}{2}))}{r} = \frac{-y^2 \ln(9x^2 + 4y^2 + \frac{1}{2})}{r} = \\ &= -r \sin^2 \varphi \ln \left( 4r^2 + 5r^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

На окружности  $r = 1$  имеем

$$\frac{dr}{dt} = -\sin^2 \varphi \ln \left( 4 + 5 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \right) \leq 0 \quad \forall \varphi$$

то есть векторное поле направлено к центру (к началу координат). Это говорит о том, что никакая траектория не может выйти из области  $\Omega$  через внешнюю границу  $r = 1$ .

На окружности  $r = \frac{1}{5}$  имеем

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{5} \sin^2 \varphi \underbrace{\ln \left( \frac{4}{25} + \frac{5}{25} \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \right)}_{<0 \text{ т.к. аргумент логарифма } <1} \geq 0 \quad \forall \varphi$$

то есть векторное поле направлено от центра (от начала координат). Это говорит о том, что никакая траектория не может выйти из области  $\Omega$  через внутреннюю границу  $r = \frac{1}{5}$ . Таким образом, траектория, находящаяся в  $\Omega$  при  $t = 0$ , останется в  $\Omega$  при  $t > 0$ . Тогда по теореме Пуанкаре-Бендиксона в  $\Omega$  должен существовать цикл. Рисунок 51 представляет собой набросок фазового портрета для этой системы. На нем видно, что траектории входят в область  $\Omega$ , но не могут из неё выйти.

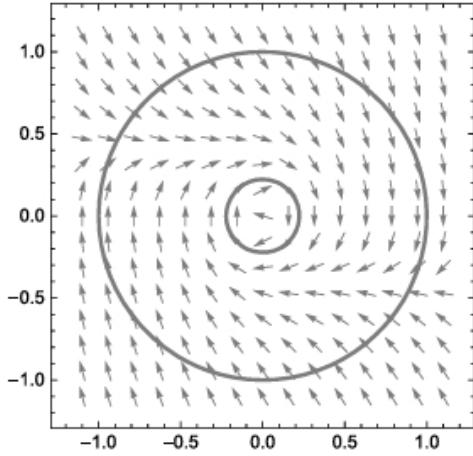


Рис. 50: Масштабированное векторное поле для примера 2 и окружностей  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = \frac{1}{25}$

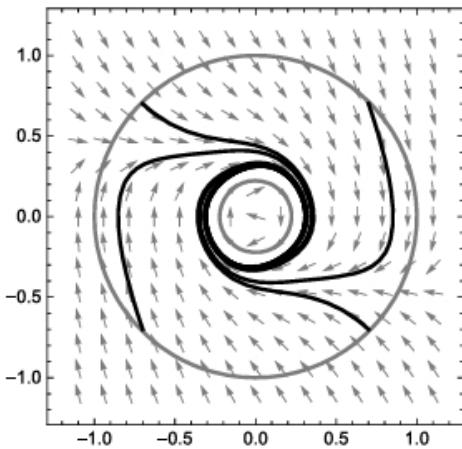


Рис. 51: Фазовый портрет в области  $\Omega$  для примера 2

Теорема Пуанкаре-Бендиксона дает условия, при которых можно заключить, что область содержит цикл. Следующая теорема дает условия, при которых область гарантированно не содержит цикла.

### Теорема 3 (признак отсутствия циклов в односвязной области)

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases} \quad (294)$$

где функции  $f$  и  $g$  непрерывно дифференцируемы. Если существует односвязная область  $\Omega$ , в которой функция

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

либо всегда строго положительна, либо всегда строго отрицательна, то в области  $\Omega$  нет циклов.

Доказательство:

От противного. Пусть существует цикл  $C$ , лежащий в  $\Omega$ . Обозначим через  $D$  область, ограниченную контуром  $C$ . Рассмотрим криволинейный интеграл по циклу:

$$\oint_C (f(x, y)dy - g(x, y)dx)$$

Кривая  $C$ , являющаяся циклом системы (294), задается параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{aligned} \oint_C (f(x, y)dy - g(x, y)dx) &= \int_{t_1}^{t_2} \left( f(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} - g(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} \right) = \\ &\quad \left/ \text{Подставим } \frac{dx}{dt} \text{ и } \frac{dy}{dt} \text{ из системы (294)} \right/ \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (f(x(t), y(t))g(x(t), y(t)) - g(x(t), y(t))f(x(t), y(t))) dt = 0. \end{aligned} \quad (295)$$

С другой стороны, по теореме Грина,

$$\oint_C (f(x, y)dy - g(x, y)dx) = \iint_D \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dxdy \quad (296)$$

По условию теоремы 3:  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} > 0$  (или  $< 0$ ) всюду в  $D$ . Значит  $\iint_D \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dxdy > 0$  (или, соответственно,  $< 0$ ), то есть не равен нулю.

Противоречие между формулами (295) и (296). Значит исходное предположение неверно и цикла внутри  $\Omega$  быть не может.

■

#### Пример 4

Рассмотрим систему уравнений для затухающих колебаний маятника

$$\frac{d\varphi}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m}v - \frac{g}{L} \sin \varphi.$$

Неизвестными функциями являются  $\varphi$  и  $v$  (вместо  $x$  и  $y$ ). Здесь в условиях теоремы 3:

$$f(\varphi, v) = v, \quad g(\varphi, v) = -\frac{c}{m}v - \frac{g}{L} \sin \varphi.$$

Проверим выполнение условий теоремы 3:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(v) + \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{c}{m}v - \frac{g}{L} \sin \varphi \right) = -\frac{c}{m}.$$

Поскольку  $c$  и  $m$  – положительные константы, то выражение отрицательно в каждой точке плоскости  $\theta Ov$ . Так как неравенство строгое, то приходим к выводу, что фазовый портрет системы для затухающих колебаний маятника не содержит циклов.

### Задачи для самостоятельного решения

**1.** Показать, что система

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2)$$

имеет цикл в области, заключенной между окружностями  $x^2 + y^2 = 1$  и  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ .

**2.** С помощью теоремы Пуанкаре-Бендиксона показать, что система

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 3y - x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -3x + 3y - y(x^2 + y^2)$$

имеет цикл в области  $\Omega$ , заключенной между двумя окружностями  $x^2 + y^2 = 2$  и  $x^2 + y^2 = 4$ . Проверьте это, найдя такие значения  $a$  и  $b$ , что

$$x = -a \cos(bt), \quad y = a \sin(bt)$$

является решением, орбита которого лежит в  $\Omega$ .

**3.** Найдите такие значения  $r_1$  и  $r_2$ , что

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y - xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 2y - ye^{x^2+y^2}$$

имеет цикл в области, заключенной между окружностями  $x^2 + y^2 = r_1^2$  и  $x^2 + y^2 = r_2^2$ .

**4.** С помощью теоремы Пуанкаре-Бендиксона показать, что система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - y \ln(9x^2 + 4y^2 + \frac{1}{2}) \end{cases}$$

имеет цикл в области между эллипсами  $36x^2 + 16y^2 = 1$  и  $\frac{9}{2}x^2 + 2y^2 = 1$ .

**5.** Покажите, что система

$$\frac{dx}{dt} = -xy + x, \quad \frac{dy}{dt} = xy + y$$

не имеет циклов в правой полуплоскости  $\{(x, y) : x > 0\}$ .

6. а) Запишите уравнение второго порядка

$$x'' + p(x)x' + q(x) = 0$$

как систему, задав  $y = x'$ .

б) Покажите, что если  $p(x) > 0$  для всех  $x$ , то система в (а) не может иметь ни одного периодического решения. Здесь мы предполагаем, что  $p(x)$  и  $q(x)$  непрерывно дифференцируемы.

в) Объясните, почему затухающий маятник является частным случаем (а)–(б).

## 7.2 Теория бифуркаций

Качественное поведение систем второго порядка определяется типом её точек равновесия и периодическими орбитами, а также другими её свойствами устойчивости. Один из важных практических вопросов заключается в сохранении системой своих характеристик качественного поведения при бесконечно малых возмущениях. Если система сохраняет эти свои свойства, то она называется структурно-устойчивой.

### Пример 1

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu - x_1^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases} \quad (297)$$

которая зависит от параметра  $\mu$ . Найдем точки равновесия системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = \mu, \\ x_2^2 = 0, \end{cases}$$

то есть при  $\mu > 0$  система имеет две точки равновесия  $(\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ .

При  $\mu < 0$  точек равновесия нет, так как система не имеет вещественных решений. Линеаризуем систему уравнений (297) в окрестности точки

равновесия  $(\sqrt{\mu}, 0)$ . Для этого ищем решение системы в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\mu} + \tilde{x}_1 \\ x_2 = \tilde{x}_2 \end{cases}$$

Подставим его в исходную систему (297):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \mu - \mu - 2\sqrt{\mu}\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\tilde{x}_2 \end{cases}$$

Пренебрегая нелинейным членом  $\tilde{x}_1^2$ , получим:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -2\sqrt{\mu}\tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\tilde{x}_2 \end{cases}$$

Матрица Якоби линеаризованной системы в точке  $(\sqrt{\mu}, 0)$  имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (298)$$

Найдем её собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  как корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} -2\sqrt{\mu} - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-2\sqrt{\mu} - \lambda)(-1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\sqrt{\mu} \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Так как  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_2 < 0$ , то, согласно классификации точек покоя,  $(\sqrt{\mu}, 0)$  – устойчивый узел. Отметим, что  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – это собственные значения матрицы Якоби (298). Аналогично, матрица Якоби линеаризованной системы в точке  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  имеет следующий вид (в этом случае решение ищем в виде:  $\dot{x}_1 = -\sqrt{\mu} + \tilde{x}_1$ ,  $\dot{x}_2 = \tilde{x}_2$ ):

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Здесь  $\lambda_1 = 2\sqrt{\mu} > 0$ ,  $\lambda_2 = -1 < 0$ , то есть  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  – седловая точка.

При уменьшении  $\mu$  седловая точка и узел приближаются друг к другу,

сталкиваются друг с другом при  $\mu = 0$  и исчезают при  $\mu < 0$ . В этом можно убедиться непосредственно, решив систему при разных  $\mu$ .

Случай  $\mu > 0$  :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \mu - x_1^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{\mu - x_1^2} = dt \\ -\frac{dx_2}{x_2} = dt \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_1}{\mu - x_1^2} = -\frac{dx_2}{x_2}$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим:

$$\frac{1}{2\sqrt{\mu}} \ln \left| \frac{x_1 + \sqrt{\mu}}{x_1 - \sqrt{\mu}} \right| = -\ln |x_2| + \ln C \Leftrightarrow \frac{C}{|x_2|} = \left| \frac{x_1 + \sqrt{\mu}}{x_1 - \sqrt{\mu}} \right|^{\frac{1}{2\sqrt{\mu}}},$$

то есть

$$|x_2| = C_1 \left| \frac{x_1 - \sqrt{\mu}}{x_1 + \sqrt{\mu}} \right|^{\frac{1}{2\sqrt{\mu}}}.$$

Случай  $\mu = 0$  :

Аналогично первому случаю получим

$$-\int \frac{dx_1}{x_1^2} = -\int \frac{dx_2}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} = \ln |x_2| + \ln C \Leftrightarrow C|x_2| = e^{-\frac{1}{x_1}},$$

то есть

$$|x_2| = C_1 e^{-\frac{1}{x_1}}.$$

Случай  $\mu = -p^2 < 0$  :

$$-\int \frac{dx_1}{p^2 + x_1^2} = -\int \frac{dx_2}{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{p} = \ln (C|x_2|) \Leftrightarrow |x_2| = C_1 e^{\frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{p}}.$$

При прохождении  $\mu$  через нулевое значение мы можем наблюдать существенное изменение фазового портрета системы. На рисунке 52 показаны фазовые портреты при положительном, нулевом и отрицательном значениях  $\mu$ .

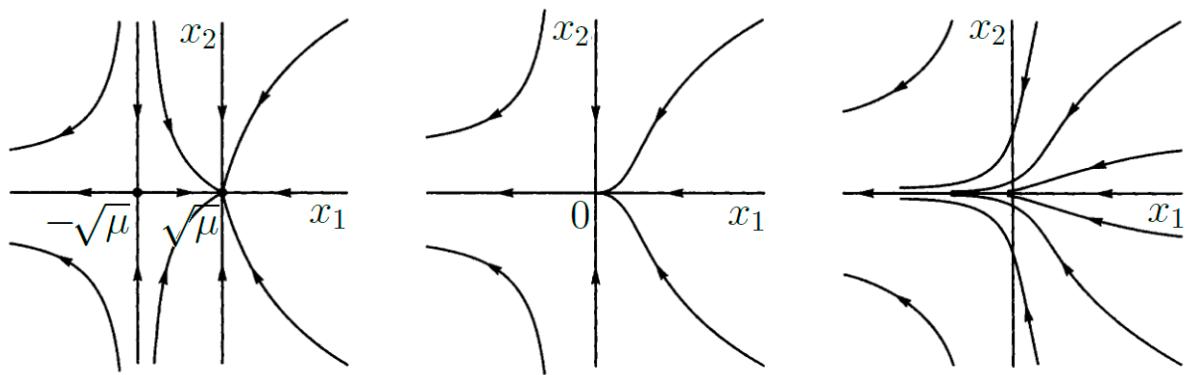


Рис. 52: Фазовые траектории системы при  $\mu > 0$  (слева),  $\mu = 0$  (в центре),  $\mu < 0$  (справа)

При положительном и сколь угодно малом значении  $\mu$  все траектории в области  $\{x_1 > -\sqrt{\mu}\}$  достигают устойчивого состояния в седловой точке  $(\sqrt{\mu}, 0)$ , при отрицательном  $\mu$  все траектории стремятся к бесконечности. Такое изменение качественного поведения называется *бифуркацией*.

### Определение

Бифуркацией называется изменение точек равновесия или периодических орбит, либо изменение свойств устойчивости при изменении параметра. Этот параметр называется *параметром бифуркации*, а значения параметра, при которых происходят эти изменения, – *точками бифуркации*.

### Замечание

В предыдущем примере параметром бифуркации является  $\mu$ , а точкой бифуркации –  $\mu = 0$ .

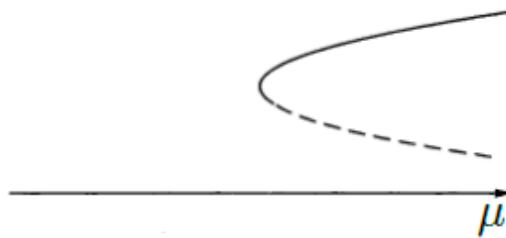


Рис. 53: Бифуркация «седло-узел»

Бифуркация, которую мы наблюдали в примере 1, может быть изобра-

жена в виде *биfurкационной диаграммы*, которая показана на рисунке 53.

На диаграмме показана мера амплитуды (или норма) точек равновесия в зависимости от параметра бифуркации  $\mu$ . Устойчивый узел представлен сплошной линией, а седловая точка – пунктирной. Здесь и далее ординатой бифуркационной диаграммы является мера амплитуды точек равновесия или периодических орбит; сплошные линии представляют собой устойчивые узлы, устойчивые фокусы и устойчивые предельные циклы, а пунктирные линии – неустойчивые узлы, неустойчивые фокусы и неустойчивые предельные циклы. Бифуркация, изображенная на рисунке 53, называется *биfurкацией «седло-узел»*, поскольку она возникает при столкновении седловой точки и узла. Заметим, что матрица Якоби имеет нулевое собственное значение в точке бифуркации  $\mu = 0$ . Эта особенность свойственна всем бифуркациям, изображенным на рисунках 53, 54, 55, которые являются примерами *биfurкаций с нулевым собственным значением*. На рисунке 54 показана *транскритическая бифуркация*, которая характеризуется тем, что при её прохождении точки равновесия остаются неизменными, но их свойства устойчивости изменяются.

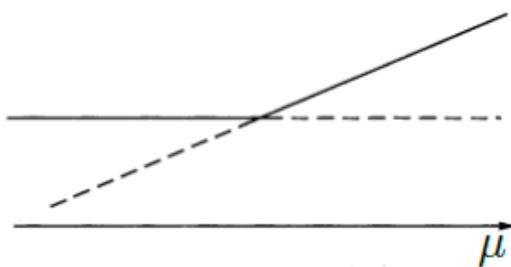


Рис. 54: Транскритическая бифуркация

## Пример 2

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

Эта система имеет две точки равновесия  $(0, 0)$  и  $(\mu, 0)$ . Матрица Якоби

в  $(0, 0)$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то есть точка  $(0, 0)$  является устойчивым узлом при  $\mu < 0$  и седловой точкой при  $\mu > 0$ . С другой стороны, матрица Якоби в  $(\mu, 0)$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то есть точка  $(\mu, 0)$  является седловой точкой при  $\mu < 0$  и устойчивым узлом при  $\mu > 0$ . Таким образом, точки равновесия сохраняются при прохождении через точку бифуркации  $\mu = 0$ , но  $(0, 0)$  изменяется из устойчивого узла в седловую точку, а  $(\mu, 0)$  – из седловой точки в устойчивый узел.

Отметим важное различие между примерами 1 и 2. Во примере 2 прохождение через точку бифуркации  $\mu = 0$  приводит к тому, что точка равновесия  $(0, 0)$  превращается из устойчивого узла в седловую точку, но при этом появляется устойчивый узел в точке  $(\mu, 0)$ , который при малом  $\mu$  будет близок к началу координат  $(0, 0)$ . Это означает, что воздействие бифуркации на систему не столь существенно. Предположим, например, что значение параметра  $\mu$  в исходной системе отрицательно, то есть начало координат  $(0, 0)$  представляет собой устойчивый узел. Из фазового портрета такой системы видно, что все траектории в множестве  $\{x_1 > \mu\}$  сходятся к началу координат при стремлении времени к бесконечности. Предположим, что исходное значение  $\mu$  настолько мало, что малые возмущения этого параметра могут привести к тому, что он станет положительным. Тогда начало координат  $(0, 0)$  станет седловой точкой, а  $(\mu, 0)$  – устойчивым узлом. Тогда из фазового портрета системы видно, что все траектории в множестве  $\{x_1 > 0\}$  сходятся к новому устойчивому узлу  $(\mu, 0)$  при стремлении времени к бесконечности. При малых значениях  $\mu$  устойчивый узел  $(\mu, 0)$  будет близок к предыдущей

устойчивой точке  $(0, 0)$ . Таким образом, хотя возмущенная система и не имеет желаемого устойчивого поведения, она тем не менее близка к нему.

В примере 1 с бифуркацией типа «седло-узел» ситуация совершенно иная. Предположим, что значение параметра  $\mu$  в исходной системе положительно, то есть все траектории в множестве  $\{x_1 > -\sqrt{\mu}\}$  сходятся к устойчивому узлу  $(\sqrt{\mu}, 0)$  при стремлении времени к бесконечности. Если исходное значение  $\mu$  мало и малые возмущения этого параметра приводят к тому, что он становится отрицательным, то устойчивый узел исчезает и траектории должны будут отклоняться от желаемой устойчивой рабочей точки или даже стремиться к бесконечности, как в этом конкретном примере. Вследствие указанных различий в воздействии на устойчивое поведение, бифуркация в примере с транскритической бифуркацией называется *безопасной* или *мягкой*, а бифуркация в примере с бифуркацией «седло-узел» – *опасной* или *жесткой*.

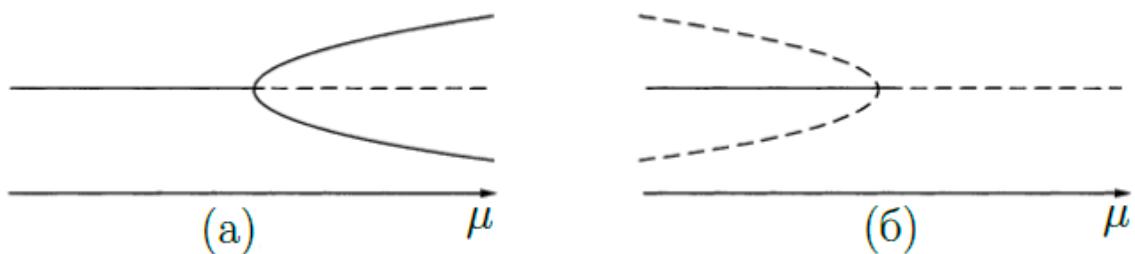


Рис. 55: а) Слева – суперкритическая бифуркация «вилка». б) Справа – субкритическая бифуркация «вилка»

Безопасные и опасные бифуркации можно видеть и на диаграммах, изображенных на рисунках 55 (а) и (б), на которых показаны *суперкритическая бифуркация «вилка»* и *субкритическая бифуркация «вилка»* соответственно.

### Пример 3

Суперкритическая бифуркация «вилка» возникает, например, в следующей системе:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

При  $\mu < 0$  имеется единственная точка равновесия в начале координат. Вычислив матрицу Якоби, можно показать, что эта точка является седловой. При  $\mu > 0$  существует три точки равновесия  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ . Первая из них является седловой точкой, а оставшиеся две – устойчивыми узлами. При прохождении  $\mu$  через точку бифуркации  $\mu = 0$  устойчивый узел в начале координат превращается в седловую точку и одновременно возникают еще два устойчивых узла в  $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ . Амплитуда возникших устойчивых узлов возрастает при увеличении  $\mu$  и, следовательно, она мала при малом  $\mu$ .

#### Пример 4

Субкритическая бифуркация «вилка» возникает в системе:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

При  $\mu < 0$  существует три точки равновесия: устойчивый узел в  $(0, 0)$  и две седловых точки  $(\pm\sqrt{-\mu}, 0)$ . При  $\mu > 0$  имеется единственная точка равновесия в начале координат и она является седловой точкой. При прохождении  $\mu$  через точку бифуркации  $\mu = 0$  устойчивый узел в начале координат сталкивается с седловыми точками  $(\pm\sqrt{-\mu}, 0)$  и превращается в седловую точку. Сравнивая суперкритическую и субкритическую бифуркации, можно заметить, что суперкритическая является безопасной, а субкритическая – опасной. В частности, если система имеет номинальную рабочую точку в устойчивом узле  $(0, 0)$  при  $\mu < 0$ , то при суперкритической бифуркации «вилка» обеспечивается устойчивое поведение при малом положительном возмущении параметра  $\mu$ , а после субкритической бифуркации «вилка» траектории начинают отклоняться от номинальной рабочей точки.

В рассмотренных простых примерах бифуркаций с нулевыми собственными значениями траектории стремились к бесконечности в опасных случаях. В более сложных примерах система может иметь дру-

гие точки равновесия или периодические орбиты, которые не изменяются при рассматриваемых бифуркациях. Траектории, отклоняющиеся от подвергающейся бифуркации точки равновесия, могут не уходить на бесконечность, но притягиваться другой точкой равновесия или периодической орбитой.

Когда устойчивый узел теряет устойчивость после прохождения точки бифуркации, собственное значение якобиана проходит через нулевое значение. Теряет ли устойчивость в подобной ситуации устойчивый фокус? Напомним, что в устойчивом узле собственные значения якобиана вещественные и отрицательные, а в устойчивом фокусе они комплексные и имеют отрицательную вещественную часть (соответственно, в неустойчивом фокусе вещественная часть положительна). При изменении характера устойчивости фокуса с устойчивого на неустойчивый два комплексно-сопряженных собственных числа должны пройти через мнимую ось. На рисунках 56 (а) и (б) показаны эти ситуации: на первом рисунке изображена *суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа*, а на втором — *субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа*.

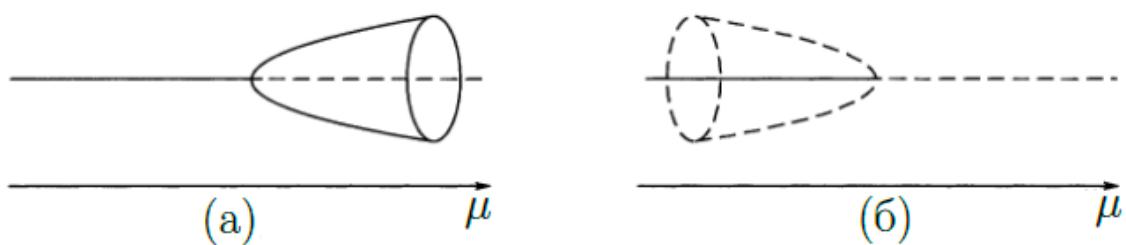


Рис. 56: а) Слева – суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа. б) Справа – субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа

### Пример 5

Суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа возникает, например, в системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1, \end{cases}$$

которая может быть представлена в полярных координатах

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \varphi, \end{cases}$$

в следующем виде:

$$\dot{r} = \mu r - r^3 \text{ и } \dot{\varphi} = 1.$$

Действительно,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{2x_2}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{dx_2}{dt}$$

Учитывая, что  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{x_1}{r} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{x_2}{r} \cdot \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{r} (x_1^2(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_1 x_2) + \\ &+ \frac{1}{r} (x_2^2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_2 x_1) = \frac{1}{r} (r^2(\mu - r^2)) = \mu r - r^3. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}$  (в правой полуплоскости, в левой полуплоскости  $\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}$ , но производная у них одна и та же), получим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}} \cdot \left( -\frac{x_2}{x_1^2} \right) \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}} \cdot \frac{1}{x_1} \cdot \frac{dx_2}{dt}$$

Подставим сюда  $\frac{dx_1}{dt}$  и  $\frac{dx_2}{dt}$  из исходной системы и  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \left( -x_2 \frac{dx_1}{dt} + x_1 \frac{dx_2}{dt} \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} (-x_2 x_1 (\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_2^2 + x_1 x_2 (\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1^2) = \\ &= \frac{1}{r^2} (x_1^2 + x_2^2) = 1. \end{aligned}$$

Для точки покоя (равновесия) должно быть выполнено:

$$\begin{cases} \dot{r} = 0, \\ \dot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Поскольку из исходной системы следует, что  $\dot{\varphi} = 1 \neq 0$ , то точкой покоя (равновесия) может быть только начало координат  $(0, 0)$ , где угол  $\varphi$  не определен. Второе условие

$$\dot{r} = 0 \Leftrightarrow \mu r - r^3 = 0 \quad (\text{выполнено в начале координат})$$

Фазовые портреты для двух случаев, соответствующих  $\mu$  с различными знаками, показаны на рисунке 57. При  $\mu < 0$  начало координат является устойчивым фокусом и все траектории притягиваются к нему, а при  $\mu > 0$  начало координат является неустойчивым фокусом, но имеется устойчивый предельный цикл, который притягивает все траектории за исключением нулевого решения. Предельный цикл задается уравнением  $r = \sqrt{\mu}$ , то есть амплитуда колебаний возрастает с увеличением  $\mu$  и мала при малом  $\mu$ . Рассматриваемая бифуркация является безопасной, так как при исчезновении устойчивого фокуса вследствие малого возмущения система будет порождать устойчивое колебание с малой амплитудой. Для того чтобы изучить поведение собственных значений при бифуркации, заметим, что якобиан в начале координат

$$\begin{vmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{vmatrix}$$

имеет собственные значения  $\mu \pm i$   $((\mu - \lambda)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu \pm i)$ , которые пересекают мнимую ось слева направо при увеличении  $\mu$  из области отрицательных значений в область положительных значений.

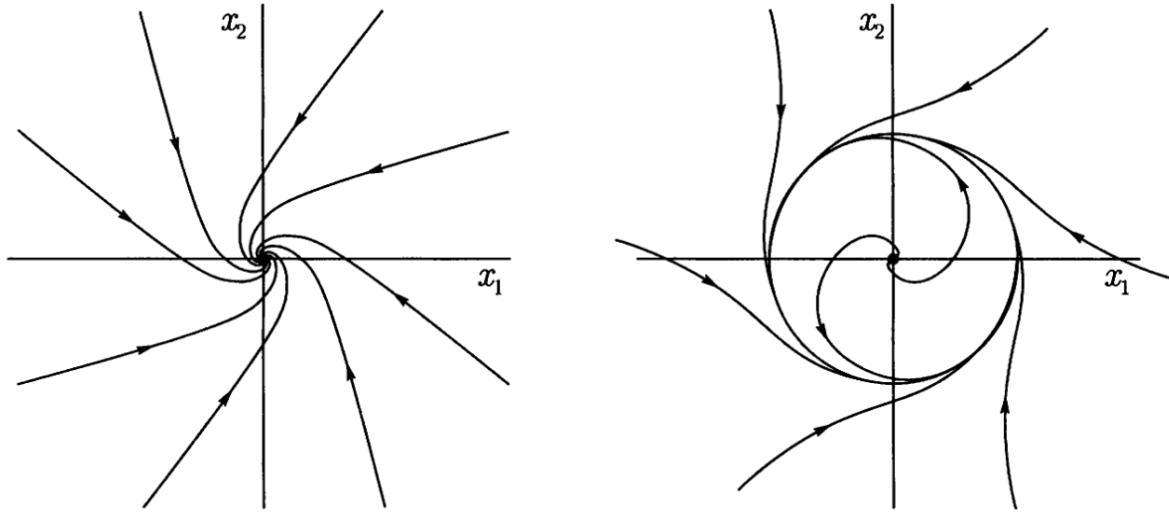


Рис. 57: Фазовый портрет суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа при  $\mu < 0$  (слева) и  $\mu > 0$  (справа)

### Пример 6

Субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа возникает в системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1[\mu + (x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2] - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2[\mu + (x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2] + x_1, \end{cases}$$

которая в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \text{ и } \dot{\varphi} = 1.$$

Эта система имеет единственную точку равновесия в начале координат, которая является устойчивым фокусом при  $\mu < 0$  и неустойчивым фокусом при  $\mu > 0$ . Предельный цикл системы может быть определен из следующего уравнения:

$$0 = \mu + r^2 - r^4 \Leftrightarrow r^4 - r^2 - \mu = 0.$$

При  $\mu < 0$  имеется два предельных цикла, определяемых равенствами  $r^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\mu}}{2}$ . Для того, чтобы определить устойчивость данных циклов, построим график функции  $\dot{r}(r) = r(\mu + r^2 - r^4)$  (смотри рисунок 58). По графику можно увидеть, что предельный цикл  $r^2 = \frac{1+\sqrt{1+4\mu}}{2}$  является устойчивым, а  $r^2 = \frac{1-\sqrt{1+4\mu}}{2}$  – неустойчивым. Действительно,

график функции показывает знак производной  $\dot{r}$  при различных  $r$ . При  $r < \sqrt{\frac{1-\sqrt{1+4\mu}}{2}}$  производная  $\dot{r} < 0$ , то есть длина радиус-вектора  $r$  уменьшается, а траектория стремится к началу координат, удаляясь от цикла. При  $r > \sqrt{\frac{1-\sqrt{1+4\mu}}{2}}$  производная  $\dot{r} > 0$ , значит длина радиус-вектора  $r$  увеличивается, а траектория удаляется от данного цикла, приближаясь ко второму циклу. Аналогично можно показать устойчивость второго цикла. При  $r > \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4\mu}}{2}}$  производная  $\dot{r} < 0$ , значит длина радиус-вектора  $r$  уменьшается и траектория приближается к циклу. При малом  $|\mu|$  неустойчивый предельный цикл может быть аппроксимирован уравнением  $r^2 = \frac{1-\sqrt{1+4\mu}}{2} \sim \frac{\frac{1}{2} \cdot 4\mu}{2} = -\mu$  (при  $x \rightarrow 0$ :  $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$ ). При  $\mu > 0$  имеется только один устойчивый предельный цикл  $r^2 = \frac{1+\sqrt{1+4\mu}}{2}$ . Таким образом, при увеличении  $\mu$  из области отрицательных значений в область положительных значений устойчивый фокус в начале координат сливаются с неустойчивым предельным циклом и превращается в неустойчивый фокус (смотрите бифуркационную диаграмму 56(б)). Заметим, что устойчивый предельный цикл не показан на бифуркационной диаграмме, так как изменение  $\mu$  приводит лишь к изменению его амплитуды. Субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа является опасной, так как малое возмущение номинального устойчивого фокуса в начале координат может привести к тому, что траектории начнут отклоняться от начала координат и притягиваться к устойчивому предельному циклу.

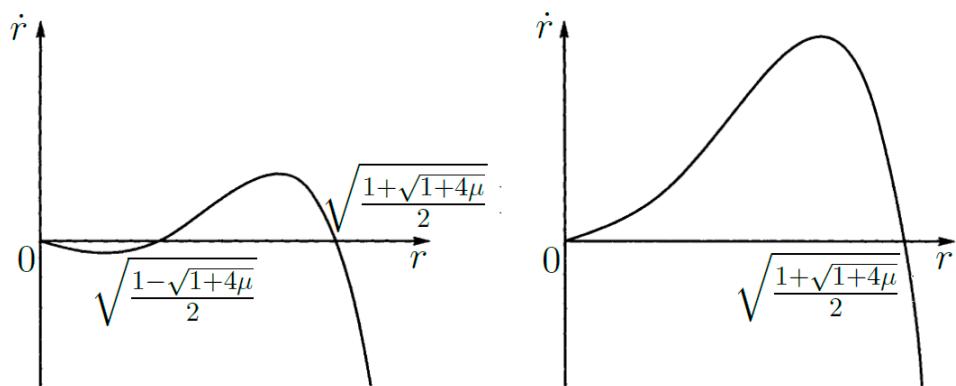


Рис. 58: График  $r\mu + r^3 - r^5$  при  $\mu < 0$  (слева) и  $\mu > 0$  (справа)

Все показанные на рисунках 53-56 бифуркции происходили в окрестности точки равновесия. Поэтому они называются локальными. Существуют также глобальные бифуркции, которые происходят на больших областях пространства состояния и не могут быть описаны в окрестности какой-либо точки равновесия. Мы рассмотрим лишь один пример глобальной бифуркции. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \mu x_2 + x_1 - x_1^2 + x_1 x_2. \end{cases}$$

Имеются две точки равновесия в  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ . С использованием линеаризации системы мы можем установить, что  $(0, 0)$  всегда является седловой точкой, а  $(1, 0)$  – неустойчивым фокусом при  $-1 < \mu < 1$ . Ограничимся рассмотрением системы при  $-1 < \mu < 1$ . На рисунке 59 показан фазовый портрет для четырех различных значений  $\mu$ . Фазовые портреты при  $\mu = -0.95$  и  $\mu = -0.88$  типичны для случая  $\mu < \mu_c \approx -0.8645$ , а при  $\mu = -0.8$  – типичны для случая  $\mu > \mu_c$ . При  $\mu < \mu_c$  имеется устойчивый предельный цикл, который окружает неустойчивый фокус. При приближении значения  $\mu$  к  $\mu_c$  предельный цикл расширяется до тех пор, пока не коснется седловой точки при  $\mu = \mu_c$ . При этом возникает траектория, которая начинается и заканчивается в седловой точке. Такая траектория называется *гомоклинической орбитой*. При  $\mu > \mu_c$  предельный цикл исчезает. Заметим, что эта бифуркация не приводит к изменениям точек равновесия  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ . Такой тип бифуркации называется *гомоклинической бифуркацией* (saddle-connection, homoclinic bifurcation).

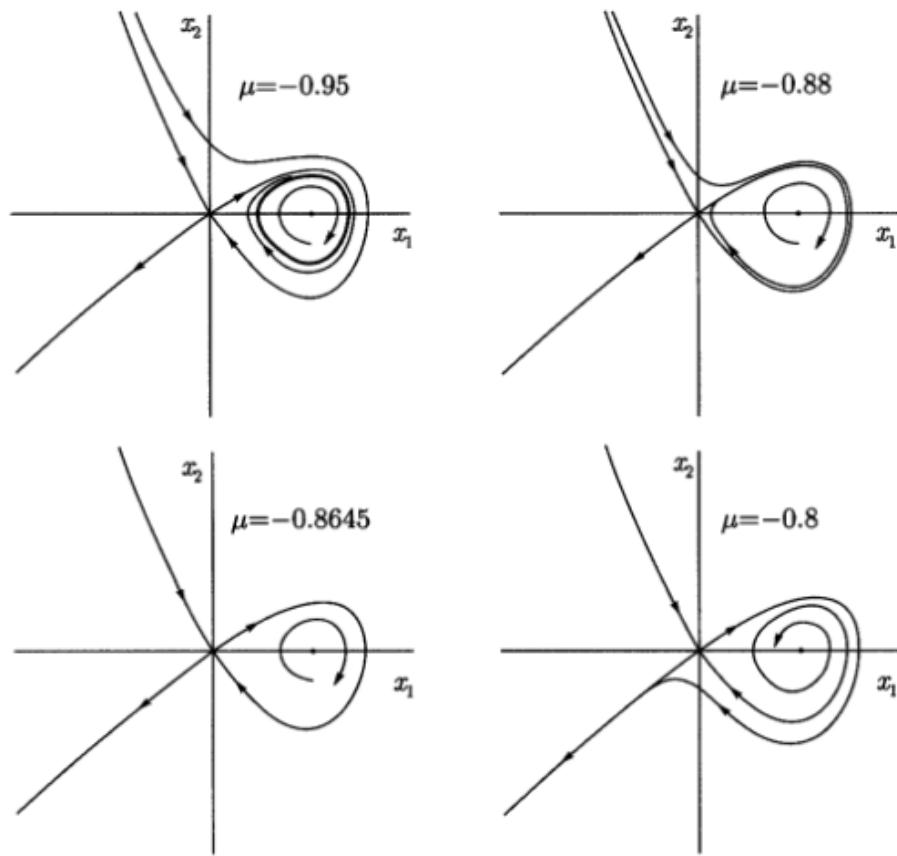


Рис. 59: Гомоклинические бифуркации

### Задачи для самостоятельного решения

7. Для каждой из нижеследующих систем определить и классифицировать бифуркации, которые возникают при изменении  $\mu$ :

- (1)  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu(x_1 + x_2) - x_2 - x_1^3 - 3x_1^2x_2;$
- (2)  $\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -(1 + \mu^2)x_1 + 2\mu x_2 - \mu x_1^3 + 2(x_2 - \mu x_1)^3;$
- (3)  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu - x_2 - x_1^2 - 2x_1x_2;$
- (4)  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(1 + \mu^2)x_1 + 2\mu x_2 + \mu x_1^3 - x_1^2x_2;$
- (5)  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu(x_1 + x_2) - x_2 - x_1^3 + 3x_1^2x_2;$
- (6)  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu(x_1 + x_2) - x_2 - x_1^2 - 2x_1x_2.$

8. Следующая модель используется при анализе взаимодействия между тормозящим и возбуждающим нейронами в биологической системе. В своей простейшей форме эта модель описывает взаимодействие двух

нейронов. Переменными состояниями являются  $x_1$  – выход возбуждающего нейрона и  $x_2$  – выход тормозящего нейрона. Уравнения эволюции системы имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{\tau}x_1 + \text{th}(\lambda x_1) - \text{th}(x_2), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{\tau}x_2 + \text{th}(\lambda x_1) + \text{th}(\lambda x_2),\end{aligned}$$

где  $\tau > 0$  – постоянная времени и  $\lambda$  – коэффициент усиления.

- (а) Используя критерий Пуанкаре–Бендиксона, показать, что система имеет периодическую орбиту при  $\lambda\tau > 1$ .
- (б) Построить фазовый портрет системы при  $\tau = 1$ ,  $\lambda = 2$  и обсудить качественное поведение системы.
- (в) Выполнить задание (б) при  $\tau = 1$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}$ .
- (г) Определить и классифицировать бифуркации, которые возникают при изменении  $\mu = \lambda\tau$ .

### 7.3 Ответы и решения некоторых задач

1. Показать, что система

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2)$$

имеет цикл в области  $\Omega$ , заключенной между окружностями  $x^2 + y^2 = 1$  и  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ .

Решение.

Перевод в полярные координаты упростит вычисления:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Заметим, что в полярных координатах окружности, ограничивающие область  $\Omega$ , задаются уравнениями  $r = 1$  и  $r = \frac{1}{2}$ . Для того, чтобы найти  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ , продифференцируем по  $t$  равенство  $r^2 = x^2 + y^2$ :

$$2r \frac{dr}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

Подставим  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$  из исходной системы:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{r} \left( -xy + x^2(1 - 2x^2 - 3y^2) + xy + y^2(1 - 2x^2 - 3y^2) \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left( x^2 + y^2 - 2x^4 - 3x^2y^2 - 2x^2y^2 - 3y^4 \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left( r^2 - 2r^4 \cos^4 \varphi - 5r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 3r^4 \sin^4 \varphi \right) = \\ &= r \left( 1 - 2 \underbrace{r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1}^2 - r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - r^2 \sin^4 \varphi \right). \end{aligned}$$

На окружности  $r = 1$  имеем

$$\frac{dr}{dt} = 1 \cdot (1 - 2 \cdot 1^2 - 1^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 1^2 \sin^4 \varphi) \leq 0 \quad \forall \varphi$$

то есть векторное поле направлено к центру (к началу координат). Это говорит о том, что никакая траектория не может выйти из области  $\Omega$  через внешнюю границу  $r = 1$ .

На окружности  $r = \frac{1}{2}$  имеем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \underbrace{-\frac{1}{4} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^4 \varphi}_{> -\frac{1}{2}} \right) \geq 0 \quad \forall \varphi$$

то есть векторное поле направлено от центра (от начала координат). Это говорит о том, что никакая траектория не может выйти из области  $\Omega$  через внутреннюю границу  $r = \frac{1}{2}$ . Таким образом, траектория, находящаяся в  $\Omega$  при  $t = 0$ , останется в  $\Omega$  при  $t > 0$ . Тогда по теореме Пуанкаре-Бендиксона в  $\Omega$  должен существовать цикл. Траектории входят в область  $\Omega$ , но не могут из неё выйти.

**2.** С помощью теоремы Пуанкаре-Бендиксона показать, что система

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 3y - x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -3x + 3y - y(x^2 + y^2)$$

имеет цикл в области  $\Omega$ , заключенной между двумя окружностями  $x^2 + y^2 = 2$  и  $x^2 + y^2 = 4$ . Проверьте это, найдя такие значения  $a$  и  $b$ , что

$$x = -a \cos(bt), \quad y = a \sin(bt)$$

является решением, орбита которого лежит в  $\Omega$ .

Решение. Аналогично задаче 1. Для проверки следует подставить  $x = -a \cos(bt)$ ,  $y = a \sin(bt)$  в систему уравнений и найти  $a$ ,  $b$ .

**3.** Найдите такие значения  $r_1$  и  $r_2$ , что

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y - xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 2y - ye^{x^2+y^2}$$

имеет цикл в области, заключенной между окружностями  $x^2 + y^2 = r_1^2$  и  $x^2 + y^2 = r_2^2$ .

Решение.

В полярных координатах  $\frac{dr}{dt}$  уже было найдено в задаче 1:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right).$$

В нашем случае:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \left( 2x^2 + xy - x^2 e^{x^2+y^2} - xy + 2y^2 - y^2 e^{x^2+y^2} \right) = 2r - re^{r^2}.$$

Выберем подходящие  $r_1$  и  $r_2$ .

Пусть  $r_1 = 0, 1$ . Тогда  $\frac{dr}{dt} = 0, 1(2 - e^{0,1}) > 0$ , то есть поле направлено от центра.

Пусть  $r_2 = 1$ . Тогда  $\frac{dr}{dt} = 2 - e < 0$ , то есть поле направлено к центру.

Тогда по теореме Пуанкаре-Бендиксона есть цикл между окружностями.

**4.** С помощью теоремы Пуанкаре-Бендиксона показать, что система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - y \ln(9x^2 + 4y^2 + \frac{1}{2}) \end{cases}$$

имеет цикл в области между эллипсами  $36x^2 + 16y^2 = 1$  и  $\frac{9}{2}x^2 + 2y^2 = 1$ .

Решение.

Перейдем в полярные координаты  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

$$\begin{aligned} 36x^2 + 16y^2 = 1 &\Leftrightarrow 36r_1^2 \cos^2 \varphi + 16r_1^2 \sin^2 \varphi = 1 \Leftrightarrow 4r_1^2(4 + 5 \cos^2 \varphi) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4r_1^2 + 5r_1^2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Аналогично для второго эллипса:

$$\frac{9}{2}x^2 + 2y^2 = 1 \mid \cdot 8 \Leftrightarrow 36x^2 + 16y^2 = 8 \Leftrightarrow 4r_2^2 + 5r_2^2 \cos^2 \varphi = 2$$

Как уже было доказано в задаче 1,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

Подставим  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$  из исходной системы:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{xy + y(-x - y \ln(9x^2 + 4y^2 + \frac{1}{2}))}{r} = \frac{-y^2 \ln(9x^2 + 4y^2 + \frac{1}{2})}{r} = \\ &= -r \sin^2 \varphi \ln \left( 4r^2 + 5r^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Для внутренней границы области  $4r_1^2 + 5r_1^2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{4}$  :

$$\frac{dr}{dt} = -r_1 \sin^2 \varphi \underbrace{\ln \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)}_{<0} > 0 \Rightarrow \text{поле направлено от центра.}$$

Для внешней границы области  $4r_2^2 + 5r_2^2 \cos^2 \varphi = 2$  :

$$\frac{dr}{dt} = -r_2 \sin^2 \varphi \underbrace{\ln \left( 2 + \frac{1}{2} \right)}_{>0} < 0 \Rightarrow \text{поле направлено к центру.}$$

Тогда, по теореме Пуанкаре-Бендиксона, существует цикл между эллипсами.

**5.** Покажите, что система

$$\frac{dx}{dt} = -xy + x, \quad \frac{dy}{dt} = xy + y$$

не имеет циклов в правой полуплоскости  $\{(x, y) : x > 0\}$ .

Решение.

Система не имеет точек покоя при  $x > 0$ . Действительно,

$$\begin{cases} -xy + x = 0 \\ xy + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = 1 \\ x = -1 \end{cases},$$

то есть при  $x > 0$  у системы нет точек покоя (равновесия). Тогда по теореме 1 в области  $x > 0$  не может быть циклов.

**6. а)** Запишите уравнение второго порядка

$$x'' + p(x)x' + q(x) = 0$$

как систему, задав  $y = x'$ .

**б)** Покажите, что если  $p(x) > 0$  для всех  $x$ , то система в (а) не может

иметь ни одного периодического решения. Здесь мы предполагаем, что  $p(x)$  и  $q(x)$  непрерывно дифференцируемы.

в) Объясните, почему затухающий маятник является частным случаем (а)–(б).

Решение.

а) Пусть  $y = x'$ . Тогда уравнение  $x'' + p(x)x' + q(x) = 0$  можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y = f \\ \frac{dy}{dt} = -p(x)y - q(x) = g \end{cases}$$

б)  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -p < 0 \quad \forall x \Rightarrow$  по теореме 3 система не имеет циклов.

в) Система уравнений для колебаний затухающего маятника:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\underbrace{\frac{c}{m}}_{p(x)} \underbrace{v}_y - \underbrace{\frac{g}{L} \sin \varphi}_{q(x)} \end{cases}$$

Данная система является аналогом системы из пункта а). Здесь  $v = y = x'$ , переменная  $\varphi$  играет роль  $x$ . Условие  $p(x) > 0$  в случае маятника будет выглядеть так:  $\frac{c}{m} = p > 0$ , что верно, так как параметры  $c$  и  $m$  положительные. Последнее условие гарантирует отсутствие циклов.

7. Для каждой из нижеследующих систем определить и классифицировать бифуркции, которые возникают при изменении  $\mu$ :

- (1)  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu(x_1 + x_2) - x_2 - x_1^3 - 3x_1^2x_2;$
- (2)  $\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -(1 + \mu^2)x_1 + 2\mu x_2 - \mu x_1^3 + 2(x_2 - \mu x_1)^3;$
- (3)  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu - x_2 - x_1^2 - 2x_1x_2;$
- (4)  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(1 + \mu^2)x_1 + 2\mu x_2 + \mu x_1^3 - x_1^2x_2;$
- (5)  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu(x_1 + x_2) - x_2 - x_1^3 + 3x_1^2x_2;$
- (6)  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu(x_1 + x_2) - x_2 - x_1^2 - 2x_1x_2.$

Решение.

$$7.1) \dot{x}_1 = \underbrace{x_2}_f, \quad \dot{x}_2 = \underbrace{\mu(x_1 + x_2) - x_2 - x_1^3 - 3x_1^2 x_2}_g.$$

Найдем точки покоя (равновесия):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \mu x_1 - x_1^3 = 0 \end{cases}$$

Соответственно, точки равновесия:  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{\mu}, 0)$ ,  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ . Матрица Якоби имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu - 3x_1^2 - 6x_1 x_2 & \mu - 1 - 3x_1^2 \end{pmatrix}$$

1. В точке  $(0, 0)$ :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & \mu - 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы  $J$ :

$$J = \begin{vmatrix} 0\lambda & 1 \\ \mu & \mu - 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda\mu + \lambda + \lambda^2 - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\mu - 1)\lambda - \mu = 0.$$

Соответственно,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu - 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu - 1}{2}\right)^2 + \mu}$$

Рассмотрим 2 случая.  $\mu > 0 \Rightarrow$  корни разных знаков:  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0 \Rightarrow$  точка равновесия типа “седло.”

Случай  $\mu < 0$ .

$$\left(\frac{\mu - 1}{2}\right)^2 + \mu = \frac{\mu^2 - 2\mu + 1 + 4\mu}{4} = \frac{(\mu + 1)^2}{4} \geq 0,$$

то есть под корнем положительное число, меньшее по модулю чем  $\left|\frac{\mu - 1}{2}\right|^2$ .

Значит  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  одного знака. Так как  $\mu < 0$ , то  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0 \Rightarrow$  Точка равновесия – это устойчивый узел.

2. В точках  $(\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  (отметим, что эти точки есть только при  $\mu > 0$ , так как система дифференциальных уравнений вещественная и комплексные решения не допускаются):

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu - 3\mu & \mu - 3\mu - 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы  $J$ :

$$J = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2\mu & -2\mu - 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (2\mu + 1)\lambda + 2\mu = 0.$$

Соответственно,

$$\lambda_{1,2} = -\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\mu}.$$

Так как  $\mu > 0$ , то для обеих точек  $(\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  собственные числа  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . То есть точки равновесия  $(\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  – это устойчивые узлы.

Итак, мы имеем дело с суперкритической бифуркацией типа “вилка.”

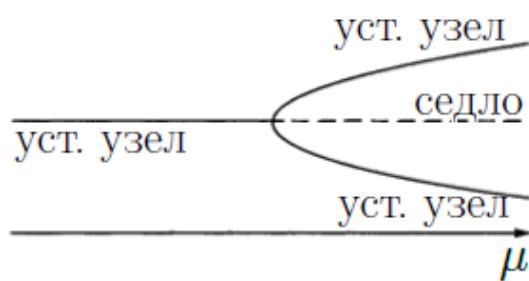


Рис. 60: Суперкритическая бифуркация типа “вилка”

$$7.3) \dot{x}_1 = \underbrace{x_2}_f, \quad \dot{x}_2 = \underbrace{\mu - x_2 - x_1^2 - 2x_1x_2}_g.$$

Найдем точки покоя (равновесия):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \mu - x_1^2 = 0 \end{cases}$$

Соответственно, точки равновесия:  $(\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ . Параметр  $\mu > 0$ , так как система дифференциальных уравнений вещественная и комплексные решения не допускаются. Матрица Якоби имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1 - 2x_2 & -1 - 2x_1 \end{pmatrix}$$

1. В точке  $(\sqrt{\mu}, 0)$ :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{\mu} & -1 - 2\sqrt{\mu} \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы  $J$ :

$$J = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2\sqrt{\mu} & -1 - 2\sqrt{\mu} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2\sqrt{\mu}\lambda + \lambda^2 + 2\sqrt{\mu} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + (1 + 2\sqrt{\mu})\lambda + 2\sqrt{\mu} = 0.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{1}{2} - \sqrt{\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\mu}\right)^2 - 2\sqrt{\mu}} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\mu} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{\mu} + \mu - 2\sqrt{\mu}} = \\ &= -\frac{1}{2} - \sqrt{\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\mu}\right)^2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\mu} \pm \left|\frac{1}{2} - \sqrt{\mu}\right|. \\ \sqrt{\mu} &> \frac{1}{2} : \quad \lambda_1 = -1 < 0, \quad \lambda_2 = -2\sqrt{\mu} < 0. \\ \sqrt{\mu} &= \frac{1}{2} : \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0. \\ \sqrt{\mu} &< \frac{1}{2} : \quad \lambda_1 = -2\sqrt{\mu} < 0, \quad \lambda_2 = -1 < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в точке  $(\sqrt{\mu}, 0)$  корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественные и отрицательные, что означает точку равновесия типа “устойчивый узел.”

2. В точке  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\sqrt{\mu} & -1 + 2\sqrt{\mu} \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы  $J$ :

$$J = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2\sqrt{\mu} & -1 + 2\sqrt{\mu} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2\sqrt{\mu}\lambda + \lambda^2 - 2\sqrt{\mu} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + (1 - 2\sqrt{\mu})\lambda - 2\sqrt{\mu} = 0.$$

Соответственно,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\mu}\right)^2 + 2\sqrt{\mu}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\mu} \pm \left|\frac{1}{2} - \sqrt{\mu}\right|.$$

$$\sqrt{\mu} > \frac{1}{2} : \quad \lambda_1 = 2\sqrt{\mu} - 1 > 0, \quad \lambda_2 = 0.$$

$$\sqrt{\mu} = \frac{1}{2} : \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$$\sqrt{\mu} < \frac{1}{2} : \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2\sqrt{\mu} - 1 < 0.$$

При  $\sqrt{\mu} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{4}$  корни  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ , что означает неустойчивую точку покоя, неустойчивый узел или седло, вне зависимости от знака  $\lambda_2$  в окрестности точки  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ . При  $\sqrt{\mu} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu < \frac{1}{4}$  корни  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ . Это не позволяет однозначно определить точку покоя. Возможен вариант устойчивого узла или седла, в зависимости от знака  $\lambda_1$  в окрестности точки  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ .

Итак, возможные параметры бифуркации:  $\mu = 0$  и  $\mu = \frac{1}{4}$ . В случае наличия бифуркации, она будет транскритической, так как не происходит ветвления решения, меняется только тип точки равновесия.

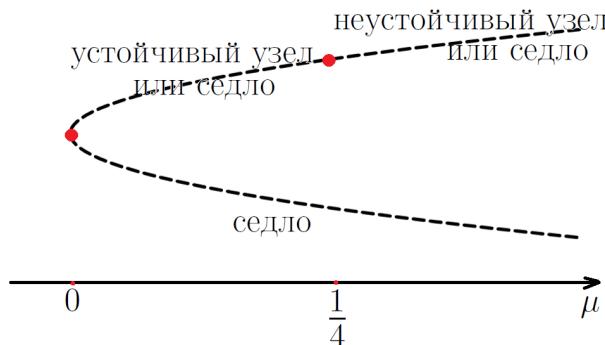


Рис. 61: Транскритическая бифуркация

$$7.4) \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(1 + \mu^2)x_1 + 2\mu x_2 + \mu x_1^3 - x_1^2 x_2$$

Найдем точки покоя (равновесия):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -(1 + \mu^2)x_1 + \mu x_1^3 = 0 \end{cases}$$

Соответственно, точки равновесия:  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{\mu + \frac{1}{\mu}}, 0)$  и  $(-\sqrt{\mu + \frac{1}{\mu}}, 0)$ .

Параметр  $\mu > 0$ , так как система дифференциальных уравнений вещественная и комплексные решения не допускаются. Матрица Якоби имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - \mu^2 + 3\mu x_1^2 - 2x_1 x_2 & 2\mu - x_1^2 \end{pmatrix}$$

1. В точке  $(\sqrt{\mu}, 0)$ :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - \mu^2 & 2\mu \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы  $J$ :

$$J = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 - \mu^2 & 2\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\mu\lambda + 1 + \mu^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \mu)^2 = -1.$$

Соответственно,

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i.$$

$\mu > 0$  : неустойчивый фокус.

$\mu < 0$  : устойчивый фокус.

В точке  $(0, 0)$  – транскритическая бифуркация.

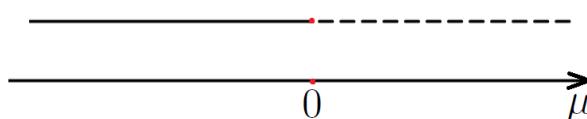


Рис. 62: Транскритическая бифуркация

2. Найдем собственные числа матрицы  $J$  для точек  $\left(\sqrt{\mu + \frac{1}{\mu}}, 0\right)$  и  $\left(-\sqrt{\mu + \frac{1}{\mu}}\right)$ :

$$\begin{aligned}
 J = & \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 - \mu^2 + 3\mu\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) & 2\mu - \mu - \frac{1}{\mu} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \lambda^2 - \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)\lambda + 1 + \mu^2 - 3\mu^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \lambda^2 - \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)\lambda - 2(\mu^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2 + 2\mu^2 + 2}}_{>\frac{1}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)}
 \end{aligned}$$

Следовательно, корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественные и разных знаков, то есть каждая из точек равновесия  $\left(\sqrt{\mu + \frac{1}{\mu}}, 0\right)$  и  $\left(-\sqrt{\mu + \frac{1}{\mu}}\right)$  имеет тип “седла.” Данные точки при изменении  $\mu$  не сливаются ни друг с другом, ни с  $(0, 0)$ , так как  $\mu + \frac{1}{\mu} \geq 2$ . Характер устойчивости не меняется ни при каком  $\mu$ , то есть точки  $\left(\sqrt{\mu + \frac{1}{\mu}}, 0\right)$  и  $\left(-\sqrt{\mu + \frac{1}{\mu}}\right)$  не порождают бифуркации.

## Список литературы

- [1] Khalil H. K. Nonlinear systems. Third edition. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2002, 766 pp.
- [2] MacCluer B.D., Bourdon P.S., Kriete T.L. Differential equations: techniques, theory, and applications. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2019, 890 pp.
- [3] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости: учебное пособие для вузов. — 4-е изд., стер. — СПб: “Лань”, 2023, 480 с.
- [4] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для вузов. — М.: “Высшая школа”, 1978, 287 с.
- [5] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 2. 24-е изд. Санкт-Петербург: “БХВ-Петербург”, 2008, 848 с.

Попов Антон Игоревич  
Попов Игорь Юрьевич

## **Дифференциальные уравнения**

**Учебное пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе



**Редакционно-издательский отдел  
Университета ИТМО  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А**

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лекции для студентов Университета ИТМО  
специальностей с повышенной подготовкой по математике

М. В. Бабушкин

5 октября 2021 г.

Ссылка на обновляемую версию:

<https://mvbabushkin.xyz/uploads/diffeqs.pdf>

## Содержание

Обозначения . . . . .	3
Сокращения . . . . .	4
<b>1 Введение. Уравнения 1-го порядка</b>	<b>5</b>
§1.1 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям . . . . .	5
§1.2 Уравнение первого порядка и его решение . . . . .	8
§1.3 Уравнение в нормальной форме . . . . .	11
§1.4 Уравнение в дифференциалах . . . . .	13
<b>2 Задача Коши. Уравнение с разделяющимися переменными</b>	<b>17</b>
§2.1 Задача Коши . . . . .	17
§2.2 Уравнение с разделяющимися переменными . . . . .	19
§2.3 Однородное уравнение . . . . .	24
<b>3 Некоторые типы уравнений, интегрируемых в квадратурах</b>	<b>27</b>
§3.1 Линейное уравнение первого порядка . . . . .	27
§3.2 Уравнения Бернулли и Риккати . . . . .	29
§3.3 Уравнение в полных дифференциалах . . . . .	30
<b>4 Уравнение, не разрешённое относительно производной</b>	<b>35</b>
§4.1 Уравнение, разрешимое относительно производной . . . . .	35
§4.2 Метод введения параметра . . . . .	36
§4.3 Задача Коши для уравнения, не разрешённого относительно производной . . . . .	41
<b>5 Уравнения высшего порядка</b>	<b>44</b>
§5.1 Уравнения высшего порядка: основные понятия . . . . .	44
§5.2 Методы понижения порядка . . . . .	45
<b>6 Системы уравнений</b>	<b>50</b>
§6.1 Нормальная система . . . . .	50

§6.2 Сведение уравнения к системе . . . . .	52
§6.3 Автономная система . . . . .	53
<b>7 Теорема существования</b> . . . . .	<b>58</b>
§7.1 Теорема существования . . . . .	58
<b>8 Теорема единственности</b> . . . . .	<b>66</b>
§8.1 Класс Липшица . . . . .	66
§8.2 Теорема единственности . . . . .	68
<b>9 Продолжение решений. Линейные системы</b> . . . . .	<b>74</b>
§9.1 Продолжение решений . . . . .	74
§9.2 Максимальное решение линейной системы . . . . .	78
§9.3 Линейные однородные системы . . . . .	79
§9.4 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами . . . . .	83
<b>10 Линейные неоднородные системы. Матричная экспонента</b> . . . . .	<b>88</b>
§10.1 Линейные неоднородные системы . . . . .	88
§10.2 Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами . . . . .	90
§10.3 Матричная экспонента . . . . .	91
<b>11 Линейные уравнения</b> . . . . .	<b>96</b>
§11.1 Линейные уравнения . . . . .	96
§11.2 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	100
<b>12 Теория устойчивости</b> . . . . .	<b>105</b>
§12.1 Понятие устойчивости . . . . .	105
§12.2 Устойчивость линейной системы . . . . .	108
<b>13 Классификация точек покоя. Теоремы Ляпунова</b> . . . . .	<b>111</b>
§13.1 Классификация точек покоя линейной однородной системы второго порядка . . . . .	111
§13.2 Теоремы Ляпунова . . . . .	115
<b>14 Линейные уравнения второго порядка</b> . . . . .	<b>120</b>
§14.1 Решение уравнений при помощи рядов . . . . .	120
§14.2 Корни решений . . . . .	123
<b>Список литературы</b>	<b>125</b>

## Обозначения

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  — множества натуральных, неотрицательных целых, целых, вещественных, комплексных чисел соответственно.
- $\mathbb{R}_r^n$  —  $n$ -мерное вещественное арифметическое пространство, общий элемент которого обозначается через  $r = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- $|r| = \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$  — норма вектора  $r = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .
- $\langle a, b \rangle$  — промежуток вещественной прямой, то есть любое из множеств  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b]$  или  $[a, b)$ , при этом допускаются значения  $a = -\infty$  и  $b = +\infty$ , если соответствующие скобки круглые.
- $[a : b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$ .
- $a \cdot b$  — скалярное произведение векторов  $a, b \in \mathbb{R}^n$ .
- $C(X)$  — пространство непрерывных функций  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $C^k(X)$  — пространство  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $C(X \rightarrow \mathbb{R}^n)$  — пространство непрерывных вектор-функций  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- $C^k(X \rightarrow \mathbb{R}^n)$  — пространство  $k$  раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- $C\langle a, b \rangle$  — то же самое, что и  $C(\langle a, b \rangle)$  (аналогично понимаются и другие подобные обозначения).
- $\text{dom } f$  — область определения функции  $f$ .
- $f'$  — матрица Якоби отображения  $f$ .
- $\text{Lip}(D)$  — множество функций, определённых на  $D$  и удовлетворяющих условию Липшица.
- $\text{Lip}_r(D)$  — множество функций, определённых на  $D$  и удовлетворяющих условию Липшица по переменной  $r$  (равномерно относительно других переменных).
- $\text{Lip}_{loc}(G)$ ,  $\text{Lip}_{r,loc}(G)$  — множества функций, определённых на  $G$  и удовлетворяющих условию Липшица локально по всем переменным, либо по переменной  $r$  (равномерно относительно других переменных).
- $M_{n,m}(X)$  — множество матриц размера  $n \times m$  с элементами из  $X$ .
- $M_n(X)$  — множество квадратных матриц размера  $n$  с элементами из  $X$ .
- $\text{sgn } x = x/|x|$ , если  $x \neq 0$ ,  $\text{sgn } 0 = 0$ .
- $\text{spec } A$  — спектр матрицы  $A$ .
- $\text{tr } A$  — след матрицы  $A$ .
- $\dot{x} = \frac{d}{dt}x$ .
- $\Leftrightarrow$  — равносильно.

Нумерация формул имеет вид  $(c.n)$ , где  $c$  — номер темы,  $n$  — номер формулы в соответствующей теме. Нумерация утверждений (примеров, замечаний, ...) имеет вид  $c.s.n$ , где  $c$  — номер темы,  $s$  — номер параграфа,  $n$  — номер утверждения (примера, замечания, ...). Следствия из утверждений нумеруются в виде  $c.s.n.m$ , где  $c.s.n$  — нумерация утверждения, из которого делается следствие, а  $m$  — номер следствия. Конец обсуждения примера отмечается символом  $\Delta$ . Конец доказательства отмечается символом  $\square$ .

## Сокращения

- ЗК — задача Коши;
- ЛОС — линейная однородная система;
- ЛОУ — линейное однородное уравнение;
- ЛС — линейная система;
- ЛУ — линейное уравнение;
- УПД — уравнение в полных дифференциалах;
- УРП — уравнение с разделёнными переменными;
- ФСР — фундаментальная система решений.

# Тема 1: Введение. Уравнения 1-го порядка

## Содержание

---

§1.1	Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям . . . . .	5
§1.2	Уравнение первого порядка и его решение . . . . .	8
§1.3	Уравнение в нормальной форме . . . . .	11
§1.4	Уравнение в дифференциалах . . . . .	13

---

### §1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Предположим, что мы изучаем какое-либо явление окружающего нас мира. Пусть в этом явлении нас интересует некоторая величина, которую мы обозначим через  $y$ . Это может быть температура какого-то тела, атмосферное давление, количество особей в биологической популяции или напряжение на участке электрической цепи. Во всех этих примерах величина  $y$  зависит от некоторых параметров, например, от момента времени или положения в пространстве. Другими словами, это не просто число, а функция.

Определить эту функцию непосредственно удаётся не всегда. Но часто бывает возможно установить связь между этой функцией, её производными и независимой переменной. Уравнение, выражающее такую связь, называется *дифференциальным уравнением*.

Рассмотрим простую модель, описывающую изменение численности биологической популяции. Обозначим через  $y(t)$  количество её особей в момент времени  $t$ . Предположим, проведённый эксперимент показал, что прирост числа особей пропорционален их количеству в данный момент, то есть при малом изменении времени  $\Delta t$

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx ky(t)\Delta t.$$

Разделив обе части на  $\Delta t$ , получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx ky.$$

Пусть экспериментальные данные указывают ещё на то, что данное равенство тем точнее, чем меньше шаг  $\Delta t$ . Тогда естественно предположить, что при устремлении  $\Delta t$  к нулю получится уравнение, наиболее точно описывающее искомый закон  $y(t)$ . Переходя к пределу, находим

$$y' = ky.$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение. Функция, описывающая численность популяции, которую мы ищем основываясь на исходных предположениях о приросте числа особей, должна удовлетворять этому уравнению.

Что означают слова «функция удовлетворяет уравнению»? Если взять, например, функцию  $\varphi(t) = kt$  и подставить её в полученное уравнение вместо  $y$ , то придём к равенству  $k = k^2t$ , которое верно при  $t = 1/k$ , и только при таком значении  $t$ . Однако, в рассматриваемом примере, конечно, нас интересует закон, справедливый при *любых* значениях  $t$ . Другими словами, искомая функция должна при подстановке обращать уравнение в *тождество*.

Легко убедиться, что при подстановке функции  $\varphi(t) = e^{kt}$  вместо  $y$  получается тождество (верное при  $t \in \mathbb{R}$ ), то есть  $\varphi$  является его решением. Но такая функция не единственная: всевозможные решения даются формулой

$$y = Ce^{kt},$$

где  $C$  — произвольная постоянная (рис. 1.1). Для того, чтобы её вычислить, нужно иметь некоторую дополнительную информацию.

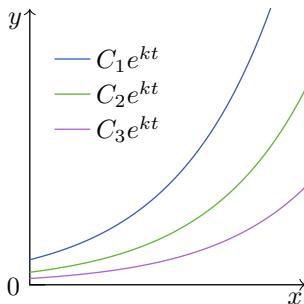


Рис. 1.1. Графики некоторых решений уравнения  $y' = ky$

Рассмотрим более конкретный пример.

**Пример 1.1.1.** Пусть масса дрожжей, помещённых в раствор сахар, в начальный момент времени была 25 грамм. Через полчаса их масса стала 42 грамма. В какой момент времени масса дрожжей будет в два раза больше изначальной?

*Решение.* Для получения ответа на данный вопрос воспользуемся только что построенной моделью. А именно, будем предполагать, что масса дрожжей  $m(t)$  удовлетворяет уравнению

$$m' = km,$$

а значит,  $m = Ce^{kt}$ . Поскольку  $m(0) = 25$ , то  $C = m(0) = 25$ , следовательно,

$$m(t) = 25e^{kt}.$$

Найдём ещё коэффициент  $k$ . Из условия  $m(30) = 42$  получаем

$$k = \frac{\ln(42/25)}{30} \approx 0,0173.$$

Таким образом, масса дрожжей в момент времени  $t$  равна

$$m(t) = 25e^{0,0173t}.$$

Требуется найти такое значение  $t_2$ , что  $m(t_2) = 2 \cdot 25 = 50$ . Имеем  $50 = 25 \exp(0,0173t_2)$ , отсюда

$$t_2 = \frac{\ln 2}{0,0173} \approx 40,$$

то есть примерно через 40 минут следует ожидать удвоение массы дрожжей.  $\triangle$

Конечно, полученная зависимость имеет ограниченную область применимости. В реальной жизни масса дрожжей не может неограниченно возрастать, но полученные значения  $m(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Дифференциальное уравнение было решено верно, а причина неполного соответствия найденной зависимости и настоящей в том, что само исходное уравнение описывает действительность лишь приближённо. Многие факторы не были учтены при его выводе. Поэтому пользоваться найденной функцией можно лишь до тех пор, пока влияние этих факторов незначительно.

Многие законы физики формулируются в виде дифференциальных уравнений. Например, второй закон Ньютона

$$F = ma,$$

связывающий ускорение тела  $a$ , его массу  $m$  и приложенные силы  $F$ , есть ни что иное, как дифференциальное уравнение второго порядка, поскольку ускорение — это вторая производная от перемещения тела.

**Пример 1.1.2.** Рассмотрим пружину с коэффициентом упругости  $k$ , один конец которой закреплён, а к другому подвешен груз массой  $m$  (рис. 1.2). Пружину оттягивают на небольшое расстояние и отпускают. Найти закон движения груза.

*Решение.* Направим ось  $Ox$  вертикально вниз, а за начало отсчёта примем положение равновесия груза. В любой момент времени на груз действует сила тяжести  $mg$ , а также сила упругости пружины  $-k\Delta x$ , по закону Гука пропорциональная величине растяжения  $\Delta x = x - x_0$ , где  $x_0$  — координата свободного конца пружины в нерастянутом положении.

Применяя второй закон Ньютона, находим уравнение движения груза

$$mx'' = -k(x - x_0) + mg.$$

Если груз поконится в положении равновесия, то

$$0 = -k(0 - x_0) + mg,$$

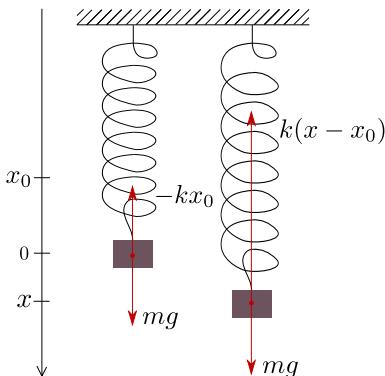


Рис. 1.2. Колебания пружины

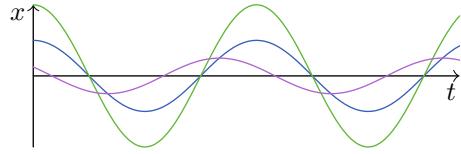


Рис. 1.3. Графики некоторых решений уравнения  $mx'' = -kx$ .

поэтому  $kx_0 = -mg$ . Исключая  $mg$  из уравнения движения, находим

$$mx'' = -kx.$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что функции вида

$$x(t) = C_1 \cos \left( t \sqrt{k/m} + C_2 \right).$$

подходят в качестве решений.  $\triangle$

В отличие от предыдущего примера, здесь имеется две произвольных постоянных. Причина этого в том, что полученное уравнение движения содержит вторую производную. Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются однозначно, если известны *начальные условия*, то есть положение груза и скорость в момент, когда его отпустили.

Дифференциальные уравнения возникают во многих областях знания, где приходится изучать эволюцию какого-либо процесса. Данный курс посвящён изучению уравнений, в которых неизвестная функция зависит только от одной вещественной переменной, то есть *обыкновенных дифференциальных уравнений*.

## §1.2. Уравнение первого порядка и его решение

**Определение.** *Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка* называют уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.1)$$

**Определение.** Функция  $\varphi$  — *решение уравнения* (1.1), если

- $\varphi \in C^1(a, b)$ ;
- $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$  на  $(a, b)$ .

Другими словами, решением уравнения (1.1) называют гладкую функцию  $\varphi$ , определённую на интервале  $(a, b)$ , подстановка которой вместо  $y$  обращает уравнение в тождество на  $(a, b)$ .

**Замечание.** В указанном определении вместо чисел  $a$  и  $b$  могут участвовать символы  $\pm\infty$ .

**Замечание.** Знак тождества « $\equiv$ » используют вместо знака равенства « $=$ » когда хотят подчеркнуть, что равенство выполняется не в отдельных точках, а *во всех* точках некоторого множества.

**Замечание.** Решения также рассматривают на отрезках и полуинтервалах. В этом случае под производной в крайних точках, включённых в промежуток, необходимо понимать одностороннюю производную.

**Замечание.** В уравнении (1.1) символы  $x$ ,  $y$  и  $y'$  — три различные *независимые* переменные. Буква  $y$  никак не связана с буквой  $x$ , а символ  $y'$  не обозначает производную до тех пор, пока не произведена подстановка конкретной функции. Подстановка функции  $\varphi$  в уравнение означает, что нужно заменить символ  $y$  на значение  $\varphi(x)$ , а символ  $y'$  на значение производной  $\varphi'(x)$ .

Сейчас мы использовали букву  $\varphi$  для обозначения функции. Однако, как правило, для решения уравнения мы не будем вводить отдельного обозначения, а будем использовать тот же символ, который участвует в уравнении. То есть буквой  $y$  будет обозначаться как независимая переменная (или координата), так и функция (конкретный смысл обычно ясен из контекста).

**Определение.** *Интегральная кривая* уравнения (1.1) — график его решения.

**Определение.** *Общим решением* уравнения (1.1) называют множество всех его решений.

Если желают подчеркнуть, что речь идёт о каком-то одном конкретном решении, то говорят о *частном решении* уравнения. Во многих случаях решение не выражается в явном виде, а задаётся неявно из некоторого соотношения, которое иногда называют *частным интегралом*.

**Определение.** *Общим интегралом* уравнения (1.1) будем называть соотношение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

которое неявно задаёт решения при некоторых значениях параметра  $C$ .

**Замечание.** Общий интеграл не всегда описывает *общее решение* уравнения<sup>1</sup>. Множество всех решений может быть шире, чем множество решений, определяемых общим интегралом.

<sup>1</sup>Существуют и другие определения понятий «общее решение» и «общий интеграл». В нашем курсе мы будем придерживаться определений, данных в этом параграфе.

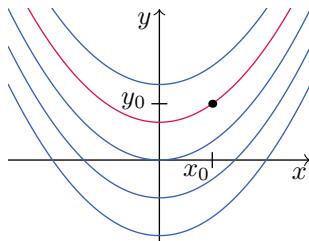
**Пример 1.2.1.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = x.$$

Ясно, что его решением будет любая первообразная правой части<sup>1</sup>:

$$y = \int x \, dx + C = \frac{x^2}{2} + C.$$

Таким образом, мы имеем целое семейство решений (рис. 1.4).



**Рис. 1.4.** Семейство решений уравнения  $y' = x$  и частное решение, удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$

Формально, *общее решение* — это множество

$$\{y: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid y(x) = x^2/2 + C, a < b, C \in \mathbb{R}\}.$$

Но обычно мы будем записывать общее решение короче:

$$y = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функции

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2, \quad y_3(x) = \frac{x^2}{2} - 5$$

представляют различные *частные решения*. Соотношение  $x^2 - 2y + C = 0$  даёт пример *общего интеграла*.  $\triangle$

**Пример 1.2.2.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

и функцию  $\varphi(x) = 1/x$ , заданную на множестве  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Несмотря на тождество  $\varphi'(x) \equiv -1/x^2$  на  $D$ , функция  $\varphi$  не является решением данного дифференциального уравнения, так как решение по определению должно быть задано на промежутке. Решениями будут её сужения, например,  $\varphi|_{(-\infty, 0)}, \varphi|_{(0, +\infty)}$ .  $\triangle$

<sup>1</sup>Под символом  $\int f(x) \, dx$  или  $\int f$  мы всегда будем понимать какую-нибудь одну первообразную, не важно какую, а постоянную интегрирования приписывать отдельно в качестве слагаемого.

### §1.3. Уравнение в нормальной форме

**Определение.** Уравнение

$$y' = f(x, y), \quad (1.2)$$

разрешённое относительно производной, называют *нормальным уравнением* (уравнением в нормальной форме).

Интегральные кривые уравнения (1.2) могут проходить лишь в той части координатной плоскости, где определена его правая часть — функция  $f$ .

**Определение.** *Областью задания* уравнения в нормальной форме (1.2) будем называть область определения  $\text{dom } f$  его правой части.

**Пример 1.3.1.** Уравнение  $y' = -1/x^2$  является уравнением типа (1.2). Его правая часть, функция  $f(x, y) = -1/x^2$ , определена на множестве

$$\text{dom } f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x = 0\}.$$

△

**Замечание.** Область задания уравнения (1.2) — подмножество плоскости, даже если правая часть фактически не зависит от одной из переменных, как в рассмотренном примере.

Установим геометрический смысл уравнения (1.2) и его решения. Допустим, что функция  $y = \varphi(x)$  является его решением, то есть при любом  $x$  из некоторого интервала  $(a, b)$  справедливо равенство

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Зафиксируем некоторую точку на интегральной кривой с координатами  $(x_0, y_0)$ , где  $y_0 = \varphi(x_0)$ . Тогда

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Таким образом, значение функции  $f$  в точке  $(x_0, y_0)$  определяет тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в этой точке (рис. 1.5).

Если каждой точке  $(x, y)$  области задания уравнения (1.2) поставить в соответствие вектор, направленный под углом  $\text{arctg } f(x, y)$ , то получится так называемое *поле направлений* уравнения (1.2). Таким образом, задать уравнение (1.2) — всё равно, что задать поле направлений.

Задачу нахождения его решений тогда можно сформулировать так: найти все гладкие кривые, проходящие в области задания уравнения, которые в каждой своей точке касаются вектора поля направлений (рис. 1.6).

Векторное поле даёт представление о том, как примерно ведут себя интегральные кривые. Оно может быть использовано для предварительного качественного исследования дифференциального уравнения, построения эскизов интегральных кривых и для контроля найденных решений.

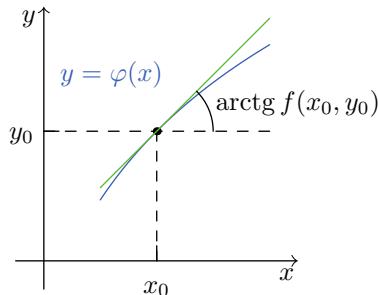


Рис. 1.5. Правая часть уравнения определяет угловой коэффициент касательной

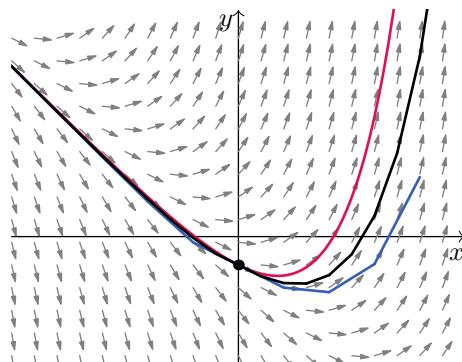


Рис. 1.6. Поле направлений уравнения  $y' = y + x$ ; интегральная кривая, проходящая через точку  $x_0 = 0, y_0 = -1/2$  (красным цветом); ломаные Эйлера с шагом  $h = 0,8$  (синим цветом) и  $h = 0,4$  (чёрным цветом), проходящие через эту же точку

Поясним подробнее, как построить приближение к интегральной кривой. Взяв некоторую точку  $(x_0, y_0)$  в качестве начальной, будем двигаться вправо от неё по направлению поля до точки с абсциссой  $x_1 = x_0 + h$ , ординату которой обозначим через  $y_1$ . От точки  $(x_1, y_1)$  продолжим движение вправо до точки  $(x_2, y_2)$ , где  $x_2 = x_1 + h$ , но теперь по направлению поля в  $(x_1, y_1)$ . Продолжая этот процесс дальше, получаем **ломаную Эйлера**. Аналогично она строится и влево от точки  $(x_0, y_0)$ .

Ломаная Эйлера даёт приближение интегральной кривой уравнения, проходящей через точку  $(x_0, y_0)$ . Приближение тем точнее, чем меньше берётся шаг  $h$  (рис. 1.6). Исходя из условия

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = f(x_k, y_k),$$

получаем формулы для координат вершин ломаной:

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h.$$

## §1.4. Уравнение в дифференциалах

Если представить производную как отношение дифференциалов, то уравнение  $y' = f(x, y)$  запишется в виде

$$f(x, y)dx - dy = 0.$$

Можно придать этой записи более общую форму.

**Определение.** Уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (1.3)$$

называют *уравнением в дифференциалах*.

**Определение.** Функция  $\varphi$  — *решение уравнения* (1.3), если

- $\varphi \in C^1(a, b)$ ;
- $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$  на  $(a, b)$ .

**Замечание.** Выражение во втором пункте определения получается, если в уравнении (1.3) сделать подстановку  $y = \varphi(x)$ , а затем разделить полученное уравнение на  $dx$ .

**Определение.** *Область задания* уравнения в дифференциалах (1.3) — множество  $\text{dom } P \cap \text{dom } Q$ .

Переменные  $x$  и  $y$  входят в уравнение (1.3) равноправно, поэтому его решением называется не только функция вида  $y = \varphi(x)$ , но и функция вида  $x = \psi(y)$ . Соответствующее определение аналогично приведённому.

**Пример 1.4.1.** Рассмотрим уравнение

$$x dx + y dy = 0. \quad (1.4)$$

*Область его задания* — вся плоскость  $\mathbb{R}^2$ .

Убедимся, что функция  $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  при любом  $R > 0$  является *решением* на интервале  $(-R, R)$ . Действительно,  $y \in C^1(-R, R)$ . Её дифференциал

$$dy = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx.$$

При подстановке в исходное уравнение получаем равенство

$$x dx + \sqrt{R^2 - x^2} \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 0,$$

верное для всех  $x \in (-R, R)$ .

Аналогично устанавливается, что функция  $y(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ , а также функции  $x(y) = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$  — решения на интервале  $(-R, R)$ .  $\triangle$

Графики решений вида  $y = \varphi(x)$  и  $x = \psi(y)$  могут быть частями одной гладкой кривой. В рассмотренном примере графики всех упомянутых функций при одинаковом значении  $R$  — это части окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат (рис. 1.7). Такую кривую естественно считать интегральной кривой, а её параметризацию — решением.

**Определение.** Вектор-функция  $r(t) = (\varphi(t), \psi(t))$  называется *параметрическим решением уравнения* (1.3), если

- $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta)$  и  $r'(t) \neq 0$  для всех  $t \in (\alpha, \beta)$ ;
- $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$  на  $(\alpha, \beta)$ .

Например, вектор-функция  $r(t) = (R \cos t, R \sin t)$  — параметрическое решение уравнения (1.4) на  $\mathbb{R}$ .

**Определение.** *Интегральной кривой* уравнения (1.3) называют годограф её параметрического решения.

**Замечание.** Если  $y = \varphi(x)$  — решение уравнения (1.3), то  $r(t) = (t, \varphi(t))$  — параметрическое решение того же уравнения, годограф которого совпадает с графиком функции  $\varphi$ . Следовательно, график решения (обычного, а не параметрического) уравнения (1.3) — это интегральная кривая.

Изучать уравнение (1.3) — всё равно что изучать пару уравнений

$$\begin{aligned} y'_x &= -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, & \text{если } Q(x, y) \neq 0, \\ x'_y &= -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, & \text{если } P(x, y) \neq 0. \end{aligned}$$

Если же в какой-то точке одновременно и функция  $P$ , и функция  $Q$  обращаются в ноль, то в этой точке интегральные кривые ведут себя «по-особенному», в том числе могут и вовсе не проходить через неё.

**Определение.** Точка  $(x_0, y_0) \in G$  называется *особой точкой* уравнения (1.3), если  $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ .

Уравнение (1.4) имеет единственную особую точку в начале координат, через неё не проходит ни одна интегральная кривая (рис. 1.7).

Поясним геометрический смысл уравнения (1.3). Пусть  $r(t) = (x(t), y(t))$  — его параметрическое решение на  $(\alpha, \beta)$ . Тогда при любом  $t \in (\alpha, \beta)$

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0. \quad (1.5)$$

Рассмотрим векторное поле  $F = (P, Q)$ . Тогда равенство (1.5) равносильно

$$F(r(t)) \cdot r'(t) = 0.$$

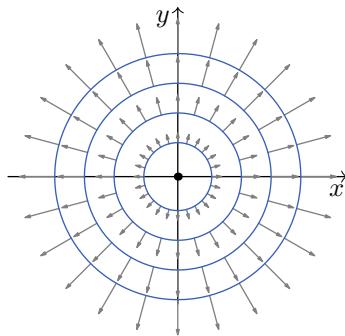


Рис. 1.7. Интегральные кривые и особая точка уравнения  $x dx + y dy = 0$ .

Вектор  $r'(t)$  касается интегральной кривой в точке  $(x(t), y(t))$ . Значит, любая интегральная кривая уравнения (1.3) в каждой своей точке  $(x, y)$  перпендикулярна вектору  $F(x, y)$  (рис. 1.7).

Таким образом, задать уравнение (1.3) — всё равно, что задать поле перпендикуляров.

**Определение.** Два дифференциальных уравнения **эквивалентны** (или *равносильны*), если они имеют одинаковую область задания и одинаковое множество интегральных кривых.

**Утверждение 1.4.1.** *Уравнение*

$$y' = f(x, y) \quad (1.6)$$

*эквивалентно уравнению*

$$dy = f(x, y) dx. \quad (1.7)$$

**Доказательство.** Данные уравнения имеют одинаковую область задания, которая совпадает с областью определения функции  $f$ .

Пусть  $\gamma$  — интегральная кривая уравнения (1.6). Тогда, по определению,  $\gamma$  — график некоторого решения  $\varphi \in C^1(a, b)$  уравнения (1.6). Следовательно,

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Это же означает, что  $\varphi$  — решение уравнения (1.7). Поэтому  $\gamma$  — интегральная кривая уравнения (1.7).

Обратно, пусть  $\gamma$  — интегральная кривая уравнения (1.7). Тогда, по определению, кривая  $\gamma$  допускает параметризацию  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$ . При этом на  $(\alpha, \beta)$

$$\psi'(t) \equiv f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t).$$

Заметим, что  $\varphi'(t) \neq 0$  для любого  $t \in (\alpha, \beta)$ . Действительно, если  $\varphi'(t_0) = 0$  для некоторого  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ , то из приведённого тождества следует, что  $\psi'(t_0) = 0$ .

Но по определению параметрического решения производные  $\varphi'$  и  $\psi'$  не обращаются в ноль одновременно.

Из непрерывности функции  $\varphi'$  следует её знакопостоянность. Поэтому функция  $\varphi$  строго монотонна, а значит, имеет обратную  $t = \varphi^{-1}(x)$ . График функции  $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$  совпадает с кривой  $\gamma$ . По теореме о производной функции, заданной параметрически, имеем

$$\frac{d}{dx}\psi(\varphi^{-1}(x)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t), \psi(t)) = f(x, \psi(\varphi^{-1}(x))).$$

Следовательно,  $\psi \circ \varphi^{-1}$  — решение уравнения (1.6), а  $\gamma$  — соответствующая интегральная кривая уравнения (1.6).  $\square$

# Тема 2: Задача Коши. Уравнение с разделяющимися переменными

## Содержание

---

§2.1	Задача Коши . . . . .	17
§2.2	Уравнение с разделяющимися переменными . . . . .	19
2.2.1	Уравнение с разделёнными переменными . . . . .	19
2.2.2	Уравнение с разделяющимися переменными . . . . .	21
§2.3	Однородное уравнение . . . . .	24

---

### §2.1. Задача Коши

Как правило, дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Для получения какого-нибудь конкретного решения, кроме самого уравнения, необходимы дополнительные условия.

**Определение.** *Задачей Коши* или *начальной задачей* для нормального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (2.1)$$

называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего *начальному условию*

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.2)$$

Пара чисел  $(x_0, y_0)$  при этом называется *начальными данными*.

С геометрической точки зрения это задача отыскания среди всех интегральных кривых той, которая проходит через точку с координатами  $(x_0, y_0)$ .

**Пример 2.1.1.** Рассмотрим задачу Коши  $y' = x$ ,  $y(\sqrt{2}) = 2$ . Общее решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Положим здесь  $y = 2$ ,  $x = \sqrt{2}$ . Тогда  $C = 1$ . Подставляя найденное значение  $C$  в общее решение, получаем частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$y = \frac{x^2}{2} + 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \triangle$$

Относительно задачи Коши естественно возникают вопросы:

- Существует ли решение поставленной задачи?

- Насколько велико множество всех её решений?

Приведём простые достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Следующие теоремы являются частными случаями более общих утверждений (теорем Пеано 7.1.1 и Пикара 8.2.1), которые будут доказаны позднее.

**Теорема 2.1.1 (существование решения ЗК для нормального уравнения).** Пусть  $G$  — область<sup>1</sup> из  $\mathbb{R}^2$ ,  $f \in C(G)$ ,  $(x_0, y_0) \in G$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $x_0$  существует решение задачи (2.1), (2.2).

**Теорема 2.1.2 (единственность решения ЗК для нормального уравнения).** Пусть  $G$  — область из  $\mathbb{R}_{x,y}^2$ ,  $f, f'_y \in C(G)$ ,  $(x_0, y_0) \in G$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — решения задачи (2.1), (2.2) на  $(a, b)$ . Тогда  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  на  $(a, b)$ .

Таким образом, в условиях теоремы 2.1.2 совпадение двух решений в одной точке означает их совпадение на всём интервале, где они одновременно заданы, если их графики не покидают область  $G$ . Другими словами, вся область  $G$  покрыта не пересекающимися интегральными кривыми (рис. 2.1).

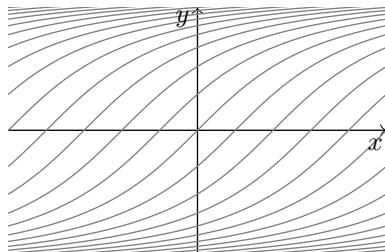


Рис. 2.1. Интегральные кривые уравнения  $y' = \cos^2 y$  в области  $G = \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$

Через точку области  $G$ , где условие теоремы 2.1.2 нарушено (например, производная  $f'_y$  не существует), могут проходить интегральные кривые, отличающиеся в любой сколь угодно малой окрестности этой точки.

**Определение.** Решение  $\varphi$  на  $(a, b)$  уравнения (2.1) называется *особым*, если для любой точки  $x_0 \in (a, b)$  найдётся решение  $\psi$  того же уравнения, такое что

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0),$$

при этом  $\varphi \neq \psi$  в любой сколь угодно малой окрестности точки  $x_0$ .

Более кратко это выражают словами: интегральная кривая уравнения (2.1) является особой, если в каждой её точке нарушается единственность решения задачи Коши.

<sup>1</sup>Напомним, что областью называют открытое связное множество.

**Пример 2.1.2.** Рассмотрим уравнение

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Его правая часть непрерывна в  $\mathbb{R}^2$ . Тогда по теореме 2.1.1 решение существует для любых начальных данных  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Поскольку

$$(3\sqrt[3]{y^2})'_y = \frac{2}{\sqrt[3]{y}},$$

то теорема 2.1.2 гарантирует, что в полуплоскости, где  $y > 0$ , через каждую точку проходит лишь одна интегральная кривая. То же верно и для полуплоскости, где  $y < 0$ . Эти решения задаются формулой

$$y = (x - C)^3. \quad (2.3)$$

Для любого числа  $x_0 \in \mathbb{R}$  в точке  $(x_0, 0)$  единственность нарушается, поскольку помимо графика решения  $y_1(x) = (x - x_0)^3$ , через эту точку проходит график решения  $y_2(x) = 0$ , не совпадающий с графиком  $y_1$  ни в какой окрестности точки  $x_0$ . Таким образом,  $y_2$  — особое решение.

Общее решение данного уравнения имеет сложную структуру. Оно является не просто объединением семейства (2.3) и функции  $y_2(x) = 0$ . Общее решение содержит ещё составные решения, то есть функции, графики которых состоят из частей графиков функций (2.3) и особого решения (рис. 2.2).  $\triangle$

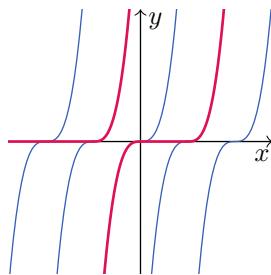


Рис. 2.2. Составные решения

## §2.2. Уравнение с разделяющимися переменными

### 2.2.1. Уравнение с разделёнными переменными

**Определение.** Уравнение в дифференциалах вида

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0 \quad (2.4)$$

называют *уравнением с разделёнными переменными*.

Такое название мотивировано тем, что каждое его слагаемое зависит только от одной переменной.

**Теорема 2.2.1 (общее решение УРП).** Пусть  $P \in C(a, b)$ ,  $Q \in C(c, d)$ ,  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ . Тогда функция  $y = \varphi(x)$  — решение уравнения (2.4) на  $(\alpha, \beta)$ , если и только если  $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$  и при некотором  $C \in \mathbb{R}$  функция  $\varphi$  неявно задана уравнением

$$\int P(x) dx + \int Q(y) dy = C. \quad (2.5)$$

**Доказательство.** Необходимость. Если  $\varphi$  — решение уравнения (2.4) на  $(\alpha, \beta)$ , то  $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$  по определению.

Покажем, что функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению (2.5) на  $(\alpha, \beta)$  при некотором  $C \in \mathbb{R}$ . Возьмём произвольно  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  и положим  $y_0 = \varphi(x_0)$ . Тогда уравнение (2.5) запишется в виде

$$\int_{x_0}^x P(t) dt + C_1 + \int_{y_0}^y Q(t) dt + C_2 = C.$$

Таким образом, требуется установить, что при некотором  $A \in \mathbb{R}$  и всех  $x \in (\alpha, \beta)$

$$\int_{x_0}^x P(t) dt + \int_{y_0}^{\varphi(x)} Q(t) dt = A.$$

Производя замену  $t = \varphi(\tau)$  во втором слагаемом, находим

$$\int_{x_0}^x P(t) dt + \int_{x_0}^x Q(\varphi(\tau))\varphi'(\tau) d\tau = \int_{x_0}^x (P(\tau) + Q(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)) d\tau.$$

Выражение под интегралом равно нулю по определению решения  $\varphi$ . Значит,  $A = 0$ .

*Достаточность.* Продифференцируем по переменной  $x$  тождество на  $(\alpha, \beta)$

$$\int P(x) dx + \left[ \int Q(y) dy \right]_{y=\varphi(x)} \equiv C.$$

Имеем

$$P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Следовательно,  $\varphi$  — решение уравнения (2.4) на  $(\alpha, \beta)$  по определению.  $\square$

Аналогичную теорему можно сформулировать и для функций вида  $x = \psi(y)$ . Таким образом, любое решение уравнения (2.4) задаётся уравнением вида (2.5). Чтобы сделать описание общего решения более завершённым, нужно указать, при каких значениях параметра  $C$  уравнение (2.5) определяет непрерывно дифференцируемые функции и какова область определения этих функций. Однако, эти действия могут потребовать существенных усилий, поэтому часто довольствуются лишь соотношением (2.5).

**Пример 2.2.1.** Найти общий интеграл уравнения  $x dx + y dy = 0$ .

*Решение.* Интегрируя уравнение, находим

$$\int x dx + \int y dy = C.$$

Отсюда

$$x^2 + y^2 = 2C.$$

Ясно, что это уравнение определяет непрерывно дифференцируемые функции лишь при  $C > 0$ . Поэтому общее решение описывается соотношением

$$x^2 + y^2 = A, \quad A > 0.$$

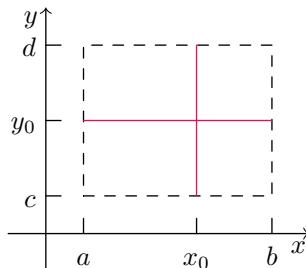
△

## 2.2.2. Уравнение с разделяющимися переменными

**Определение.** Уравнение вида

$$p_1(x)q_1(y) dx + p_2(x)q_2(y) dy = 0 \quad (2.6)$$

называют *уравнением с разделяющимися переменными*.



**Рис. 2.3.** Области поиска интегральных кривых, если  $q_1(y_0) = 0, p_2(x_0) = 0$

При делении на  $q_1(y)p_2(x)$  получается уравнение с разделёнными переменными. При этом необходимо убедиться, что не происходит деления на ноль.

Пусть  $p_1, p_2 \in C(a, b)$ ,  $q_1, q_2 \in C(c, d)$ . Если  $q_1(y_0) = 0$ , то  $y \equiv y_0, x \in (a, b)$  — решение исходного уравнения. Для поиска других интегральных кривых область  $(a, b) \times (c, d)$  задания уравнения требуется разбить на две подобласти, общей границей которых является прямая  $y = y_0$ .

Аналогично, если  $p_2(x_0) = 0$ , то  $x \equiv x_0, y \in (c, d)$  — решение исходного уравнения. Для поиска других интегральных кривых область задания разбивается на две подобласти с общей границей  $x = x_0$ .

Разбив всю область поиска интегральных кривых на необходимое количество частей (рис. 2.3), нужно рассмотреть исходное уравнение на каждой части отдельно. На каждой такой подобласти его можно разделить на  $q_1(y)p_2(x)$ , не опасаясь получить ноль в знаменателе.

Изучив поведение найденных интегральных кривых вблизи границ подобластей, делается вывод о наличии особых и составных решений уравнения на исходной области его задания.

**Пример 2.2.2.** Решить уравнение  $x dy - 2y dx = 0$ .

*Решение.* Область задания уравнения — вся плоскость. Переменные разделяются, если поделить уравнение на  $xy$ . Заметим, что прямые  $y = 0$  и  $x = 0$  являются интегральными кривыми. Они разбивают область задания на четыре подобласти, соответствующие четвертям плоскости.

Обозначим  $k$ -ю четверть через  $D_k$  (точки на координатных осях не включаются). На области  $D_1$  исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{dy}{y} = \frac{2 dx}{x}.$$

По теореме 2.2.1 его общее решение задаётся соотношением

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + C$$

или

$$|y| = Ax^2, \quad A > 0.$$

В первой четверти  $y > 0$ ,  $x > 0$ . Поэтому все решения в области  $D_1$  имеют вид

$$y = Ax^2, \quad A > 0, \quad x \in (0, +\infty).$$

Рассуждения в остальных четвертях аналогичны. Получаем следующие интегральные кривые:

$$D_2 : \quad y = Ax^2, \quad A > 0, \quad x \in (-\infty, 0)$$

$$D_3 : \quad y = Ax^2, \quad A < 0, \quad x \in (-\infty, 0)$$

$$D_4 : \quad y = Ax^2, \quad A < 0, \quad x \in (0, +\infty).$$

Заметим, что для любого из полученных решений имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} y'(x) = 0. \quad (2.7)$$

Вернёмся на область задания исходного уравнения. Из соотношений (2.7) следует, что интегральные кривые из различных областей  $D_k$  в начале координат можно гладко сплить друг с другом, а также с прямой  $y = 0$ . Тем самым, кроме найденных решений, имеется множество составных вида

$$y = \begin{cases} Ax^2, & \text{если } x < 0, \\ Bx^2, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

где коэффициенты  $A, B$  произвольны (рис. 2.4). Общее решение включает эти кусочно-заданные функции, а также функцию  $x(y) = 0$  при  $y \in \mathbb{R}$ .  $\triangle$

**Пример 2.2.3.** Решить уравнение  $x dy - y dx = 0$ .

*Решение.* Рассуждая так же, как в предыдущем примере, в каждой из четвертей получаем решения вида

$$y = Ax.$$

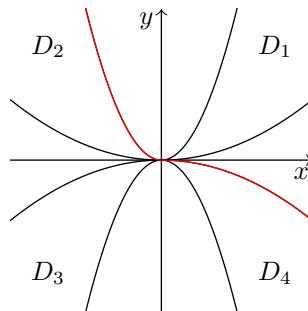


Рис. 2.4. Составное решение уравнения  $x dy - 2y dx = 0$

Поскольку для любого из найденных решений имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} y'(x) = A,$$

то в начале координат можно объединить лишь те интегральные кривые, которые являются частями одной и той же прямой. Таким образом, общее решение включает функции

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R},$$

и функцию  $x(y) = 0, y \in \mathbb{R}$ . Составных (кусочно-заданных) решений нет.  $\triangle$

К уравнению с разделяющимися переменными приводится уравнение вида

$$y' = f(x)g(y).$$

В общем случае непрерывности правой части уравнения, разрешённого относительно производной, недостаточно для единственности решения задачи Коши. Однако, для данного уравнения непрерывность  $f$  и  $g$  гарантирует единственность, если только  $g(y) \neq 0$ . Это вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 2.2.2 (теорема существования и единственности для УРП).** Пусть  $P \in C(a, b)$ ,  $Q \in C(c, d)$ ,  $(x_0, y_0)$  — не особая точка уравнения (2.4). Тогда в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  существует единственная интегральная кривая уравнения (2.4), проходящая через точку  $(x_0, y_0)$ . Эта кривая имеет уравнение

$$\int_{x_0}^x P(\tau) d\tau + \int_{y_0}^y Q(\tau) d\tau = 0.$$

**Упражнение 2.2.1.** Докажите теорему 2.2.2. Указание: воспользуйтесь теоремой о неявной функции.

### §2.3. Однородное уравнение

**Определение.** Функция  $F(x, y)$  называется *однородной функцией* степени  $\alpha$ , если при всех допустимых  $t$ ,  $x$  и  $y$  верно равенство

$$F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y).$$

Примеры однородных функций:  $x + y + z$  (первой степени),  $x^2 + 3xy + y^2$  (второй степени),  $(y/x) \cos(x/y)$  (нулевой степени),  $\frac{\sqrt{x+y}}{x^2+y^2}$  (степени  $-3/2$ ).

**Определение.** Пусть  $P$  и  $Q$  — однородные функции одинаковой степени. Тогда уравнение вида

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (2.8)$$

называется *однородным уравнением*.

Заметим, что к нему приводится уравнение

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

и поэтому оно тоже называется однородным.

Введение новой искомой функции  $z = y/x$  сводит уравнение (2.8) к уравнению с разделяющимися переменными.

**Пример 2.3.1.** Найдём решения уравнения

$$(x^2 - xy) dy + y^2 dx = 0.$$

Данное уравнение — однородное, поскольку коэффициенты при  $dx$  и  $dy$  суть однородные функции второй степени однородности. Будем рассматривать уравнение в полуплоскости, где  $x > 0$ . Воспользуемся подстановкой

$$y = xz(x),$$

тогда  $dy = x dz + z dx$ . Уравнение преобразуется к виду

$$x^3(1 - z) dz + x^2 z dx = 0.$$

Разделив обе части на  $x^3 \neq 0$  и перенося слагаемое с  $dx$  в правую часть, находим

$$(1 - z) dz = -\frac{z}{x} dx. \quad (2.9)$$

Прежде, чем делить на  $z$ , отметим, что  $z \equiv 0$  является решением данного уравнения. При  $z > 0$  имеем

$$\frac{1 - z}{z} dz = -\frac{dx}{x}.$$

Вычисляя интегралы от правой и левой части, получаем

$$\ln|z| - z = -\ln|x| + C_1. \quad (2.10)$$

Отсюда после потенцирования и раскрытия модулей находим

$$ze^{-z} = \frac{C}{x},$$

где  $C = e^{C_1} > 0$ .

В области  $z < 0$  модуль в левой части уравнения (2.10) раскроется с противоположным знаком. Таким образом, семейство интегральных кривых уравнения (2.9) задаётся формулой

$$ze^{-z} = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Возвращаясь к прежней переменной  $y = xz$ , находим

$$ye^{-y/x} = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Рассуждения в области  $x < 0$  остаются такими же, поменяется лишь знак при раскрытии модуля в правой части (2.10). При этом общий интеграл (2.11) не изменится.

До этого момента прямая  $x = 0$  исключалась из рассмотрения. Она может оказаться интегральной кривой исходного уравнения, и в данном случае это действительно так, в чём убеждаемся непосредственной подстановкой.

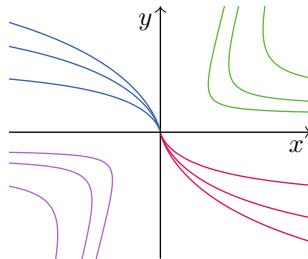


Рис. 2.5. Интегральные кривые уравнения  $(x^2 - xy) dy + y^2 dx = 0$ .

Более детальный анализ формулы (2.11) показывает, что интегральные кривые из второй и четвёртой четвертей касаются оси  $Oy$  в начале координат. Поэтому уравнение имеет ещё и составные решения: любая кривая из второй четверти может объединяться с любой кривой из четвёртой четверти.  $\triangle$

Отметим геометрическое свойство однородного уравнения. Допустим, что  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  — параметрическое решение (2.8) на  $(\alpha, \beta)$ . При растяжении плоскости в  $\lambda$  раз соответствующая интегральная кривая перейдёт в кривую

с параметризацией  $x = \lambda\varphi(t)$ ,  $y = \lambda\psi(t)$ . Подставляя эти функции в уравнение (2.8), получаем

$$P(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\varphi' + Q(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\psi' = 0.$$

Пользуясь однородностью функций  $P$  и  $Q$ , приходим к равенству

$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' = 0,$$

которое выполняется тождественно на  $(\alpha, \beta)$ . Это означает, что гомотетия относительно начала координат любую интегральную кривую однородного уравнения переводит в другую его интегральную кривую.

# Тема 3: Некоторые типы уравнений, интегрируемых в квадратурах

## Содержание

---

§3.1	Линейное уравнение первого порядка . . . . .	27
§3.2	Уравнения Бернулли и Риккати . . . . .	29
3.2.1	Уравнение Бернулли . . . . .	29
3.2.2	Уравнение Риккати . . . . .	30
§3.3	Уравнение в полных дифференциалах . . . . .	30
3.3.1	Интегрирующий множитель . . . . .	33

Если все решения дифференциального уравнения явно или неявно выражаются через элементарные функции с помощью конечного числа арифметических действий, суперпозиций и операций нахождения первообразных, то говорят, что *уравнение интегрируется в квадратурах*<sup>2</sup>. Следует отметить, что это довольно узкий класс уравнений.

### §3.1. Линейное уравнение первого порядка

**Определение.** Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x), \quad (3.1)$$

называется *линейным уравнением первого порядка*.

Название *линейное* мотивировано тем, что оно составлено из многочленов первой степени по отношению к символам  $y$  и  $y'$ .

**Определение.** Уравнение (3.1) называется *однородным*, если  $q \equiv 0$  на  $(a, b)$ , иначе — *неоднородным*.

**Лемма 3.1.1 (общее решение ЛОУ 1-го порядка).** Пусть  $p \in C(a, b)$ . Тогда общее решение уравнения

$$y' = p(x)y \quad (3.2)$$

имеет вид

$$y = Ce^{\int p}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in (a, b).$$

---

<sup>2</sup> «Квадратура» — в прежние времена синоним слова «интеграл».

**Доказательство.** По теореме существования 2.1.1 через каждую точку полосы  $(a, b) \times \mathbb{R}$  проходит интегральная кривая. По теореме единственности 2.1.2 через каждую точку этой полосы проходит ровно одна интегральная кривая. В частности, уравнение не имеет особых решений.

Заметим, что функция, тождественно равная нулю на  $(a, b)$ , является решением. В области, где  $y > 0$ , исходное уравнение равносильно

$$\frac{dy}{y} = p(x) dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln y = \int p(x) dx + C.$$

Отсюда

$$y = Ae^{\int p(x) dx}, \quad A > 0.$$

По теореме 2.2.1 полученное соотношение описывает все интегральные кривые в области, где  $y > 0$ .

Аналогичный результат получается при  $y < 0$ . Таким образом, все решения имеют требуемый вид.  $\square$

**Теорема 3.1.1 (общее решение ЛУ 1-го порядка).** Пусть  $p, q \in C(a, b)$ . Тогда общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$y = \left( C + \int qe^{-\int p} \right) e^{\int p}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in (a, b). \quad (3.3)$$

**Доказательство.** Подстановкой легко убеждаемся, что указанная функция при любом значении  $C$  является решением на  $(a, b)$ .

Проверим, что нет других решений. Предположим противное: пусть имеется решение  $\varphi$  на  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ , не определяемое формулой (3.3) ни при каком  $C$ . Пусть ещё  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $\varphi(x_0) = y_0$ . При

$$C = \left[ y_0 e^{-\int p(x) dx} - \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx \right]_{x=x_0}$$

функция (3.3) определена на  $(\alpha, \beta)$  и является решением задачи Коши для уравнения (3.1) с начальным условием  $y(x_0) = y_0$ . Тогда  $y \equiv \varphi$  на  $(\alpha, \beta)$  по теореме единственности 2.1.2, а это противоречит предположению о функции  $\varphi$ .  $\square$

Обычно формулу (3.3) не запоминают. На практике, чтобы её «вспомнить», можно воспользоваться **методом Лагранжа**, который ещё называют **методом вариации произвольной постоянной**. Он состоит в следующем. По лемме 3.1.1 решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = Ce^{\int p} \quad (3.4)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Это выражение подставляют в исходное уравнение (3.1), при этом считая  $C$  функцией от  $x$  («варьируют постоянную»). Получается уравнение относительно функции  $C$ :

$$C' = qe^{-\int p}.$$

Его решение совпадает с выражением в скобках в формуле (3.3). Поэтому общее решение исходного уравнения (3.1) получится, если найденную функцию  $C$  подставить вместо постоянной  $C$  в общем решении (3.4) однородного уравнения.

**Пример 3.1.1.** Решить уравнение  $y' = y + x$ .

*Решение.* Так как коэффициенты уравнения непрерывны на  $\mathbb{R}$ , то область задания уравнения — вся плоскость, а решения будут определены на  $\mathbb{R}$ . Воспользуемся методом Лагранжа.

Соответствующее однородное уравнение

$$y' = y$$

имеет решение  $y = Ce^x$ . Считая здесь  $C$  не числом, а функцией, подставим данное выражение в исходное уравнение. Имеем

$$(Ce^x)' = Ce^x + x.$$

Отсюда

$$C' = xe^{-x}.$$

Интегрируя, получаем  $C = -(x+1)e^{-x} + A$ . Тогда общее решение исходного уравнения

$$y = (-(x+1)e^{-x} + A)e^x = Ae^x - x - 1,$$

где  $A \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ . △

## §3.2. Уравнения Бернулли и Риккати

### 3.2.1. Уравнение Бернулли

**Определение.** Уравнением *Бернулли* называют уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha,$$

где  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

Разделив данное уравнение на  $y^\alpha$ , находим

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x).$$

Отсюда видно, что замена  $z = y^{1-\alpha}$  сводит уравнение к линейному.

**Упражнение 3.2.1.** Пусть  $p, q \in C(a, b)$ . Докажите, что при  $\alpha > 1$  уравнение Бернулли не имеет особых решений.

**Упражнение 3.2.2.** Пусть  $p, q \in C(a, b)$ ,  $q > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Докажите, что тогда решение  $y = 0$  уравнения Бернулли является особым.

**Пример 3.2.1.** Решить уравнение  $y' = -y + (1 + x)y^2$ .

*Решение.* Область задания уравнения — вся плоскость. Это уравнение Бернулли при  $\alpha = 2$ , следовательно, особых решений оно не имеет.

Функция  $y = 0$  — решение. Рассматривая уравнение при  $y \neq 0$ , сделаем замену  $z = 1/y$ . Получаем линейное уравнение

$$z' = z - 1 - x.$$

Его общее решение

$$z = Ce^x + x + 2.$$

Возвращаясь к прежней функции  $y$ , находим общий интеграл исходного уравнения:

$$y = \frac{1}{Ce^x + x + 2}. \quad \triangle$$

### 3.2.2. Уравнение Риккати

**Определение.** *Уравнением Риккати* называют уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

Другими словами, это уравнение, в котором правая часть является квадратичной функцией по отношению к  $y$ . Уравнение Риккати разрешимо в квадратурах лишь в исключительных случаях.

**Утверждение 3.2.1 (Лиувилль).** *Уравнение*

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

*интегрируется в квадратурах, если и только если  $\alpha/(2\alpha + 4) \in \mathbb{Z}$  или  $\alpha = -2$ .*

Однако, если известно какое-либо решение  $\varphi$ , то уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли подстановкой  $y = z + \varphi$ .

## §3.3. Уравнение в полных дифференциалах

**Определение.** Уравнение

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (3.5)$$

называют *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция  $u$ , что

$$du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

то есть  $u'_x = P$ ,  $u'_y = Q$ .

**Теорема 3.3.1 (общее решение УПД).** Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  — область, и  $u \in C^1(G)$ ,  $u'_x = P$ ,  $u'_y = Q$ . Тогда функция  $u = \varphi(x)$  — решение уравнения (3.5) на  $(a, b)$ , если и только если  $\varphi \in C^1(a, b)$  и при некотором  $C \in \mathbb{R}$  функция  $\varphi$  неявно задана уравнением

$$u(x, y) = C.$$

**Доказательство.** Необходимость. По определению решения будет  $\varphi \in C^1(a, b)$ . Кроме того, на  $(a, b)$  верно тождество

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Левая часть этого равенства совпадает с полной производной функции  $u$  по переменной  $x$ . Поэтому

$$\frac{d}{dx}u(x, \varphi(x)) \equiv 0.$$

Следовательно,  $u(x, \varphi(x)) \equiv C$ .

Достаточность. Дифференцируя равенство  $u(x, \varphi(x)) = C$  по переменной  $x$ , находим

$$u'_x(x, \varphi(x)) + u'_y(x, \varphi(x))\varphi'_x \equiv 0.$$

Так как  $u'_x = P$ ,  $u'_y = Q$ , то по определению функция  $\varphi$  является решением уравнения (3.5) на  $(a, b)$ .  $\square$

Как определить, что коэффициенты уравнения (3.5) являются частным производными некоторой функции? Если такая функция  $u$  существует и при этом  $u \in C^2(G)$ , то необходимо  $u''_{xy} = u''_{yx}$ , то есть

$$P'_y = Q'_x. \quad (3.6)$$

Если  $P, Q \in C^1(G)$  и область  $G$  односвязна<sup>1</sup>, то условие (3.6) достаточно для существования функции  $u$ .

Признак (3.6) уравнения в полных дифференциалах означает, что определяемое уравнением  $P dx + Q dy = 0$  векторное поле  $F = (P, Q)$  потенциально. Значит, существует функция  $u$  (потенциал поля), для которой  $F$  является градиентом. В силу теоремы 3.3.1, интегральные кривые уравнения в полных дифференциалах (3.5) — линии уровня потенциала  $u$ .

**Определение.** Потенциал  $u$  векторного поля  $F = (P, Q)$  будем называть **потенциалом уравнения** (3.5).

**Теорема 3.3.2.** <sup>2</sup> Пусть  $G$  — односвязная область в  $\mathbb{R}^2$ ,  $P, Q \in C^1(G)$ ,  $P'_y = Q'_x$ ,  $(x_0, y_0) \in G$ . Тогда поле  $(P, Q)$  потенциально в области  $G$ , а его потенциал

<sup>1</sup> Область  $G \subset \mathbb{R}^2$  называется односвязной, если все точки, лежащие внутри любой замкнутой кривой без самопересечений  $\Gamma \subset G$ , также принадлежат  $G$ . Попросту говоря, это область без дыр.

<sup>2</sup> См., например, §51, п.5 в учебнике: Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И., Курс математического анализа. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001

определяется формулой

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_{\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (3.7)$$

где  $\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})$  — произвольный кусочно-гладкий путь в области  $G$ , соединяющий точки  $(x_0, y_0)$  (начало пути) и  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

Продемонстрируем на примере другой способ нахождения потенциала.

**Пример 3.3.1.** Решим уравнение  $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$ .

Область задания уравнения — вся плоскость, а это односвязная область. Непосредственной проверкой убеждаемся, что условие (3.6) выполнено. Тогда общий интеграл имеет вид

$$u(x, y) = C,$$

где функция  $u$  находится из системы

$$\begin{cases} u'_x = e^{-y}, \\ u'_y = -(2y + xe^{-y}). \end{cases}$$

При фиксированном  $y$  из первого уравнения системы находим

$$u(x, y) = e^{-y}x + C(y),$$

где функция  $C$  зависит только от  $y$  и непрерывно дифференцируема, поскольку такова функция  $u$ . Подставляя найденное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$C'(y) = -2y,$$

откуда  $C(y) = -y^2$ . Таким образом, общее решение задаётся уравнением

$$xe^{-y} - y^2 = C. \quad \triangle$$

**Замечание.** Применяя способ нахождения потенциала, указанный в примере 3.3.1, необходимо внимательно следить за областями определения получающихся функций. Например, рассмотрим в полуплоскости  $x > 0$  уравнение

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0.$$

Если упустить из виду, что первообразная

$$\int \frac{-y}{x^2 + y^2} dx$$

находится по-разному при  $y = 0$  и при  $y \neq 0$ , то можно прийти к функции  $u(x, y) = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ . Эта функция не может служить потенциалом на всей указанной полуплоскости, поскольку она не определена в точках оси  $x$ , а потенциал должен быть определён и непрерывно дифференцируем во всей области.

В действительности потенциалом будет функция

$$u(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{если } y > 0, \\ -\pi/2, & \text{если } y = 0, \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

К этой функции можно прийти, вычисляя криволинейный интеграл (3.7).

### 3.3.1. Интегрирующий множитель

Предположим, что условие (3.6) нарушается.

**Определение.** Непрерывная функция  $\mu(x, y) \neq 0$  называется *интегрирующим множителем* уравнения (3.5), если уравнение

$$\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Пусть  $P, Q \in C^1(G)$ . Если интегрирующий множитель  $\mu \in C^1(G)$ , то

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x,$$

то есть

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu \quad (3.8)$$

Решить это уравнение в частных производных в общем случае не проще, чем проинтегрировать исходное уравнение.

В некоторых специальных случаях уравнение (3.8) упрощается. В качестве примера найдём интегрирующий множитель линейного уравнения

$$y' = p(x)y + q(x), \quad (3.9)$$

которое равносильно

$$(py + q)dx - dy = 0.$$

Условие (3.6) здесь не выполнено. Уравнение (3.8) принимает вид

$$\mu'_y(py + q) + \mu'_x = -p\mu.$$

Попробуем найти интегрирующий множитель, зависящий только от  $x$ . В этом случае получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\mu' = -p\mu.$$

Одно из его решений:  $\mu = e^{-\int p}$ . Умножая (3.9) на  $e^{-\int p}$ , получаем

$$y'e^{-\int p} - pye^{-\int p} = qe^{-\int p}.$$

Левая часть — производная произведения  $e^{-\int p}$  и  $y$ . Тогда

$$(ye^{-\int p})' = \int qe^{\int p}.$$

Следовательно,

$$ye^{-\int p} = C + \int qe^{\int p}.$$

При умножении данного равенства на  $e^{\int p}$  приходим к формуле (3.3) общего решения линейного уравнения.

**Пример 3.3.2.** Решить уравнение  $y' = y + x$ .

*Решение.* Интегрирующий множитель

$$\mu = e^{-\int dx} = e^{-x}.$$

Умножая уравнение на  $\mu$ , получаем

$$y'e^{-x} - ye^{-x} = xe^{-x},$$

значит,

$$(ye^{-x})' = xe^{-x}.$$

Отсюда

$$y = e^x \left( \int xe^{-x} dx + A \right) = Ae^x - x - 1,$$

где  $A \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . △

# Тема 4: Уравнение, не разрешённое относительно производной

## Содержание

---

§4.1 Уравнение, разрешимое относительно производной . . . . .	35
§4.2 Метод введения параметра . . . . .	36
4.2.1 Неполные уравнения . . . . .	37
4.2.2 Полное уравнение . . . . .	39
4.2.3 Некоторые способы параметризации . . . . .	40
§4.3 Задача Коши для уравнения, не разрешённого относительно производной . . . . .	41

---

### §4.1. Уравнение, разрешимое относительно производной

Один из способов решения уравнения вида

$$F(x, y, y') = 0 \quad (4.1)$$

состоит в разрешении его относительно  $y'$ , если это возможно. При этом в общем случае возникает совокупность уравнений  $\{y' = f_k(x, y)\}$ . Например, если исходное уравнение имеет вид

$$(y' - f_1(x, y))(y' - f_2(x, y)) = 0,$$

то любое решение одного из уравнений

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y)$$

будет решением исходного. Однако, обратное неверно: исходное уравнение может иметь решение, не являющееся решением ни одного из указанной пары уравнений. Если  $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0)$ , то в точке  $(x_0, y_0)$  возможна стыковка интегральных кривых первого и второго уравнения в одну интегральную кривую исходного уравнения.

**Пример 4.1.1.** Рассмотрим уравнение  $y'^2 - 4x^2 = 0$ .

Раскладывая левую часть на множители, имеем  $(y' - 2x)(y' + 2x) = 0$ . Тогда каждое из уравнений

$$\begin{aligned} y' - 2x &= 0, \\ y' + 2x &= 0 \end{aligned}$$

определяет решение исходного. То есть  $y = x^2 + C_1$  или  $y = -x^2 + C_2$ .

Стыковка интегральных кривых может происходить в точках, где  $2x = -2x$ , то есть на прямой  $x = 0$ . Действительно, при  $C_1 = C_2$  найденные функции и их производные совпадают. Поэтому решениями также будут функции (рис. 4.1)

$$y = \begin{cases} -x^2 + C, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + C, & \text{если } x > 0. \end{cases} \quad \triangle$$

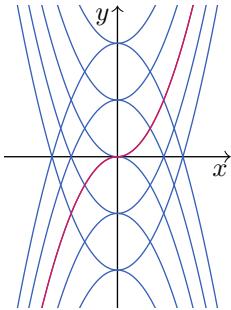


Рис. 4.1. В точках оси  $Oy$  решения уравнения  $y'^2 = 4x^2$  разветвляются

## §4.2. Метод введения параметра

Если не удаётся выразить  $y'$  из уравнения  $F(x, y, y') = 0$  явно, можно попробовать искать решение в параметрической форме.

**Определение.** Пусть вектор-функция  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  имеет координатные функции  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , то есть  $\gamma = (\varphi, \psi)$ . Если множество  $\gamma(I)$  является графиком некоторой функции  $y = f(x)$ , то говорят, что соотношения

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I \quad (4.2)$$

задают функцию  $f: \varphi(I) \rightarrow \mathbb{R}$  параметрически.

В частности, если функция  $\varphi$  имеет обратную  $\varphi^{-1}$ , то соотношения (4.2) параметрически определяют функцию  $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$  при  $x \in \varphi(I)$ .

**Пример 4.2.1.** Соотношения  $x = \cos t$ ,  $y = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$  параметрически определяют константу  $y = 1$  как функцию переменной  $x$  при  $x \in [-1, 1]$ .

Соотношения  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  не определяет функцию, поскольку окружность не является графиком функции. Но если брать параметр  $t$  из отрезка  $[0, \pi]$ , то получается параметрическое задание функции  $y = \sqrt{1 - x^2}$  при  $x \in [-1, 1]$ .  $\triangle$

### 4.2.1. Неполные уравнения

Разберём сначала неполное уравнение

$$F(x, y') = 0. \quad (4.3)$$

Пусть  $y'$  — не функция, а название координаты. Тогда уравнение (4.3) определяет некоторое множество на плоскости  $\mathbb{R}_{x,y}^2$ . Предположим, что это множество — кривая  $\gamma$ , являющаяся графиком некоторой функции  $y' = g(x)$ . Тогда любая первообразная функции  $g$  будет решением уравнения (4.3).

Предположим нам удалось подобрать параметризацию кривой  $\gamma$ :

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t), \quad t \in I.$$

Это значит, что функция  $g$  параметрически задаётся парой  $(\varphi, \psi)$ . Тогда первообразную функции  $g$  можно найти также в параметрической форме. Об этом говорит следующее утверждение.

**Утверждение 4.2.1.** *Пусть  $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$  на  $(\alpha, \beta)$ ,  $\psi \in C(\alpha, \beta)$ ,*

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0 \quad \text{на } (\alpha, \beta). \quad (4.4)$$

*Тогда при  $C \in \mathbb{R}$  соотношения*

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C, \quad t \in (\alpha, \beta) \quad (4.5)$$

*параметрически определяют решение уравнения  $F(x, y') = 0$  на  $\varphi((\alpha, \beta))$ .*

**Доказательство.** Так как  $\varphi'(t) \neq 0$  на  $(\alpha, \beta)$ , то функция  $\varphi$  строго монотонна, а значит, имеет обратную. Тогда соотношения (4.5) параметрически определяют функцию  $y = g(x)$ , заданную на интервале  $(a, b) = \varphi((\alpha, \beta))$ . По формуле для производной функции, заданной параметрически, имеем

$$g'(x) = \frac{(\int \psi(t) \varphi'(t) dt + C)'}{\varphi'(t)} = \psi(t).$$

Следовательно,  $g' = \psi \circ \varphi^{-1}$ , и поэтому  $g \in C^1(a, b)$ . В силу тождества (4.4), при любом  $x \in (a, b)$

$$F(x, g'(x)) = F(\varphi(t), \psi(t)) = 0.$$

Таким образом, функция  $g$  — решение уравнения (4.3) на  $(a, b)$ . □

Формулы (4.5) обычно не запоминают, а выводят из следующей схемы рассуждений. Рассмотрим равенство

$$dy = y'_x dx, \quad (4.6)$$

которое назовём **основным соотношением метода введения параметра**. Если в (4.6) сделать подстановки

$$dy = y'_t dt, \quad y'_x = \psi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt,$$

то получится дифференциальное уравнение относительно  $y$  как функции  $t$ :

$$y'_t = \psi(t)\varphi'(t).$$

Его решение

$$y(t) = \int \psi(t)\varphi'(t) dt + C$$

и функция  $x = \varphi(t)$  параметрически задают решение уравнения (4.3).

**Замечание.** Утверждение 4.2.1 не говорит о том, как найти вообще все решения уравнения (4.3).

**Пример 4.2.2.** Найти решения уравнения  $e^{y'} + y' = x$ .

В данном уравнении переменная  $x$  выражена явно, что позволяет легко ввести параметр:

$$y'_x = t, \quad x = e^t + t.$$

В основном соотношении (4.6) сделаем подстановки

$$dy = y'_t dt, \quad y'_x = t, \quad dx = (e^t + 1) dt.$$

Имеем

$$y'_t = t(e^t + 1).$$

Тогда

$$y = e^t(t - 1) + \frac{t^2}{2} + C.$$

Ответ:  $x = e^t + t$ ,  $y = e^t(t - 1) + t^2/2 + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  $\triangle$

Для уравнения  $F(y, y') = 0$  можно доказать аналог утверждения 4.2.1. Та же схема рассуждений с использованием основного соотношения (4.6) приводит к нужным формулам. Подобрав параметризацию

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t)$$

множества  $\{(y, y') \in \mathbb{R}_{y,y'}^2 \mid F(y, y') = 0\}$ , необходимо в основном соотношении (4.6) сделать подстановки

$$dy = \varphi'(t) dt, \quad y'_x = \psi(t), \quad dx = x'_t dt.$$

Решив полученное дифференциальное уравнение, найдём функцию  $x(t)$ . Добавляя к нему функцию  $y = \varphi(t)$ , получим параметрическое решение исходного уравнения  $F(y, y') = 0$ .

### 4.2.2. Полное уравнение

Аналогичная техника используется и в общем случае. Если переменные  $x$ ,  $y$  и  $y'$  интерпретировать как координаты, то уравнение

$$F(x, y, y') = 0$$

задаёт некоторое множество в пространстве  $\mathbb{R}_{x,y,y'}^3$ . Предположим, что это множество — гладкая поверхность, параметризованная функциями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

Производя в основном соотношении (4.6) подстановки

$$\begin{aligned} dy &= \psi'_u du + \psi'_v dv, \\ y'_x &= \chi(u, v), \\ dx &= \varphi'_u du + \varphi'_v dv, \end{aligned}$$

приходим к уравнению

$$(\psi'_u - \chi\varphi'_u) du + (\psi'_v - \chi\varphi'_v) dv = 0.$$

Если удалось получить его решение в виде  $v = g(u, C)$ , то пара функций

$$x = \varphi(u, g(u, C)), \quad y = \psi(u, g(u, C))$$

определяет решение исходного уравнения  $F(x, y, y') = 0$  через параметр  $u$ .

**Пример 4.2.3.** Рассмотрим уравнение

$$xy' - y = \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2}.$$

Оно разрешимо относительно  $y$ :

$$y = xy' - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2}.$$

Параметризуем соответствующую поверхность в пространстве  $\mathbb{R}_{x,y,y'}^3$  так:

$$x = u, \quad y' = v, \quad y = uv - \frac{v}{2} \ln \frac{v}{2}.$$

Запишем основное соотношение  $dy = y'_x dx$ , принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} dy &= y'_u du + y'_v dv = v du + \left( u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2} \right) dv, \\ y'_x &= v, \\ dx &= du. \end{aligned}$$

Получаем

$$\left( u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2} \right) dv = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\begin{aligned} dv &= 0, \\ u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Отсюда, во-первых, получаем решение  $v = C$ . Следовательно, решения исходного уравнения определяются парой функций

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= uC - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

В данном случае легко выразить решение явно:

$$y = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}.$$

Во-вторых, из (4.7) следует, что  $v = 2e^{2u-1}$ . Тогда

$$y = u \cdot 2e^{2u-1} - \frac{2e^{2u-1}}{2} \ln \frac{2e^{2u-1}}{2} = e^{2u-1}.$$

Учитывая, что  $x = u$ , получаем ещё одно решение в явном виде  $y = e^{2x-1}$ .

Кроме найденных функций имеются составные решения.  $\triangle$

Только что рассмотренное уравнение — это *уравнение Клеро*, общий вид которого

$$y = xy' + q(y').$$

Оно, в свою очередь, является частным случаем *уравнения Лагранжа*

$$y = p(y')x + q(y').$$

#### 4.2.3. Некоторые способы параметризации

Если уравнение  $F(x, y) = 0$  разрешимо относительно одной из переменных, то другую можно взять в качестве параметра. Например, если  $y = f(x)$ , то  $x = t$ ,  $y = f(t)$  — параметризация.

Если уравнение кривой имеет вид  $P(x, y) + Q(x, y) = 0$ , где  $P$  и  $Q$  — однородные функции различной степени, то подстановка  $y = xt$  позволит выразить  $x$  через  $t$  (а затем и  $y$  через  $t$ ).

Если уравнение  $F(x, y, z) = 0$  разрешимо относительно одной из переменных, то две другие можно выбрать в качестве параметров. Например, если  $y = F(x, z)$ , то  $x = u$ ,  $z = v$ ,  $y = F(u, v)$  — параметризация.

Возможно, окажется полезным переход в полярные, сферические или цилиндрические координаты или их обобщения. Например, полярные координаты можно обобщить так:

$$x = a \cos^\alpha \varphi, \quad y = b \sin^\beta \varphi.$$

### §4.3. Задача Коши для уравнения, не разрешённого относительно производной

Уравнение (4.1) задаёт в общем случае не одно поле направлений, а некоторую их совокупность. Значит, через одну точку на плоскости могут проходить несколько интегральных кривых под разными углами. Поэтому постановка задачи Коши для уравнения, не разрешённого относительно  $y'$ , содержит дополнительное условие.

**Определение.** *Задачей Коши* для уравнения (4.1) называется задача нахождения его решения, удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Чтобы задача Коши могла иметь решение, начальные данные должны быть согласованы:  $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ .

**Теорема 4.3.1 (существование и единственность решения ЗК для уравнения, не разрешённого относительно производной).** *Пусть  $F \in C^1(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}_{x,y,y'}^3$  — область,  $(x_0, y_0, y'_0) \in G$ ,  $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ ,  $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $x_0$  существует единственное решение задачи*

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (4.8)$$

**Доказательство.** По теореме о неявной функции найдутся окрестности  $U \subset \mathbb{R}_{x,y}^2$  и  $V \subset \mathbb{R}_{y'}^1$  точек  $(x_0, y_0)$  и  $y'_0$  соответственно, такие что для каждой точки  $(x, y) \in U$  существует единственное решение  $y' \in V$  уравнения  $F(x, y, y') = 0$ . Причём таким образом заданная функция  $y' = f(x, y)$  непрерывна на  $U$ .

Предположим, что  $\varphi$  — решение задачи (4.8) на интервале  $(a, b) \ni x_0$ . Тогда

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, \quad \varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0.$$

В силу непрерывности  $\varphi$  и  $\varphi'$ , из второго и третьего равенств следует, что  $(x, \varphi(x)) \in U$  и  $\varphi'(x) \in V$ , если  $x$  мало отличается от  $x_0$ . Поэтому из первого равенства получаем  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$  при всех  $x$  из некоторой окрестности точки  $x_0$ .

Таким образом, функция  $\varphi$  является решением задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (4.9)$$

Поскольку  $F \in C^1(G)$ , то производная  $f'_y$  непрерывна в некоторой окрестности  $(x_0, y_0)$ . Из теоремы 2.1.2 следует, что в  $U$  проходит лишь одна интегральная кривая задачи (4.9). Поэтому, если существует решение (4.8), то оно единственное.

Теперь докажем существование решения задачи (4.8). По теореме 2.1.1 на некотором интервале существует решение  $\varphi$  задачи (4.9). Но тогда  $\varphi'(x_0) =$

$f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0) = y'_0$ . Для тех значений  $x$ , при которых  $(x, \varphi(x)) \in U$ , равенство  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$  равносильно  $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ . Следовательно, функция  $\varphi$  является решением задачи Коши (4.8).  $\square$

**Определение.** Решение  $\varphi$  на  $(a, b)$  уравнения  $F(x, y, y') = 0$  называют **особым**, если для любой точки  $x_0 \in (a, b)$  найдётся решение  $\psi$  того же уравнения, такое что

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0), \quad \varphi'(x_0) = \psi'(x_0),$$

при этом  $\varphi \not\equiv \psi$  в любой сколь угодно малой окрестности точки  $x_0$ .

Решение  $y = x^2$  уравнения  $y'^2 = 4x^2$  (см. рис. 4.1) не является особым, несмотря на то, что через каждую точку его графика проходит другая интегральная кривая. Единственность нарушается лишь в начале координат. Дело здесь в том, что задача Коши для уравнения (4.1) содержит ещё начальное условие на производную. Поэтому параболы, пересекающиеся при  $x \neq 0$  являются решениями *разных* задач Коши.

Для существования особого решения, проходящего через точку  $(x_0, y_0)$ , необходимо нарушение условий теоремы существования и единственности 4.3.1 в этой точке. Множество всех таких точек образует дискриминантную кривую.

**Определение.** Пусть  $F \in C^1(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^3$  — область. *Дискриминантной кривой* называют множество точек

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists y' \in \mathbb{R}: F(x, y, y') = 0, F'_{y'}(x, y, y') = 0\}.$$

Заметим, что решение, график которого содержится в дискриминантной кривой, не обязано быть особым.

Алгоритм нахождения особых решений уравнения  $F(x, y, y') = 0$ , где  $F$  непрерывно дифференцируема:

1. Найти общий интеграл.
2. Найти дискриминантную кривую, исключив переменную  $y'$  из системы уравнений  $F(x, y, y') = 0, F'_{y'}(x, y, y') = 0$ .
3. Выбрать те решения, графики которых содержатся в дискриминантной кривой.
4. Проверить выбранные решения на соответствие определению особого решения.

**Пример 4.3.1.** Вернёмся к уравнению из примера 4.2.3:

$$xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0$$

Исключая  $y'$  из системы

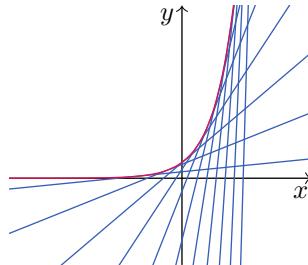
$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0, \\ x - \frac{1}{2} \ln \frac{y'}{2} - \frac{1}{2} = 0, \end{cases}$$

получаем уравнение дискриминантной кривой:  $y = e^{2x-1}$ . Она совпадает с одной из найденных интегральных кривых.

Будет ли решение  $\varphi(x) = e^{2x-1}$  особым? Возьмём  $x_0 \in \text{dom } \varphi = \mathbb{R}$ . Проверим, нет ли среди семейства  $\psi(x) = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}$  решений, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \psi(x_0), \\ \varphi'(x_0) = \psi'(x_0), \end{cases} \iff \begin{cases} Cx_0 - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2} = e^{2x_0-1}, \\ C = 2e^{2x_0-1}. \end{cases}$$

При  $C = 2e^{2x_0-1}$  функция  $\psi(x)$  является решением той же задачи Коши, что и функция  $\varphi$ , и при этом не совпадает с  $\varphi$  в любой окрестности точки  $x_0$ . Таким образом,  $\varphi$  — особое решение (рис. 4.2).  $\triangle$



**Рис. 4.2.** Особое решение уравнения Клеро — огибающая семейства прямых, являющихся графиками его решений

# Тема 5: Уравнения высшего порядка

## Содержание

---

§5.1	Уравнения высшего порядка: основные понятия . . . . .	44
§5.2	Методы понижения порядка . . . . .	45
5.2.1	Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ . . . . .	46
5.2.2	Уравнение, не содержащее независимой переменной	46
5.2.3	Уравнение, однородное относительно искомой функции и её производных . . . . .	48
5.2.4	Уравнение в точных производных . . . . .	48

---

### §5.1. Уравнения высшего порядка: основные понятия

**Определение.** *Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка* называют уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (5.1)$$

**Определение.** Функция  $\varphi$  — *решение уравнения* (5.1) на  $(a, b)$ , если

- $\varphi \in C^n(a, b)$ ;
- $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$  на  $(a, b)$ .

**Определение.** *Каноническим уравнением* будем называть уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (5.2)$$

разрешённое относительно старшей производной.

**Определение.** *Задачей Коши* для канонического уравнения (5.2) называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего **начальным условиям**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (5.3)$$

Набор чисел  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  при этом называют **начальными данными**.

Задача Коши имеет простую геометрическую и механическую трактовку, если порядок уравнения равен двум. Допустим, требуется решить задачу

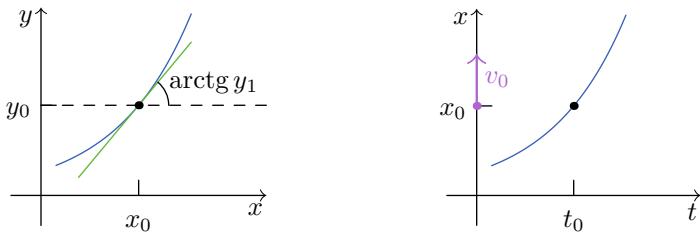
$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

С геометрической точки зрения требуется найти кривую, проходящую через точку с координатами  $(x_0, y_0)$ , касательная к которой в этой точке имеет угловой коэффициент, равный  $y'_0$ .

Чтобы сделать механический смысл более ясным, сформулируем ту же задачу в других обозначениях:

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0.$$

Здесь искомая функция  $x(t)$  — координата материальной точки в момент времени  $t$ . В механике производную обозначают точкой над функцией, то есть  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$  суть первая и вторая производная функции  $x$  по времени  $t$ . Требуется найти закон движения, при котором движущаяся точка в начальный момент времени  $t_0$  находится в положении  $x_0$  и имеет при этом скорость  $v_0$  (рис. 5.1).



**Рис. 5.1.** Геометрический и механический смысл задачи Коши для уравнения второго порядка

Приведём простые достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения высшего порядка. Более общие утверждения будут доказаны позднее.

**Теорема 5.1.1 (существование решения ЗК для канонического уравнения).** Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $f \in C(G)$ ,  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_{0^{(n-1)}}) \in G$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $x_0$  существует решение задачи (5.2), (5.3).

**Теорема 5.1.2 (единственность решения ЗК для канонического уравнения).** Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}_{x,y,y',\dots,y^{(n-1)}}^{n+1}$ ,  $f, f'_y, f'_{y'}, \dots, f'_{y^{(n-1)}} \in C(G)$ ,  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_{0^{(n-1)}}) \in G$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — решения задачи (5.2), (5.3) на  $(a, b)$ . Тогда  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  на  $(a, b)$ .

**Определение.** Решение  $\varphi$  на  $(a, b)$  уравнения (5.2) называют **особым**, если для любой точки  $x_0 \in (a, b)$  найдётся решение  $\psi$  того же уравнения, такое что

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0), \quad \psi'(x_0) = \varphi'(x_0), \quad \dots, \quad \psi^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0),$$

при этом  $\varphi \not\equiv \psi$  в любой сколь угодно малой окрестности точки  $x_0$ .

Другими словами, интегральная кривая уравнения (5.2) является особой, если в каждой её точке нарушается единственность решения задачи Коши.

## §5.2. Методы понижения порядка

Как правило, чем ниже порядок уравнения, тем проще его решить. Рассмотрим некоторые случаи, допускающие понижение порядка уравнения.

### 5.2.1. Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

Простейший случай — уравнение

$$y^{(n)} = f(x).$$

Поскольку  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ , то

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1.$$

Таким образом порядок уравнения уменьшается на единицу.

**Пример 5.2.1.** Найдём общее решение уравнения  $y'' = \sin x$ .

Имеем

$$y' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1.$$

Интегрируя ещё раз, окончательно находим

$$y = \int (-\cos x + C_1) dx + C_2 = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Значит, общее решение имеет вид

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \triangle$$

В общем случае введение новой искомой функции  $z = y^{(k)}$  на  $k$  единиц понижает порядок уравнения

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

### 5.2.2. Уравнение, не содержащее независимой переменной

Пусть  $y$  — решение на  $(a, b)$  уравнения

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (5.4)$$

не содержащего явно независимой переменной  $x$ . Предположим, что существует обратная функция  $y^{-1}$ . Тогда

$$y'(x) = y'(y^{-1}(y(x))).$$

Положим  $z = y' \circ y^{-1}$ . Далее будем опускать аргумент  $x$  для краткости. Тогда

$$y' = z(y).$$

Выясним, какому уравнению необходимо удовлетворяет функция  $z$ , если порядок уравнения  $n = 3$ . Имеем

$$y'' = z'(y)y' = z'(y)z(y),$$

$$y^{(3)} = (z'(y)z(y))' = z''(y)y'z(y) + z'(y)z'(y)y' = z''(y)z^2(y) + z'(y)^2z(y).$$

При  $x \in (a, b)$  имеем

$$F(y, z(y), z'(y)z(y), z''(y)z^2(y) + z'(y)^2z(y)) = 0.$$

Пусть функция  $y$  отображает интервал  $(a, b)$  в интервал  $(A, B)$ . Тогда  $z$  — решение на  $(A, B)$  уравнения

$$F(y, z, z'z, z''z^2 + z'^2z) = 0,$$

если считать  $y$  независимой переменной.

Можно показать, что и в общем случае подстановка  $y' = z(y)$  приводит к уравнению, порядок которого на единицу меньше, чем у уравнения (5.4).

**Пример 5.2.2.** Рассмотрим уравнение  $(1 + y^2)yy'' = (3y^2 - 1)y'^2$ .

Полагаем  $z(y) = y'$ , тогда  $y'' = z'_y z$ . Подставляя в исходное уравнение, имеем

$$(1 + y^2)yzz' = (3y^2 - 1)z^2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Функция  $z = 0$  — решение. Чтобы исключить деление на ноль, рассмотрим уравнение при  $y > 0, z > 0$ .

Разделив обе части на  $z^2(1 + y^2)y$ , находим

$$\frac{1}{z} dz = \frac{3y^2 - 1}{(1 + y^2)y} dy.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln z = 2 \ln(1 + y^2) - \ln y + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

отсюда

$$\frac{yz}{(1 + y^2)^2} = C_1.$$

При  $C_1 < 0$  эта формула описывает также решения, для которых  $z < 0$ . При  $C_1 = 0$  получаем упомянутое выше решение  $z = 0$ .

Рассуждая аналогично, приходим к той же формуле и для области  $y < 0$ .

Возвращаясь к функции  $y$ , получим

$$\frac{yy'}{(1 + y^2)^2} = C_1.$$

Интегрируя ещё раз, найдём общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{1}{1 + y^2} = C_1 x + C_2.$$

При замене  $z(y) = y'$  могли быть потеряны решения вида  $y = \text{const}$ . В данном случае они получаются из общего интеграла при  $C_1 = 0$ .  $\triangle$

### 5.2.3. Уравнение, однородное относительно искомой функции и её производных

Пусть функция  $F$  в уравнении

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

обладает свойством: при любом допустимом значении  $t$

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Тогда порядок уравнения понижается при помощи замены  $z = y'/y$ .

**Пример 5.2.3.** Рассмотрим уравнение

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0.$$

Обозначим левую часть уравнения через  $F(x, y, y', y'')$ . Тогда

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^2 F(x, y, y', y''),$$

то есть рассматриваемое уравнение — однородное по отношению к  $y, y', y''$ . Тогда сделаем подстановку

$$z = \frac{y'}{y}.$$

Отсюда  $y' = zy$  и  $y'' = z'y + z^2y$ . При сокращении на  $y^2$  уравнение примет вид

$$xz' - z = 0.$$

Решение этого уравнения с разделяющимися переменными:  $z = Cx$ .

Вернёмся к функции  $y$ :

$$\frac{y'}{y} = Cx,$$

следовательно,  $y = Ae^{Bx^2}$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ . △

### 5.2.4. Уравнение в точных производных

Допустим, что левая часть уравнения

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

представляет собой производную от некоторой функции  $\Phi$ . То есть

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Отсюда

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C.$$

Это уравнение, порядок которого на единицу меньше прежнего.

**Пример 5.2.4.** Рассмотрим задачу Коши

$$y'' = xy' + y + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Заметим, что данное уравнение можно переписать так:

$$(y')' = (xy)' + x'.$$

Используя линейность производной, приходим к уравнению

$$(y' - xy - x)' = 0.$$

Отсюда

$$y' - xy - x = C.$$

Принимая во внимание начальные условия, находим значение постоянной

$$C = y'(0) - 0 \cdot y(0) - 0 = 0.$$

Итак, остаётся решить уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = x(y + 1).$$

Разделив обе части на  $y + 1$  и проинтегрировав, приходим к семейству функций

$$y = Ce^{x^2/2} - 1.$$

Подставим начальные данные, чтобы найти  $C$ :

$$y(0) = Ce^0 - 1,$$

отсюда  $C = 2$ .

Таким образом, решением поставленной задачи Коши является функция

$$y = 2e^{x^2/2} - 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \triangle$$

# Тема 6: Системы уравнений

## Содержание

---

§6.1	Нормальная система . . . . .	50
6.1.1	Модель «хищник–жертва» . . . . .	50
6.1.2	Нормальная система и её решение . . . . .	51
§6.2	Сведение уравнения к системе . . . . .	52
§6.3	Автономная система . . . . .	53

---

### §6.1. Нормальная система

В дальнейшем в качестве аргумента искомых функций будем использовать букву  $t$ . Это связано с тем, что в прикладных задачах аргументом часто является время. Производную по  $t$  обозначаем точкой над функцией:  $\frac{d}{dt}x = \dot{x}$ .

#### 6.1.1. Модель «хищник–жертва»

Рассмотрим простейшую модель, описывающую борьбу двух биологических видов — хищника и жертвы. Пусть в некотором лесу обитают зайцы в количестве  $x(t)$  и лисы в количестве  $y(t)$ .

Если бы лис не было, то зайцы размножались бы со скоростью, пропорциональной их количеству:  $\dot{x} = kx$ . Однако, при наличии лис следует учесть зайцев, съеденных лисами. Предположим, что число встреч зайцев с лисами пропорционально числу тех и других. Тогда

$$\dot{x} = kx - axy.$$

Лисы вымирают при отсутствии зайцев:  $\dot{y} = -ly$ . Если же зайцы водятся в лесу, то лисы размножаются со скоростью, пропорциональной числу пойманных зайцев:

$$\dot{y} = -ly + bxy.$$

Таким образом мы приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \quad (6.1)$$

Эти уравнения описывают простейшую модель биологической системы хищник–жертва — **модель Лотки–Вольтерра**. Решением такой системы является пара функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , обращающие каждое уравнение системы в тождество.

Текущее состояние системы хищник–жертва можно изображать точкой на плоскости, имеющей координаты  $(x(t), y(t))$ . С течением времени численность особей изменяется, поэтому точка перемещается по плоскости вдоль некоторой траектории  $\gamma$ , которую параметрически определяют функции  $x(t)$  и  $y(t)$ .

Вектор с компонентами  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  касается кривой  $\gamma$ , если его отложить от точки  $(x(t), y(t))$ . Поэтому правая часть системы (6.1) определяет вектор, касательный к искомой траектории. Следовательно, мы можем представить себе как примерно ведут себя решения, если изобразим соответствующее векторное поле (рис. 6.1).

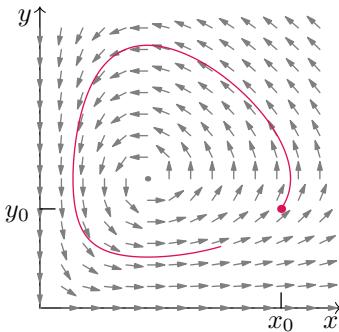


Рис. 6.1. Поле направлений движения, определяемое системой (6.1)

Если количество зайцев превышает количество лис (точка  $(x_0, y_0)$  на рис. 6.1), то обе популяции растут, пока лисы не начнут съедать больше зайцев, чем их прирост. Затем численность зайцев будет убывать, пока нехватка пищи не приведёт к вымиранию лис. Далее число лис уменьшится настолько, что зайцы снова начнут размножаться. Известно, что траектории системы (6.1) замкнуты, то есть в данной биологической системе происходят периодические колебания численности популяций.

Рассмотренная координатная плоскость  $Oxy$  называется *фазовым пространством* для системы (6.1), а построенная на ней траектория, соответствующая решениям  $x(t)$ ,  $y(t)$ , — *фазовой траекторией*.

## 6.1.2. Нормальная система и её решение

**Определение.** *Нормальной системой* дифференциальных уравнений порядка  $n$  называется система уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Если ввести в рассмотрение векторы

$$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t, r) = \begin{pmatrix} f_1(t, r) \\ \dots \\ f_n(t, r) \end{pmatrix},$$

то систему можно компактно записать в виде одного  $n$ -мерного уравнения

$$\dot{r} = f(t, r). \quad (6.2)$$

**Определение.** Вектор-функция  $\varphi$  — *решение системы* (6.2) на  $(a, b)$ , если

- $\varphi \in C^1((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ;
- $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$  на  $(a, b)$ .

**Определение.** *Задачей Коши* для системы (6.2) называется задача нахождения её решения, удовлетворяющего начальному условию  $r(t_0) = r_0$ .

*Интегральной кривой*, как и прежде, называют график решения. Однако теперь это график вектор-функции, расположенный в  $(n+1)$ -мерном пространстве (рис. 6.2).

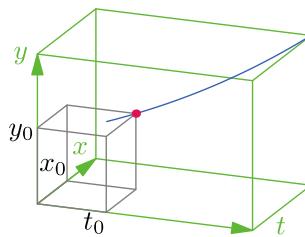


Рис. 6.2. Интегральная кривая двумерного уравнения

## §6.2. Сведение уравнения к системе

**Определение.** Определим отображение  $\Lambda_n$  формулой

$$\Lambda_n y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T.$$

Индекс  $n$  будем опускать, если его значение ясно из контекста.

**Лемма 6.2.1 (о равносильной системе).** *Если  $y$  — решение на  $(a, b)$  уравнения*

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}), \quad (6.3)$$

то вектор-функция  $\Lambda_n y$  — решение на  $(a, b)$  системы

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

И наоборот, если  $r = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  — решение на  $(a, b)$  системы (6.4), то  $y_1$  — решение на  $(a, b)$  уравнения (6.3), и при этом  $r = \Lambda_n y_1$ .

**Доказательство.** Пусть  $y$  — решение уравнения (6.3). Определим  $n$  функций:  $y_k = y^{(k-1)}$  при  $k \in [1 : n]$ . Продифференцируем введённые функции. При  $k \in [1 : n-1]$  имеем

$$\dot{y}_k = y^{(k)} = y_{k+1}.$$

При  $k = n$  будет

$$\dot{y}_n = y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Отсюда ясно, что вектор  $\Lambda_n y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T$  — решение системы (6.4).

Пусть дано, что  $r = (y_1, \dots, y_n)^T$  — решение системы (6.4). Дифференцируя последовательно первое уравнение, находим

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \dot{y}_2 = y_3, \\ y_1^{(3)} &= \dot{y}_3 = y_4, \\ &\dots \\ y_1^{(n-1)} &= \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ y_1^{(n)} &= \dot{y}_n = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = f(t, y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Следовательно,  $y_1$  — решение (6.3) и  $r = \Lambda_n y$ . □

**Определение.** Систему (6.4) будем называть *системой, равносильной уравнению* (6.3).

Сведение к нормальной системе позволяет перенести теорию и методы решения систем на уравнения высших порядков.

### §6.3. Автономная система

**Определение.** *Автономной* называется система вида

$$\dot{r} = f(r). \quad (6.5)$$

Другими словами, нормальная система уравнений автономна, если её правая часть не зависит от времени.

**Замечание.** Любая нормальная система  $\dot{r} = f(t, r)$  может быть сведена к автономной при помощи введения дополнительной неизвестной  $x_{n+1} = t$ .

Всякое решение  $r = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$  системы (6.5) параметрически определяет траекторию в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Она является проекцией интегральной кривой в область  $\text{dom } f \subset \mathbb{R}^n$ .

**Определение.** *Фазовым пространством* системы (6.5) называется  $\text{dom } f$  — область определения её правой части.

**Определение.** *Расширенным фазовым пространством* системы (6.5) называется множество  $\mathbb{R} \times \text{dom } f$ .

Другими словами, расширенное фазовое пространство — это та область, где расположены интегральные кривые системы.

**Определение.** *Фазовая траектория* — проекция интегральной кривой на фазовое пространство параллельно оси времени.

**Определение.** *Фазовый портрет* системы — совокупность её фазовых траекторий.

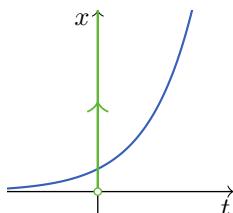
**Определение.** Вектор  $f(r)$  называют *фазовой скоростью* в точке  $r$ .

Из формулы (6.5) следует, что фазовая траектория в каждой своей точке касается вектора поля фазовых скоростей.

**Пример 6.3.1.** Рассмотрим одномерное автономное уравнение

$$\dot{x} = x.$$

Одно из его решений — функция  $x = e^t$ . Её график проходит в *расширенном фазовом пространстве* — плоскости  $\mathbb{R}_{t,x}^2$ . Ось  $x$  — *фазовое пространство*. Функция  $t \mapsto e^t$  параметрически определяет *фазовую траекторию* — положительную часть оси  $x$ . Направление движения отмечают стрелкой на фазовой траектории (рис. 6.3).  $\triangle$



**Рис. 6.3.** Интегральная кривая и фазовая траектория скалярного уравнения  $\dot{x} = x$

**Пример 6.3.2.** На рис. 6.4 изображена интегральная кривая и фазовая траектория, соответствующие решению  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Для данной системы *фазовое пространство* — плоскость  $\mathbb{R}_{x,y}^2$ , *расширенное фазовое пространство* — пространство  $\mathbb{R}_{t,x,y}^3$ .  $\triangle$

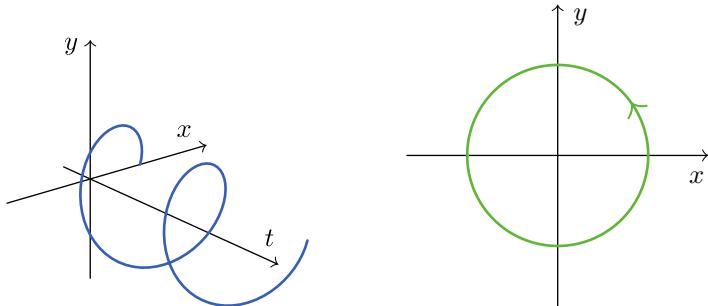


Рис. 6.4. Интегральная кривая и фазовая траектория двумерного уравнения

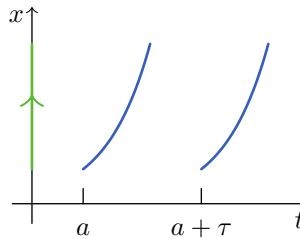
**Определение.** *Точкой покоя*, или *положением равновесия*, или *стационарным состоянием* системы (6.5) называют точку  $r_0$ , такую что  $f(r_0) = 0$ .

**Упражнение 6.3.1.** Докажите, что  $r_0$  — точка покоя системы (6.5), если и только если  $r \equiv r_0$  — её решение.

**Теорема 6.3.1 (свойства автономной системы).** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — область,  $f \in \text{Lip}_{loc}(\Omega)$ .

- (i) Если  $r$  — решение системы (6.5) на  $(a, b)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , то  $r(t - \tau)$  — решение на  $(a + \tau, b + \tau)$  с той же траекторией.
- (ii) Если фазовые траектории решений  $r_1$  и  $r_2$  имеют общую точку  $r_1(t_1) = r_2(t_2)$ , то  $r_1(t_1 + t) \equiv r_2(t_2 + t)$  при всех  $t$ , для которых определены обе части тождества.
- (iii) Пусть  $r_0$  — точка покоя системы (6.5),  $r \not\equiv r_0$  — решение (6.5) на  $(a, b)$ . Тогда  $r(t) \neq r_0$  при всех  $t \in (a, b)$ .
- (iv) Пусть  $r$  — решение (6.5) на  $\mathbb{R}$  и не положение равновесия,  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ,  $t_1 \neq t_2$ ,  $r(t_1) = r(t_2)$ . Тогда  $r$  — периодическая функция, а соответствующая траектория — замкнутая кривая без самопересечений.

**Доказательство.** (i) Если  $r$  — решение, то  $\dot{r} \equiv f(r)$  на  $(a, b)$ . Значит,  $\dot{r}(t - \tau) \equiv f(r(t - \tau))$  при  $t \in (a + \tau, b + \tau)$ . Решения  $r(t)$  и  $r(t - \tau)$  имеют одну и ту же



**Рис. 6.5.** Сдвиг по времени даёт другое решение, но сохраняет траекторию

траекторию, так как их графики отличаются параллельным переносом вдоль оси  $t$  (рис. 6.5).

(ii) Рассмотрим вектор-функции  $s_1(t) = r_1(t_1 + t)$  и  $s_2(t) = r_2(t_2 + t)$ . По свойству (i) они являются решением системы (6.5). Кроме того,

$$s_1(0) = r_1(t_1) = r_2(t_2) = s_2(0).$$

Тогда по теореме 8.2.1 будет  $s_1 \equiv s_2$  при всех  $t$ , для которых определены обе части тождества.

(iii) По свойству (ii) если фазовая траектория имеет общую точку с положением равновесия, то она должна совпадать с ним при всех  $t$ .

(iv) Пусть  $t_1 < t_2$ . По свойству (i) функция  $s(t) = r(t + t_2 - t_1)$  — тоже решение, при этом  $s(t_1) = r(t_2) = r(t_1)$ . Тогда по теореме 8.2.1  $r \equiv s$  на  $\mathbb{R}$ . Значит,  $t_2 - t_1$  — период решения  $r$ .

Докажем, что найдётся наименьший положительный период. Для этого уставшим, что  $T := \inf \{d > 0 \mid r(t + d) \equiv r(t)\} > 0$  и  $T$  — период.

Так как  $r$  — не положение равновесия, то найдётся число  $t_3 \neq t_1$  такое, что  $r(t_1) \neq r(t_3)$ . Предположим противное: для любого  $\delta > 0$  найдётся период, меньший  $\delta$ . Тогда в любой  $\delta$ -окрестности точки  $t_1$  найдётся точка  $t'$ , в которой  $r(t') = r(t_3)$ . Из таких точек составим последовательность  $t'_n \rightarrow t_1$ . При этом  $|r(t'_n) - r(t_1)| = |r(t_3) - r(t_1)|$  для любого  $n$ , а значит, вектор-функция  $r$  не является непрерывной в  $t_1$ . Это противоречит определению решения.

Построим последовательность периодов  $d_i \rightarrow T$ . В каждой точке  $t \in \mathbb{R}$  имеем  $r(t + d_i) \equiv r(t)$ . Принимая во внимание непрерывность  $r$  и осуществляя предельный переход при  $i \rightarrow \infty$ , получаем, что  $T$  также является периодом.

Теперь покажем, что у фазовой траектории решения  $r$  нет точек самопересечения. Допустим при некоторых  $t^*$  и  $t^{**}$  будет  $r(t^*) = r(t^{**})$ , но  $|t^* - t^{**}| < T$ . Рассуждая также, как в начале доказательства пункта (iv), получаем, что  $|t^* - t^{**}|$  — период. Но это невозможно, поскольку  $T$  — наименьший период.  $\square$

**Следствие 6.3.1.1 (виды траекторий).** Пусть  $f \in \text{Lip}_{loc}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — область. Тогда всякая фазовая траектория автономной системы (6.5) принадлежит одному из следующих типов:

(a) положение равновесия;

- (б) замкнутая траектория без самопересечений;
- (в) незамкнутая траектория без самопересечений.

**Доказательство.** Пусть  $r$  — решение (6.5) и не положение равновесия. Тогда либо  $r(t_1) \neq r(t_2)$  при любых  $t_1$  и  $t_2$ ,  $t_1 \neq t_2$ . В этом случае траектория — незамкнутая кривая без самопересечений. Либо при некоторых  $t_1$  и  $t_2$ ,  $t_1 \neq t_2$ , будет  $r(t_1) = r(t_2)$ . Тогда при помощи сдвигов  $r(t + k(t_2 - t_1))$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , решение  $r$  продолжается на всю вещественную ось. Следовательно, по свойству (iv) теоремы 6.3.1 траектория — замкнутая кривая без самопересечений.  $\square$

**Теорема 6.3.2 (о понижении размерности автономной системы).** Пусть  $f_1, f_2 \in C(G)$ . Тогда фазовые траектории системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (6.6)$$

вне точек, где  $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$ , совпадают с интегральными кривыми уравнения

$$f_2(x, y) dx - f_1(x, y) dy = 0, \quad (6.7)$$

и наоборот.

**Доказательство.** См. [2, теорема 3.3.2].  $\square$

**Замечание.** Уравнение (6.7) формально получается из системы (6.6), если записать производные в виде отношения дифференциалов и исключить  $dt$ .

# Тема 7: Теорема существования

## Содержание

---

§7.1 Теорема существования	58
----------------------------	----

---

### §7.1. Теорема существования

**Определение.** *Норма вектора*  $r = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ :

$$|r| := \max_{i \in [1:n]} |x_i|.$$

**Определение.** *Норма матрицы*  $A = (\alpha_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ :

$$|A| := \max_{i \in [1:n], j \in [1:m]} |\alpha_{ij}|.$$

**Лемма 7.1.1.** *Пусть*  $f \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ . *Тогда*

$$\left| \int_a^b f(\tau) d\tau \right| \leq \int_a^b |f(\tau)| d\tau.$$

**Доказательство.** Принимая во внимание определение нормы, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(\tau) d\tau \right| &= \max_i \left| \int_a^b f_i(\tau) d\tau \right| \leq \max_i \int_a^b |f_i(\tau)| d\tau \leq \max_i \int_a^b \max_j |f_j(\tau)| d\tau = \\ &= \max_i \int_a^b |f(\tau)| d\tau = \int_a^b |f(\tau)| d\tau. \end{aligned} \quad \square$$

**Лемма 7.1.2.** *Пусть*  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ . *Тогда*

$$|AB| \leq n|A||B|.$$

**Доказательство.** Пусть  $AB = (\gamma_{ij})$ . Тогда

$$|\gamma_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n |A||B| = n|A||B|.$$

Поэтому  $|AB| \leq n|A||B|$ .  $\square$

**Определение.** Множество функций  $F = \{f\}$ , определённых на  $D$ , называется **равностепенно непрерывным** на  $D$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое что для любой функции  $f \in F$  и для любых значений  $x_1, x_2 \in D$  из неравенства  $|x_2 - x_1| < \delta$  следует  $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ .

**Замечание.** Вместо «множество функций  $F$  равностепенно непрерывно» говорят также «функции множества  $F$  равностепенно непрерывны».

**Лемма 7.1.3 (Арцела–Асколи).** *Пусть функции последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  равномерно ограничены<sup>1</sup> и равностепенно непрерывны на  $[a, b]$ . Тогда из неё можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на  $[a, b]$ .*

**Доказательство.** По условию

$$M := \sup_{n \in \mathbb{N}, x \in [a, b]} |f_n(x)| < +\infty.$$

Составим последовательность чисел

$$\varepsilon_k = \frac{M}{2^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В силу равностепенной непрерывности последовательности, по каждому  $\varepsilon_k$  можно подобрать  $\delta_k$ , такое что если  $x_1, x_2 \in [a, b]$  и  $|x_2 - x_1| < \delta_k$ , то для любого  $n$  будет  $|f_n(x_2) - f_n(x_1)| < \varepsilon_k$ .

График каждой функции  $f_n$  расположен в прямоугольнике  $[a, b] \times [-M, M]$ . Разобьём этот прямоугольник на меньшие прямоугольники с вертикальной стороной  $\varepsilon_1$  и горизонтальной стороной, не превосходящей  $\delta_1$  (рис. 7.1).

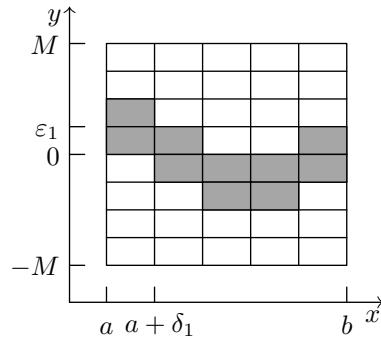


Рис. 7.1

График каждой функции  $f_n$  проходит не более, чем по двум соседним прямоугольникам каждой вертикальной полосы. Количество смежных пар прямоугольников в первой полосе конечно. Значит, найдётся пара, по которой проходит бесконечное множество графиков функций последовательности — закрасим

<sup>1</sup>то есть найдётся число  $M$ , такое что для всех  $n$  верно  $|f_n| \leq M$

её. Будем рассматривать теперь только те функции, графики которых проходят по закрашенным прямоугольникам. Во второй полосе выберем пару соседних прямоугольников, через которые проходит бесконечное множество функций из выбранного семейства. Эту пару также закрасим и далее будем рассматривать только те функции, графики которых проходят по закрашенной области.

За конечное число шагов доберёмся до крайней правой полосы. Таким образом, получим множество (закрашено на рис. 7.1), внутри которого проходят графики функций некоторой подпоследовательности  $F_1^* = \{f_{n_k}\}$ . Для любых функций  $f, g \in F_1^*$  верно:  $|f(x) - g(x)| < 2\epsilon_1$  при любом  $x \in [a, b]$ .

Выберем первую функцию из  $F_1^*$  и обозначим её  $f_1^*$ . Для оставшейся последовательности проведём те же рассуждения, что и выше, взяв вместо  $\epsilon_1$  число  $\epsilon_2$ . Получится подпоследовательность  $F_2^*$ , первую функцию которой обозначим через  $f_2^*$ . Продолжая аналогично, получим последовательность  $\{f_n^*\}$ .

Докажем, что последовательность  $\{f_n^*\}$  сходится равномерно на  $[a, b]$ , используя критерий Коши.

Зафиксируем  $\epsilon > 0$ . Найдём такое  $N$ , что  $2\epsilon_N < \epsilon$ . При любом  $k \in \mathbb{N}$  будет  $f_N^*, f_{N+k}^* \in F_N^*$ , поэтому при любом  $x \in [a, b]$

$$|f_N^*(x) - f_{N+k}^*(x)| < 2\epsilon_N < \epsilon.$$

Таким образом, последовательность  $\{f_n^*\}$  сходится равномерно.  $\square$

**Замечание.** Лемму 7.1 нетрудно обобщить и на вектор-функции, применяя её последовательно к каждой из компонент.

**Определение.** Пусть  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Вектор-функция  $\varphi$  — *решение на  $[a, b]$  интегрального уравнения*

$$r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, r(\tau)) d\tau,$$

если

- $\varphi \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ;
- $\varphi(t) \equiv r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$  на  $[a, b]$ .

**Лемма 7.1.4 (о равносильном интегральном уравнении).** Пусть  $t_0 \in [a, b]$ ,  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  — область,  $(t_0, r_0) \in G$ ,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ . Тогда  $\varphi$  — решение на  $[a, b]$  задачи Коши

$$\dot{r} = f(t, r), \quad r(t_0) = r_0, \tag{7.1}$$

если и только если  $\varphi$  — решение на  $[a, b]$  уравнения

$$r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, r(\tau)) d\tau. \tag{7.2}$$

**Доказательство.** Пусть  $\varphi$  — решение (7.1) на  $[a, b]$ . Тогда  $\varphi \in C[a, b]$ . Интегрируя равенство  $\dot{\varphi}(\tau) = f(\tau, \varphi(\tau))$  от  $t_0$  до  $t \in [a, b]$ , имеем

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Поскольку  $\varphi(t_0) = r_0$ , то функция  $\varphi$  — решение уравнения (7.2) по определению. Докажем обратное. Пусть  $\varphi$  — решение (7.2) на  $[a, b]$ . Тогда из равенства

$$\varphi(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \quad (7.3)$$

следует, что  $\varphi \in C^1[a, b]$ . Дифференцируя (7.3) по  $t$ , получаем:  $\dot{\varphi} \equiv f(t, \varphi(t))$  на  $[a, b]$ . Кроме того, из (7.3) вытекает  $\varphi(t_0) = r_0$ . Таким образом,  $\varphi$  — решение (7.1) по определению.  $\square$

**Замечание.** Определение решения интегрального уравнения и лемма 7.1.4 аналогично формулируются для любого промежутка  $\langle a, b \rangle$ .

**Лемма 7.1.5 (о гладкой стыковке решений).** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ ,  $\varphi_-$  — решение на  $(a, t_0]$ ,  $\varphi_+$  — решение на  $[t_0, b)$  задачи Коши

$$\dot{r} = f(t, r), \quad r(t_0) = r_0. \quad (7.4)$$

Тогда  $\varphi$  — решение задачи (7.4) на промежутке  $(a, b)$ , где

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_-(t), & \text{если } t \in (a, t_0], \\ \varphi_+(t), & \text{если } t \in [t_0, b). \end{cases}$$

**Доказательство.** Так как  $\varphi(t_0) = \varphi_+(t_0) = r_0 = \varphi_-(t_0)$ , то  $\varphi \equiv \varphi_-$  на  $(a, t_0]$ . Значит,  $\varphi$  — решение задачи (7.4) на  $(a, t_0]$ . Тогда по лемме 7.1.4 при  $t \in (a, t_0]$

$$\varphi(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Поскольку  $\varphi \equiv \varphi_+$  на  $[t_0, b)$ , то по той же лемме последняя формула верна и для  $t \in [t_0, b)$ . Следовательно, она верна для всех  $t \in (a, b)$ . Значит, по лемме (7.2) функция  $\varphi$  — решение задачи (7.4) на  $(a, b)$ .  $\square$

**Определение 7.1.1.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $(t_0, r_0) \in G$ . Поскольку  $G$  — открытое множество, то найдутся числа  $a, b > 0$ , такие что параллелепипед

$$\Pi := \{(t, r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \leq a, |r - r_0| \leq b\}$$

целиком содержится в области  $G$ . Так как  $\Pi$  — компакт, то существует число  $M := \max_{(t,r) \in \Pi} |f(t, r)|$ . Положим  $h := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$  (если  $M = 0$ , то  $h := a$ ). Отрезок  $[t_0 - h, t_0 + h]$  называется **отрезком Пеано**, соответствующим точке  $(t_0, r_0)$  (рис. 7.2).

Отрезок Пеано, таким образом, определён неоднозначно. Зафиксируем один из них и разобьём его правую половину на  $N \in \mathbb{N}$  равных частей точками

$$t_k := t_0 + \frac{kh}{N}, \quad k \in [1 : N].$$

Определим ломаную Эйлера  $E_N: [t_0, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}$  рекуррентно:

$$\begin{aligned} E_N(t_0) &= r_0, \\ E_N(t) &= E_N(t_k) + f(t_k, E_N(t_k))(t - t_k), \quad \text{если } t \in (t_k, t_{k+1}]. \end{aligned} \tag{7.5}$$

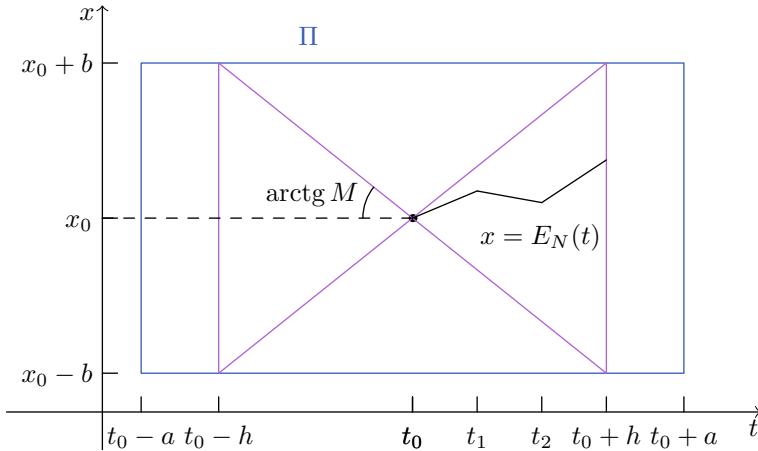


Рис. 7.2. Отрезок Пеано и ломаная Эйлера

Если  $(t_k, E_N(t_k)) \notin G$  при некотором  $k$ , то функция  $E_N$  не может быть определена на всём промежутке  $[t_0, t_0 + h]$ . Следующая лемма показывает, что такая ситуация исключена.

**Лемма 7.1.6 (свойства ломаной Эйлера).** Для любого  $t \in [t_0, t_0 + h]$

- (i) функция  $E_N$  определена в точке  $t$ ;
- (ii)  $|E_N(t) - r_0| \leq M(t - t_0)$ ;

**Доказательство.** Методом математической индукции установим, что утверждения (i), (ii) верны при  $t \in [t_0, t_k]$  для любого  $k \in [1 : N]$ .

При  $k = 1$  функция  $E_N$  определена на  $[t_0, t_1]$ . Имеем

$$|E_N(t) - r_0| = |r_0 + f(t_0, r_0)(t - t_0) - r_0| = |f(t_0, r_0)|(t - t_0) \leq M(t - t_0).$$

Допустим, что утверждения (i), (ii) установлены для  $t \in [t_0, t_k]$  при некотором  $k \in [1 : N - 1]$ . Из пункта (ii) тогда следует

$$|E_N(t_k) - r_0| \leq M(t_k - t_0) \leq Mh \leq M \frac{b}{M} = b,$$

то есть  $(t_k, E_N(t_k)) \in \Pi$ , а значит  $E_N$  можно определить на  $[t_k, t_{k+1}]$ .

Проверим (ii) при  $t \in (t_k, t_{k+1})$ :

$$\begin{aligned} |E_N(t) - E_N(t_0)| &\leq |E_N(t) - E_N(t_k)| + |E_N(t_k) - E_N(t_0)| \leq \\ &\leq |f(t_k, E_N(t_k))|(t - t_k) + M(t_k - t_0) \leq M(t - t_k) + M(t_k - t_0) = M(t - t_0). \end{aligned} \quad \square$$

**Теорема 7.1.1 (Пеано, существование решения ЗК).** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ . Тогда задача

$$\dot{r} = f(t, r), \quad r(t_0) = r_0$$

имеет решение, определённое на отрезке Пеано, соответствующему  $(t_0, r_0)$ .

**Доказательство.** Не умаляя общности считаем, что  $t_0 = 0$ ,  $r_0 = 0$  (в противном случае перенесём начало координат в точку  $(t_0, r_0)$ ).

Пусть  $[-h, h]$  — отрезок Пеано, соответствующий начальной точке. Установим существование решения на  $[0, h]$ . Существование решения на  $[-h, 0]$  тогда получится как следствие, если в исходном уравнении заменить  $t$  на  $-t$ . Объединяя решения на  $[-h, 0]$  и  $[0, h]$ , по лемме 7.1.5 получим решение на  $[-h, h]$ .

Используя (7.5), построим последовательность ломаных Эйлера  $\{E_N\}_{N=1}^{\infty}$ . По лемме 7.1.6 будет  $|E_N(t)| \leq Mh \leq b$ . Значит, последовательность  $\{E_N\}$  равномерно ограничена.

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta := \varepsilon/M$  (при  $M = 0$  теорема тривиальна). При  $t_1, t_2 \in [0, h]$ ,  $t_1 < t_2$ ,  $|t_2 - t_1| < \delta$  по формуле Ньютона–Лейбница<sup>1</sup> находим

$$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_N(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{E}_N(\tau)| d\tau.$$

Из (7.5) следует, что  $|\dot{E}_N(t)| \leq M$  в точках, где производная определена. Тогда

$$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| \leq M(t_2 - t_1) < M\delta = \varepsilon,$$

значит, последовательность  $\{E_N\}$  равностепенно непрерывна.

<sup>1</sup> Имеется в виду обобщение формулы Ньютона–Лейбница, см., например, с. 142 (п. 310) в книге: Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. II, 8-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

По лемме Арцела–Асколи 7.1.3 найдётся подпоследовательность  $\{E_{N_m}\}$ , равномерно сходящаяся к некоторой функции  $\varphi \in C([0, h] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ . Покажем, что  $\varphi$  — это и есть решение поставленной задачи Коши.

В силу леммы 7.1.4 достаточно установить, что для  $\varphi$  верно

$$\varphi(t) \equiv \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \quad \text{на } [0, h].$$

Не умалляя общности вместо  $N_m$  пишем  $N$ . По формуле Ньютона–Лейбница

$$E_N(t) = \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , получаем

$$\varphi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau.$$

Таким образом, нужно установить, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Для этого покажем, что при всех достаточно больших  $N$  величину

$$\Delta_N = \left| \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau - \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau \right|$$

можно сделать меньше любого наперёд заданного числа  $\varepsilon > 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_N &\leq \int_0^t |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq \int_0^h |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau. \end{aligned}$$

Функция  $f$  непрерывна, а значит и равномерно непрерывна на параллелепипеде  $\Pi$ , по которому строится отрезок Пеано. Поэтому найдётся число  $\delta > 0$ , такое что  $|f(P_2) - f(P_1)| < \varepsilon/h$ , если  $|P_2 - P_1| < \delta$  и  $P_1, P_2 \in \Pi$ .

Если при всех достаточно больших  $N$  при всех  $k \in [0 : N - 1]$  и  $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$  будет

$$|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| < \delta, \tag{7.6}$$

то

$$|f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| < \frac{\varepsilon}{h},$$

а значит, получится требуемое неравенство

$$\Delta_N \leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon}{h} d\tau = \varepsilon.$$

Итак, остаётся доказать неравенство (7.6). Пользуясь неравенством треугольника, оценим расстояние между точками  $A = (t_k, E_N(t_k))$  и  $D = (\tau, \varphi(\tau))$  суммой расстояний  $AB + BC + CD$  (рис. 7.3). Имеем

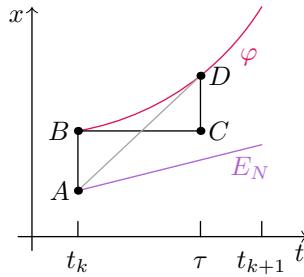


Рис. 7.3

$$\begin{aligned} & |(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| \\ & \leq |(t_k, E_N(t_k)) - (t_k, \varphi(t_k))| + |(t_k, \varphi(t_k)) - (\tau, \varphi(t_k))| + |(\tau, \varphi(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| \\ & = |E_N(t_k) - \varphi(t_k)| + |t_k - \tau| + |\varphi(t_k) - \varphi(\tau)|. \end{aligned}$$

Каждое из трёх слагаемых можно сделать меньше  $\delta/3$  при всех достаточно больших  $N$ : первое слагаемое — в силу равномерной сходимости  $E_N$  к  $\varphi$ , второе слагаемое — в силу того, что оно не превосходит  $h/N$ , и третье слагаемое — в силу равномерной непрерывности  $\varphi$  на  $[0, h]$ . Отсюда следует (7.6), что завершает доказательство теоремы.  $\square$

# Тема 8: Теорема единственности

## Содержание

---

§8.1 Класс Липшица . . . . .	66
§8.2 Теорема единственности . . . . .	68

---

### §8.1. Класс Липшица

**Определение.** Функция  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет *условию Липшица* на множестве  $D$ , если найдётся такое число  $L$  (*константа Липшица*), что для любых точек  $r_1, r_2 \in D$  выполнено

$$|f(r_2) - f(r_1)| \leq L|r_2 - r_1|.$$

**Определение.** Функция  $f: \mathbb{R}_{t,r}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет *условию Липшица по  $r$  (равномерно по  $t$ )* на множестве  $D$ , если найдётся такое число  $L$ , что для любых точек  $(t, r_1), (t, r_2) \in D$  справедливо неравенство

$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leq L|r_2 - r_1|.$$

Обозначение:  $f \in \text{Lip}_r(D)$ .

**Определение.** Функция  $f: \mathbb{R}_{t,r}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет *условию Липшица по  $r$  локально* в области  $G$ , если для любой точки  $(t_0, r_0) \in G$  можно указать её окрестность  $U = U(t_0, r_0)$ , такую что  $f \in \text{Lip}_r(U)$ . Обозначение:  $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$ .

**Пример 8.1.1.** Пусть  $f(x) = \sqrt{x}$ . Тогда  $f \in \text{Lip}[1/2, 1]$ ,  $f \notin \text{Lip}(0, 1]$ ,  $f \in \text{Lip}_{loc}(0, 1]$ .  $\triangle$

**Пример 8.1.2.** Если  $f \in C^1[a, b]$ , то  $f \in \text{Lip}[a, b]$ . Обратное неверно: например, при  $f(x) = |x|$  будет  $f \in \text{Lip}[-1, 1]$ .  $\triangle$

**Пример 8.1.3.** Пусть  $f(t, x) = 1/t + 1/x$ . Тогда  $f \in \text{Lip}_x((0, +\infty) \times [1/2, 1])$ ,  $f \notin \text{Lip}_x((0, +\infty) \times (0, 1])$ ,  $f \in \text{Lip}_{x,loc}((0, +\infty) \times (0, 1])$ .  $\triangle$

Из определения нормы следует, что  $f$  удовлетворяет условию Липшица (глобальному или локальному) тогда и только тогда, когда этому условию удовлетворяет каждая из её  $n$  компонент.

Установим простое достаточное условие того, что  $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$ .

**Лемма 8.1.1.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^m)$ ,  $f'_r \in M_{m,n}(C(G))$ . Тогда  $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$ .

Кроме того, если  $K \subset G$  — выпуклый компакт,

$$M_1 = \max_{(t,r) \in K} |f'_r(t, r)|,$$

то для любых  $(t, r_1), (t, r_2) \in K$

$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leq nM_1|r_2 - r_1|.$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольные точки  $(t, r_1), (t, r_2) \in K$ . В силу выпуклости  $K$  будет  $(t, r_1 + s(r_2 - r_1)) \in K$  при  $s \in [0, 1]$ . Положим

$$g(s) := f(t, r_1 + s(r_2 - r_1)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(t, r_2) - f(t, r_1) &= g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) \, ds = \int_0^1 f'_r \cdot r'_s \, ds = \\ &= \int_0^1 f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1)) \cdot (r_2 - r_1) \, ds. \end{aligned}$$

Принимая во внимание леммы 7.1.1 и 7.1.2, получаем

$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leq \int_0^1 n |f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))| |r_2 - r_1| \, ds \leq nM_1|r_2 - r_1|.$$

Правая часть неравенства не зависит от  $t$ , поэтому  $f \in \text{Lip}_r(K)$ .

Возьмём произвольную точку  $(t_0, r_0) \in G$  и построим замкнутый параллелепипед  $B \subset G$  с центром в этой точке. По доказанному  $f \in \text{Lip}_r(B)$ . Значит, для любой точки из  $G$  можно указать окрестность (например, внутренность  $B$ ), в которой  $f$  удовлетворяет условию Липшица по  $r$ . Поэтому  $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$ .  $\square$

Ясно, что  $\text{Lip}_r(G) \subset \text{Lip}_{r,loc}(G)$  для произвольной области  $G$ . Обратного включения нет. Однако ситуация меняется, если рассматривать функцию на компактных подмножествах области  $G$ .

**Лемма 8.1.2.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$ ,  $K \subset G$  — компакт. Тогда  $f \in \text{Lip}_r(K)$ .

**Доказательство.** Докажем методом от противного. Пусть  $f \notin \text{Lip}_r(K)$ . Тогда для любого  $N \in \mathbb{N}$  найдётся пара точек  $(t_N, r_N), (t_N, \tilde{r}_N) \in K$ , для которых верно неравенство

$$|f(t_N, r_N) - f(t_N, \tilde{r}_N)| > N|r_N - \tilde{r}_N|. \quad (8.1)$$

Поскольку  $K$  — компакт, то из последовательности  $\{(t_N, r_N)\}$  можно выбрать подпоследовательность с номерами  $\{N_m\}$ , сходящуюся к некоторой точке  $(t, r) \in K$ . Затем из последовательности  $\{(t_{N_m}, \tilde{r}_{N_m})\}$  выберем подпоследовательность с номерами  $\{N_{m_k}\}$ , сходящуюся к  $(t, \tilde{r})$ . Далее считаем, что исходная последовательность совпадает с выбранной подпоследовательностью.

Возможны два случая:  $r = \tilde{r}$  и  $r \neq \tilde{r}$ . Рассмотрим сначала первый из них.

По условию  $f \in \text{Lip}_{r, \text{loc}}(G)$ , значит, найдётся окрестность  $U$  точки  $(t, r)$ , в которой  $f \in \text{Lip}_r(U)$ , то есть существует постоянная  $L$ , для которой

$$|f(t', r') - f(t', r'')| \leq L|r' - r''|$$

при любых  $(t', r'), (t', r'') \in U$ . Выберем номер  $N$  так, чтобы  $N > L$  и  $(t_N, r_N), (t_N, \tilde{r}_N) \in U$ , и положим  $t' = t_N, r' = r_N, r'' = \tilde{r}_N$ . Тогда из неравенства (8.1) следует

$$|f(t', r') - f(t', r'')| > N|r' - r''| \geq L|r' - r''|,$$

что противоречит предыдущему неравенству.

Пусть теперь  $r \neq \tilde{r}$ . В области  $G$  выберем непересекающиеся параллелепипеды  $R = [a, b] \times X$  и  $\tilde{R} = [a, b] \times \tilde{X}$ , для которых точки  $(t, r)$  и  $(t, \tilde{r})$  соответственно являются внутренними. Рассмотрим функцию

$$g(t, x, y) := \frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|},$$

определенную на компакте  $[a, b] \times X \times \tilde{X}$ , где она непрерывна, а значит, ограничена некоторым числом  $L$ . Выбирая номер  $N > L$ , такой что  $(t_N, r_N) \in R$  и  $(t_N, \tilde{r}_N) \in \tilde{R}$ , из (8.1) получаем

$$g(t_N, r_N, \tilde{r}_N) > N > L.$$

Это противоречие завершает доказательство леммы.  $\square$

## §8.2. Теорема единственности

Как было показано в примере 2.1.2, одной лишь непрерывности правой части уравнения недостаточно для единственности решения. В этом параграфе будет доказан вариант теоремы единственности, когда в качестве достаточных условий применяется условие Липшица.

**Лемма 8.2.1 (Гронуолл).** *Пусть  $\varphi \in C[a, b]$ ,  $t_0 \in [a, b]$ ,  $\lambda, \mu \geq 0$ , при любом  $t \in [a, b]$  верно неравенство*

$$0 \leq \varphi(t) \leq \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right|.$$

*Тогда для любого  $t \in [a, b]$*

$$\varphi(t) \leq \lambda e^{\mu|t-t_0|}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай  $t \geq t_0$  (при  $t < t_0$  доказательство аналогично). Предположим, что  $\lambda > 0$ , и введём функцию

$$v(t) := \lambda + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau.$$

Имеем  $v(t) > 0$ ,  $v'(t) = \mu\varphi(t) \leq \mu v(t)$ . Отсюда

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \leq \mu.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку  $[t_0, t]$ , получаем

$$v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)}.$$

Следовательно,

$$\varphi(t) \leq v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)} = \lambda e^{\mu(t-t_0)}.$$

Если же  $\lambda = 0$ , то при любом  $\lambda_1 > 0$  верно

$$\varphi(t) \leq \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \leq \lambda_1 + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau.$$

По уже доказанному имеем

$$\varphi(t) \leq \lambda_1 e^{\mu(t-t_0)}.$$

Переходя здесь к пределу при  $\lambda_1 \rightarrow 0$ , получаем  $\varphi(t) \leq 0$ . Значит, лемма верна и при  $\lambda = 0$ .  $\square$

**Замечание.** Лемма 8.2.1 аналогично формулируется и доказывается для любого промежутка  $\langle a, b \rangle$ .

**Теорема 8.2.1 (Пикар, существование и единственность решения ЗК).** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ . Тогда

(i) на отрезке Пеано существует решение задачи

$$\dot{r} = f(t, r), \quad r(t_0) = r_0; \tag{8.2}$$

(ii) если  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — решения (8.2) на  $(a, b)$ , то  $\psi_1 \equiv \psi_2$  на  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Будем считать, что  $t_0 = 0$ ,  $r_0 = 0$  (в противном случае перенесём начало координат в точку  $(t_0, r_0)$ ). Достаточно установить существование решения на отрезке  $[0, h]$  — правой половине отрезка Пеано (см. рассуждения в начале доказательства теоремы 7.1.1).

Пусть

$$\Pi := \{(t, r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t| \leq A, |r| \leq B\} \subset G,$$

$$M := \max_{(t, r) \in \Pi} |f(t, r)|.$$

Тогда в качестве  $h$  можно взять число  $\min \{A, B/M\}$  (см. определение 7.1.1).

На отрезке  $[0, h]$  зададим последовательность функций

$$\varphi_0(t) = 0,$$

$$\varphi_{k+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau.$$

Дальнейшее изложение доказательства состоит из следующих этапов:

1. Докажем корректность определения последовательности  $\{\varphi_k\}$ : чтобы построить функцию  $\varphi_{k+1}$  должно быть  $(t, \varphi_k(t)) \in G$  при всех  $t \in [0, h]$ .
  2. Покажем, что последовательность  $\{\varphi_k\}$  равномерно на  $[0, h]$  сходится к некоторой функции  $\varphi$ .
  3. Установим, что  $\varphi$  — решение интегрального уравнения, равносильного задаче (8.2) (см. лемму 7.1.4).
  4. Применив лемму Гронуолла докажем единственность решения (пункт (ii)).
1. При  $k = 0$ , очевидно,  $(t, \varphi_0(t)) \in G$ . Допустим справедливость этого утверждения при некотором  $k$ . Тогда функция  $\varphi_{k+1}$  определена на  $[0, h]$  и

$$|\varphi_{k+1}(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_k(\tau))| d\tau \leq Mt \leq Mh \leq M \frac{B}{M} = B,$$

что влечёт включение  $(t, \varphi_{k+1}(t)) \in \Pi \subset G$  при всех  $t \in [0, h]$ .

2. Воспользуемся критерием Коши. А именно, установим, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $N \in \mathbb{N}$ , такое что при всех  $m \geq N$ , всех  $k \in \mathbb{N}$  и всех  $t \in [0, h]$

$$|\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leq \varepsilon.$$

По лемме 8.1.2 будет  $f \in \text{Lip}_r(\Pi)$  с некоторой константой Липшица  $L$ . Индукцией по  $m$  докажем неравенство

$$|\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leq \frac{ML^m t^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (8.3)$$

При  $m = 0$  утверждение верно, так как

$$|\varphi_k(t) - \varphi_0(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))| d\tau \leq Mt.$$

Допуская его справедливость при некотором  $m$ , имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_{m+1+k}(t) - \varphi_{m+1}(t)| &\leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) - f(\tau, \varphi_m(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^t L |\varphi_{m+k}(\tau) - \varphi_m(\tau)| d\tau \leq \int_0^t L \frac{ML^m \tau^{m+1}}{(m+1)!} d\tau = \frac{ML^{m+1} t^{m+2}}{(m+2)!}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Из (8.3) вытекает, что при любом  $t \in [0, h]$

$$|\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leq \frac{ML^m h^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (8.4)$$

Выражение в правой части не зависит от  $t$  и  $k$  и стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ , поскольку оно является общим членом ряда Тейлора для экспоненты. Значит, последовательность  $\{\varphi_m\}$  удовлетворяет критерию Коши. Обозначим через  $\varphi$  её предел на  $[0, h]$ .

3. Переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$  в равенстве

$$\varphi_{m+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau,$$

получаем

$$\varphi(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau. \quad (8.5)$$

В пункте 1 было установлено, что  $(t, \varphi_m(t)) \in \Pi$  при всех  $t \in [0, h]$ . Тогда при  $m \rightarrow +\infty$  будет  $(t, \varphi(t)) \in \Pi$  при всех таких  $t$ . Следовательно,

$$|f(\tau, \varphi_m(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))| \leq L |\varphi_m(\tau) - \varphi(\tau)|.$$

Учитывая равномерную сходимость  $\varphi_m$ , из данного неравенства следует, что  $f(t, \varphi_m(t)) \rightarrow f(t, \varphi(t))$  при  $m \rightarrow +\infty$  равномерно на  $[0, h]$ . Это позволяет внести знак предела под интеграл в (8.5). После этого по лемме 7.1.4 заключаем, что  $\varphi$  — решение задачи (8.2) на  $[0, h]$ .

4. Пусть  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — решения (8.2) на  $(a, b)$ . По лемме 7.1.4

$$\psi_1(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_1(\tau)) d\tau, \quad \psi_2(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_2(\tau)) d\tau,$$

поэтому

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))| d\tau.$$

Рассмотрим произвольный отрезок  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ , содержащий ноль. Графики функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$  на  $[\alpha, \beta]$  — компактные множества. По лемме 8.1.2 найдётся постоянная  $\tilde{L}$ , такая что

$$|f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))| \leq \tilde{L} |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|$$

при всех  $\tau \in [\alpha, \beta]$ . Следовательно,

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq \tilde{L} \int_0^t |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)| d\tau.$$

По лемме Гронуолла 8.2.1 будет  $|\psi_1(t) - \psi_2(t)| = 0$  на  $[\alpha, \beta]$ , то есть  $\psi_1$  и  $\psi_2$  совпадают на  $[\alpha, \beta]$ . Поскольку отрезок  $[\alpha, \beta]$  выбирался произвольно из  $(a, b)$ , то функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  совпадают и на всём интервале  $(a, b)$ .  $\square$

**Замечание.** Первый пункт теоремы 8.2.1 следует из теоремы Пеано 7.1.1. Ещё одно доказательство приведено для того, чтобы указать другой метод, при помощи которого можно построить решение. При доказательстве использовались *последовательные приближения Пикара*

$$\varphi_0(t) = r_0, \quad \varphi_{k+1}(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau.$$

Сформулируем как следствие теорему существования и единственности с условиями, которые проверяются проще, чем условия теоремы Пикара. Кроме того, укажем погрешность  $m$ -го приближения Пикара.

**Следствие 8.2.1.1 (теорема Пикара с простыми условиями).** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $f'_r \in M_n(C(G))$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ . Тогда

- (i) на отрезке Пеано  $[t_0 - h, t_0 + h]$  существует решение  $\varphi$  задачи Коши (8.2);
- (ii) если  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — решения этой задачи на  $(a, b)$ , то  $\psi_1 \equiv \psi_2$  на  $(a, b)$ ;
- (iii) пусть  $\Pi$  — параллелепипед, по которому строится отрезок Пеано,

$$M = \max_{(t,r) \in \Pi} |f(t, r)|, \quad M_1 = \max_{(t,r) \in \Pi} |f'_r(t, r)|,$$

$\varphi_m$  —  $m$ -е приближение Пикара, тогда для любого  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$

$$|\varphi(t) - \varphi_m(t)| \leq \frac{M(nM_1)^m h^{m+1}}{(m+1)!}.$$

**Доказательство.** Пункты (i) и (ii) следуют из леммы 8.1.1 и теоремы 8.2.1. Для доказательства пункта (iii) сделаем предельный переход в неравенстве (8.4) при  $k \rightarrow +\infty$ . Тогда

$$|\varphi(t) - \varphi_m(t)| \leq \frac{ML^m h^{m+1}}{(m+1)!}.$$

По лемме 8.1.1 в качестве  $L$  можно взять  $nM_1$ .  $\square$

**Теорема 8.2.2 (существование и единственность решения ЗК для уравнения высшего порядка).** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,y,y',\dots,y^{(n-1)}}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G) \cap \text{Lip}_{(y,y',\dots,y^{(n-1)}),\text{loc}}(G)$ ,  $(t_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$ . Тогда

(i) в некоторой окрестности точки  $t_0$  существует решение задачи

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}; \end{cases} \quad (8.6)$$

(ii) если  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — решения (8.6) на  $(a, b)$ , то  $\psi_1 \equiv \psi_2$  на  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Пусть  $y$  — решение (8.6) на  $(a, b)$ . По лемме 6.2.1 вектор-функция  $\Lambda_n y$  — решение задачи Коши для равносильной системы (6.4) с начальными условиями

$$y_1(t_0) = y_0, y_2(t_0) = y'_0, \dots, y_n(t_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (8.7)$$

Правая часть каждого уравнения системы (6.4) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица локально по переменным  $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$  в области  $G$ . Тогда по теореме Пикара 8.2.1 соответствующая задача Коши не может иметь более одного решения на  $(a, b)$ , а значит, не может быть более одного решения и у задачи (8.6). Тем самым доказан пункт (ii).

Установим справедливость пункта (i). Из теоремы Пикара 8.2.1 следует существование в некоторой окрестности точки  $t_0$  решения  $r = (y_1, \dots, y_n)$  системы (6.4) с начальными условиями (8.7). По лемме 6.2.1 функция  $y_1$  — решение задачи (8.6) в той же окрестности.  $\square$

**Следствие 8.2.2.1.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,y,y',\dots,y^{(n-1)}}^{n+1}$  — область,  $f, f'_y, f'_{y'}, \dots, f'_{y^{(n-1)}} \in C(G)$ ,  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$ . Тогда

(i) в некоторой окрестности точки  $t_0$  существует решение задачи (8.6);

(ii) если  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — решения задачи (8.6) на  $(a, b)$ , то  $\psi_1 \equiv \psi_2$  на  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Из леммы 8.1.1 следует, что  $f \in \text{Lip}_{(y,y',\dots,y^{(n-1)}),\text{loc}}(G)$ . Остается применить теорему 8.2.2.  $\square$

# Тема 9: Продолжение решений. Линейные системы

## Содержание

---

§9.1	Продолжение решений	74
§9.2	Максимальное решение линейной системы	78
§9.3	Линейные однородные системы	79
§9.4	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами	83

---

### §9.1. Продолжение решений

Теорема Пеано гарантирует существование решения задачи Коши на отрезке Пеано. Существует ли решение за пределами этого отрезка? Насколько далеко можно продолжить решение за его пределы? Этот параграф даёт ответы на поставленные вопросы в некоторых специальных случаях.

**Определение.** Решение  $\varphi$  уравнения  $\dot{r} = f(t, r)$  на промежутке  $\langle a, b \rangle$  называется *продолжимым*, если существует решение  $\psi$  того же уравнения на промежутке  $\langle A, B \rangle$ , причём  $\langle a, b \rangle \subsetneq \langle A, B \rangle$  и  $\varphi \equiv \psi$  на  $\langle a, b \rangle$ . Решение  $\psi$  называют *продолжением* решения  $\varphi$ .

**Определение.** Если для решения  $\varphi$  уравнения  $\dot{r} = f(t, r)$  не существует продолжения, то будем называть функцию  $\varphi$  *максимальным решением*.

**Пример 9.1.1.** Уравнение  $\dot{x} = 1 + x^2$  имеет решение  $x = \operatorname{tg} t$ ,  $t \in [-\pi/4, \pi/4]$ . Для этого решения можно построить продолжение на интервал  $(-\pi/2, \pi/2)$ , заданное той же формулой. Функция  $x = \operatorname{tg} t$ , рассмотренная на интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$ , является максимальным решением.  $\triangle$

**Теорема 9.1.1 (критерий продолжимости).** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ . Тогда решение  $\varphi$  уравнения  $\dot{r} = f(t, r)$  на промежутке  $[a, b]$  продолжимо вправо за  $b$  (то есть на некоторый промежуток  $[a, c]$ , где  $c > b$ ), если и только если существует предел  $\varphi(b-0) = \tilde{r}$  и  $(b, \tilde{r}) \in G$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $\psi$  — продолжение на  $[a, c)$  решения  $\varphi$ . Тогда в силу непрерывности  $\psi$

$$\varphi(b-0) = \psi(b-0) = \psi(b).$$

Поскольку  $b \in [a, c)$ , то из определения решения следует  $(b, \psi(b)) \in G$ .

Докажем обратное утверждение. Доопределим функцию  $\varphi$  по непрерывности на промежуток  $[a, b]$ . При  $t, t_1 \in [a, b]$

$$\varphi(t) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^t \varphi'(\tau) d\tau = \int_{t_1}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Переходя к пределу при  $t_1 \rightarrow b$ , получаем

$$\varphi(t) = \tilde{r} + \int_b^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Тогда по лемме 7.1.4 функция  $\varphi$  — решение задачи

$$\dot{r} = f(t, r), \quad r(b) = \tilde{r}. \quad (9.1)$$

По теореме Пеано 7.1.1 существует её решение  $\chi$  на некотором отрезке  $[b - h, b + h]$ . Положим

$$\psi(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b], \\ \chi(t), & t \in [b, b + h]. \end{cases}$$

По лемме 7.1.5 функция  $\psi$  — решение задачи (9.1) на  $[a, b + h]$ , следовательно,  $\psi$  — продолжение решения  $\varphi$  вправо за точку  $b$  (рис. 9.1).  $\square$

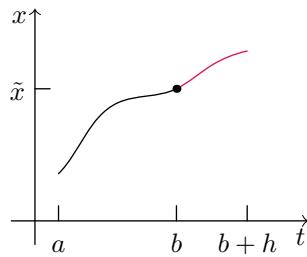


Рис. 9.1. Продолжение решения вправо

**Замечание.** Из доказанной теоремы следует, что максимальное решение определяется на *интервале*, а не на произвольном промежутке (если система рассматривается в области).

**Теорема 9.1.2 (существование и единственность максимального решения).** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ . Тогда максимальное решение задачи Коши  $\dot{r} = f(t, r)$ ,  $r(t_0) = r_0$  существует и единственno.

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $S$  всевозможных решений указанной задачи Коши, определённых на интервалах. По теореме Пеано 7.1.1 это множество не пусто. Обозначим через  $(a_\varphi, b_\varphi)$  область определения решения  $\varphi \in S$ . Положим

$$(A, B) := \bigcup_{\varphi \in S} (a_\varphi, b_\varphi).$$

Определим на  $(A, B)$  функцию  $\psi$  следующим образом. Если  $t \in (A, B)$ , то найдётся функция  $\varphi \in S$ , такая что  $t \in (a_\varphi, b_\varphi)$ . Тогда положим  $\psi(t) := \varphi(t)$ . Определение корректно, поскольку значение в точке  $t$  любой другой функции из  $S$ , определённой в  $t$ , совпадает с  $\varphi(t)$  по теореме Пикара 8.2.1.

Отсюда следует, что  $\psi \equiv \varphi$  на  $(a_\varphi, b_\varphi)$ . А раз  $\varphi$  — решение, то  $\psi$  непрерывно дифференцируема в  $t$  и  $\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) = f(t, \psi(t))$ . В силу произвольности выбора точки  $t$  получаем

- $\psi \in C^1(A, B)$ ;
- $\dot{\psi}(t) = f(t, \psi(t))$  при всех  $t \in (A, B)$ .

Кроме того,  $\psi(t_0) = \varphi(t_0) = r_0$ . Тогда  $\psi$  — решение исходной задачи Коши по определению.

Поскольку интервал  $(A, B)$  включает в себя все возможные интервалы, на которых могут быть заданы решения, то  $\psi$  является максимальным решением.

Другого максимального решения быть не может. Действительно, пусть имеется ещё одно максимальное решение  $\tilde{\psi}: (\tilde{A}, \tilde{B}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Тогда  $(\tilde{A}, \tilde{B}) \subset (A, B)$  и  $\tilde{\psi} \equiv \psi$  на  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ . Если, например,  $\tilde{B} < B$ , то  $\psi$  — продолжение  $\tilde{\psi}$  вправо, что противоречит непродолжимости решения  $\tilde{\psi}$ .  $\square$

График максимального решения покидает любой компакт, лежащий в области задания уравнения. Строго это утверждение формулируется в виде следующей теоремы.

**Теорема 9.1.3 (о выходе интегральной кривой за пределы компакта).** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$ ,  $\varphi$  — максимальное решение на  $(a, b)$  уравнения  $\dot{r} = f(t, r)$ ,  $K \subset G$  — компакт. Тогда найдётся  $\Delta > 0$ , такое что  $(t, \varphi(t)) \notin K$  при всех  $t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b)$ .

**Доказательство.** Заметим, что расстояние  $\rho = \rho(K, \partial G)$  от компакта  $K$  до границы  $\partial G$  области  $G$  положительно (иначе можно было бы построить последовательность точек из  $K$ , сходящейся к точке на границе, но  $\partial G \cap K = \emptyset$ ). Если  $\rho < +\infty$ , положим  $c := \rho/2$ , иначе пусть  $c := 1$ .

Вокруг каждой точки  $(t', r') \in K$  построим содержащийся внутри  $G$  параллелепипед

$$\Pi(t', r') = \{(t, r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t'| \leq c, |r - r'| \leq c\}$$

и рассмотрим множество

$$K_c := \bigcup_{(t', r') \in K} \Pi(t', r').$$

Поскольку  $K$  — компакт, то норма каждого элемента из  $K$  ограничена некоторым числом  $d$ . Если  $(t, r)$  — произвольная точка из  $K_c$ , то для некоторой точки  $(t', r') \in K$  будет  $(t, r) \in \Pi(t', r')$ , поэтому

$$|(t, r)| \leq |(t, r) - (t', r')| + |(t', r')| \leq c + d.$$

Значит, множество  $K_c$  ограничено.

Докажем его замкнутость. Рассмотрим последовательность  $\{(t_m, r_m)\}$  точек из  $K_c$ , сходящуюся к  $(t, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Для каждой такой точки найдётся параллелепипед  $\Pi(t'_m, r'_m)$ , которому она принадлежит. Раз  $K$  — компакт, то существует подпоследовательность  $\{(t'_{m_k}, r'_{m_k})\}$ , сходящаяся к некоторой точке  $(t', r') \in K$ . Переходя к пределу в неравенствах

$$|t_{m_k} - t'_{m_k}| \leq c, \quad |r_{m_k} - r'_{m_k}| \leq c,$$

находим  $|t - t'| \leq c$  и  $|r - r'| \leq c$ . Следовательно,  $(t, r) \in K_c$ .

Таким образом,  $K_c$  — компакт, и функция  $|f|$  достигает на нём максимального значения

$$M := \max_{(t, r) \in K_c} |f(t, r)|.$$

Теперь предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть  $\Delta = h/2$ , где  $h = \min \{c, c/M\}$ . Тогда при некотором  $t_0 \in (b - h/2, b)$  будет  $(t_0, \varphi(t_0)) \in K$ .

Рассмотрим задачу Коши  $\dot{r} = f(t, r)$  с начальными данными  $r(t_0) = \varphi(t_0)$ . По теореме Пеано 7.1.1 она имеет решение  $\psi$  на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$ . Пусть

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } t \in (a, t_0), \\ \psi(t), & \text{если } t \in [t_0, t_0 + h]. \end{cases}$$

По лемме 7.1.5  $\tilde{\varphi}$  — решение уравнения  $\dot{r} = f(t, r)$  на  $(a, t_0 + h)$ . Функция  $\tilde{\varphi}$  совпадает с  $\varphi$  на  $(a, b) \cap (a, t_0 + h)$  по теореме Пикара 8.2.1. Но

$$t_0 + h > b - \frac{h}{2} + h = b + \frac{h}{2} > b,$$

то есть  $\tilde{\varphi}$  — продолжение  $\varphi$  вправо за точку  $b$ . Так как  $\varphi$  по условию является максимальным решением, приходим к противоречию.  $\square$

Установим важный с точки зрения приложений признак продолжимости.

**Теорема 9.1.4 (о системе, сравнимой с линейной).** Пусть  $G = (a, b) \times \mathbb{R}_r^n$ ,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r, \text{loc}}(G)$ , функции  $u, v \in C(a, b)$  таковы, что для любых  $(t, r) \in G$

$$|f(t, r)| \leq u(t)|r| + v(t).$$

Тогда каждое максимальное решение уравнения  $\dot{r} = f(t, r)$  определено на  $(a, b)$ .

**Доказательство.** По теореме 9.1.2 любая задача Коши с начальными данными  $(t_0, r_0) \in G$  имеет единственное максимальное решение  $\varphi$ , заданное на некотором интервале  $(\alpha, \beta)$ . Пусть, например,  $\beta < b$ . Принимая во внимание лемму 7.1.4, при  $t \in [t_0, \beta)$  находим

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \left| r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq |r_0| + \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq |r_0| + \int_{t_0}^t |u(\tau)| |\varphi(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t |v(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Из непрерывности функций  $u$  и  $v$  вытекает их ограниченность на отрезке  $[t_0, \beta]$ . Следовательно, найдутся такие числа  $\lambda, \mu \geq 0$ , что при  $t \in [t_0, \beta)$

$$|\varphi(t)| \leq \lambda + \mu \int_{t_0}^t |\varphi(s)| ds.$$

Тогда по лемме Гронуолла 8.2.1

$$|\varphi(t)| \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)} \leq L,$$

где  $L = \lambda e^{\mu(\beta-t_0)}$ . Отсюда следует, что график решения  $\varphi$  не покидает компакт

$$K = \{(t, r) \in G \mid t \in [t_0, \beta], |r| \leq L\} \subset G$$

при  $t \in [t_0, \beta)$ , что противоречит теореме 9.1.3.  $\square$

## §9.2. Максимальное решение линейной системы

**Определение.** Линейной системой дифференциальных уравнений называют систему вида

$$\dot{r} = P(t)r + q(t), \tag{9.2}$$

где  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ .

**Теорема 9.2.1 (существование и единственность максимального решения ЛС).** Пусть  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in (a, b)$ ,  $r_0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда максимальное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{r} = P(t)r + q(t), \\ r(t_0) = r_0 \end{cases} \quad (9.3)$$

существует, единственно и определено на интервале  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Заметим, что правая часть системы  $f(t, r) = P(t)r + q(t)$  и её производная  $f'_r = P(t)$  непрерывны в области  $(a, b) \times \mathbb{R}^n$ . Тогда по теореме 9.1.2 существует единственное максимальное решение задачи (9.3).

Имеем

$$|f(t, r)| \leq |P(t)r| + |q(t)| \leq n|P(t)| \cdot |r| + |q(t)|.$$

Так как функции  $u(t) = n|P(t)|$  и  $v(t) = |q(t)|$  непрерывны на  $(a, b)$ , то по теореме 9.1.4 решение задачи (9.3) продолжимо на интервал  $(a, b)$ .  $\square$

**Замечание.** В дальнейшем под решением линейной системы подразумевается максимальное решение.

### §9.3. Линейные однородные системы

**Определение.** Если  $q \equiv 0$  на  $(a, b)$ , то система (9.2), то есть

$$\dot{r} = P(t)r, \quad (9.4)$$

называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

**Упражнение 9.3.1.** Докажите, что множество всех решений линейной однородной системы образует линейное пространство.

**Определение.** *Определителем Вронского (вронскианом)* вектор-функций  $\{r_k\}_{k=1}^n$ , где  $r_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})^T$ , называют определитель

$$W(t) := \det(r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & & & \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

**Теорема 9.3.1 (свойства вронскиана решений ЛОС).** Пусть  $\{r_k\}_{k=1}^n$  — решения системы (9.4). Тогда следующие утверждения равносильны:

- (i)  $W(t_0) = 0$  в некоторой точке  $t_0 \in (a, b)$ ;
- (ii)  $W \equiv 0$  на  $(a, b)$ ;

(iii)  $\{r_k\}_{k=1}^n$  линейно зависимы на  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Проведём доказательство по схеме: (ii)  $\Rightarrow$  (i)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Это следствие очевидно.

(i)  $\Rightarrow$  (iii) Пункт (i) означает, что векторы  $\{r_k(t_0)\}_{k=1}^n$  линейно зависимы. Значит, найдётся набор чисел  $\{c_k\}_{k=1}^n$ , такой что

$$\sum_{k=1}^n c_k r_k(t_0) = 0.$$

Положим  $\varphi := c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_n r_n$ . Тогда  $\varphi$  — решение системы (9.4), удовлетворяющее условию  $\varphi(t_0) = 0$ . Но решением этой же задачи Коши является функция, тождественно равная нулю на  $(a, b)$ . Следовательно, по теореме 9.2.1 будет  $\varphi \equiv 0$  на  $(a, b)$ . Значит, вектор-функции  $\{r_k\}_{k=1}^n$  линейно зависимы.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) Линейная зависимость вектор-функций  $\{r_k\}_{k=1}^n$  означает линейную зависимость столбцов матрицы  $(r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$  при любом  $t \in (a, b)$ . Тогда её определитель, то есть вронскиан  $W(t)$ , тождественно равен нулю.  $\square$

**Следствие 9.3.1.1 (критерий линейной независимости решений ЛОС).** Пусть  $\{r_k\}_{k=1}^n$  — решения системы (9.4),  $W$  — вронскиан данного набора. Тогда

- набор  $\{r_k\}_{k=1}^n$  линейно зависим, если и только если  $W(t_0) = 0$  для некоторого  $t_0 \in (a, b)$ ;
- набор  $\{r_k\}_{k=1}^n$  линейно независим, если и только если  $W(t_0) \neq 0$  для некоторого  $t_0 \in (a, b)$ .

**Теорема 9.3.2 (формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОС).** Пусть  $t, t_0 \in (a, b)$ ,  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $r_1, r_2, \dots, r_n$  — решения системы (9.4). Тогда их вронскиан

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \operatorname{tr} P(\tau) d\tau.$$

**Доказательство.** Пусть  $X$  — матрица со столбцами  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , а  $R_k$  — её  $k$ -ая строка. Используя формулу полного разложения определителя, нетрудно убедиться, что

$$\dot{W} = \det \begin{pmatrix} \dot{R}_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dot{R}_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ \dot{R}_n \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\dot{X} = (\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_n) = (Pr_1, Pr_2, \dots, Pr_n) = PX,$$

то  $k$ -ая строка матрицы  $\dot{X}$  совпадает с  $k$ -ой строкой матрицы  $PX$ , то есть

$$\dot{R}_k = \sum_{j=1}^n p_{kj} R_j,$$

где  $p_{kj}$  — элемент матрицы  $P$  в  $k$ -ой строке и  $j$ -ом столбце.

Подставляя выражение для  $\dot{R}_k$  в формулу для  $\dot{W}$  и используя свойства определителя, находим

$$\dot{W} = p_{11} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + p_{22} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \dots + p_{nn} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = W \operatorname{tr} P.$$

Интегрируя полученное уравнение, приходим к требуемой формуле.  $\square$

**Замечание.** Если  $r_1, r_2, \dots, r_n$  — не решения линейной однородной системы, а произвольные линейно зависимые вектор-функции, то их вронсиан  $W \equiv 0$ , однако, обратное утверждение неверно. Например, вронсиан вектор-функций

$$r_1(t) = \begin{pmatrix} |t|t \\ |t| \end{pmatrix}, \quad r_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

равен нулю на всём отрезке  $[-1, 1]$ . Но  $r_1$  и  $r_2$  линейно независимы на  $[-1, 1]$ , поскольку  $r_1(t) = \operatorname{sgn} t \cdot r_2(t)$ .

**Теорема 9.3.3 (общее решение ЛОС).** Пусть  $P \in M_n(C(a, b))$ . Тогда множество решений системы  $\dot{r} = P(t)r$  образует  $n$ -мерное линейное пространство.

**Доказательство.** Пусть  $t_0 \in (a, b)$ ,  $\{a_k\}_{k=1}^n$  — базис в  $\mathbb{R}^n$ . По теореме 9.2.1 для любого  $k \in [1 : n]$  существует  $r_k$  — решение задачи Коши  $\dot{r} = P(t)r$ ,  $r(t_0) = a_k$ . Вронсиан этих решений  $W(t_0) = \det(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$ . Тогда по следствию 9.3.1.1 функции  $\{r_k\}_{k=1}^n$  линейно независимы.

Рассмотрим произвольное решение  $r$  системы  $\dot{r} = P(t)r$ . Пусть  $\{c_k\}_{k=1}^n$  — координаты вектора  $r(t_0)$  в базисе  $\{a_k\}_{k=1}^n$ . Положим

$$\varphi = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_n r_n.$$

Ясно, что  $\varphi$  — решение системы  $\dot{r} = P(t)r$ , при этом  $\varphi(t_0) = r(t_0)$ . Тогда  $r \equiv \varphi$  в силу теоремы 9.2.1.

Таким образом, функции  $\{r_k\}_{k=1}^n$  линейно независимы, и любое решение есть их линейная комбинация. Значит,  $\{r_k\}_{k=1}^n$  — базис в пространстве решений.  $\square$

**Определение.** *Фундаментальной системой решений* системы уравнений (9.4) называется совокупность её  $n$  линейно независимых решений.

**Определение.** *Фундаментальная матрица системы* (9.4) — матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений.

**Пример 9.3.1.** Система уравнений

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y$$

имеет общее решение  $x = C_1 e^t$ ,  $y = C_2 e^{2t}$ . Тогда в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать вектор-функции

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Соответствующая фундаментальная матрица

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

△

**Лемма 9.3.1 (о множестве фундаментальных матриц).** *Пусть  $\Phi$  — фундаментальная матрица системы (9.4). Тогда  $\{\Phi A \mid A \in M_n(\mathbb{R}), \det A \neq 0\}$  — множество всех фундаментальных матриц этой системы.*

**Доказательство.** Пусть  $\Psi$  — фундаментальная матрица системы (9.4). Тогда каждый её столбец, будучи решением этой системы, является линейной комбинацией столбцов матрицы  $\Phi$ . Записывая коэффициенты разложения в столбцы матрицы  $A$ , имеем  $\Psi = \Phi A$ . А так как  $\det \Psi \neq 0$  и  $\det \Phi \neq 0$ , то и  $\det A \neq 0$ .

Обратно, пусть  $A \in M_n(\mathbb{R})$  — произвольная невырожденная матрица. Тогда матрица  $\Phi A$  состоит из решений, а её определитель не обращается в ноль. Следовательно, по следствию 9.3.1.1 эти решения линейно независимы, поэтому  $\Phi A$  — фундаментальная матрица. □

**Замечание.** Можно показать, что все утверждения этого параграфа дословно переносятся на случай комплекснозначных матриц и решений.

**Упражнение 9.3.2.** Докажите теорему существования и единственности, аналогичную теореме 9.2.1, для комплекснозначных  $r$ ,  $P$  и  $q$  (но  $t \in \mathbb{R}$ ). **Указание:** воспользуйтесь теоремой 9.2.1 для вектор-функции  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , где  $u + iv = r$ .

**Лемма 9.3.2 (об овеществлении).** *Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi = (r_1, r_2, r_3 \dots, r_n)$  — фундаментальная матрица системы (9.4), при этом  $r_1 = \bar{r}_2$ . Тогда*

$$\Psi = (\operatorname{Re} r_1, \operatorname{Im} r_1, r_3, \dots, r_n)$$

— фундаментальная матрица той же системы.

**Доказательство.** Так как

$$\operatorname{Re} r_1 = \frac{1}{2}(r_1 + \bar{r}_1) = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2,$$

$$\operatorname{Im} r_1 = \frac{1}{2i}(r_1 - \bar{r}_1) = \frac{1}{2i}r_1 - \frac{1}{2i}r_2,$$

то

$$\Psi = \Phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & E_{n-2} \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{pmatrix},$$

где  $E_{n-2}$  — единичная матрица порядка  $n - 2$ . По лемме 9.3.1 матрица  $\Psi$  является фундаментальной.  $\square$

**Пример 9.3.2.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$$

В качестве её фундаментальной матрицы можно взять

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы  $\Phi$  комплексно-сопряжены. По лемме 9.3.2 матрица

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

столбцы которой суть вещественная и мнимая части первого столбца матрицы  $\Phi$ , также является фундаментальной.  $\triangle$

## §9.4. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

**Определение.** *Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* называют линейную систему вида

$$\dot{r} = Ar + q(t), \tag{9.5}$$

где  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{C}^n)$ .

**Лемма 9.4.1.** *Вектор-функция  $\varphi(t) = e^{\lambda t}h$  — нетривиальное решение однородной системы  $\dot{r} = Ar$ , если и только если  $\lambda \in \operatorname{spec} A$ , а  $h$  — соответствующий  $\lambda$  собственный вектор.*

**Доказательство.** Пусть  $\varphi(t) = e^{\lambda t}h$  является нетривиальным решением системы  $\dot{r} = Ar$ . При подстановке имеем тождество

$$\lambda e^{\lambda t}h = Ae^{\lambda t}h.$$

Разделив обе части равенства на  $e^{\lambda t}$ , получаем

$$Ah = \lambda h.$$

Обратно, если верно последнее равенство, то, умножая его на  $e^{\lambda t}$ , находим: вектор-функция  $\varphi(t) = e^{\lambda t}h$  обращает систему  $\dot{r} = Ar$  в тождество.  $\square$

**Теорема 9.4.1 (случай собственного базиса).** Пусть собственные векторы  $\{h_k\}_{k=1}^n$  матрицы  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , соответствующие собственным числам  $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ , образуют базис пространства  $\mathbb{C}^n$ . Тогда вектор-функции  $\{e^{\lambda_k t}h_k\}_{k=1}^n$  образуют фундаментальную систему решений системы  $\dot{r} = Ar$ .

**Доказательство.** По лемме 9.4.1 каждая из вектор-функций  $r_k(t) = e^{\lambda_k t}h_k$  является решением. Их вронскиан

$$W(0) = \det(h_1, h_2, \dots, h_n) \neq 0.$$

Тогда по следствию 9.3.1.1 вектор-функции  $\{r_k\}_{k=1}^n$  линейно независимы. Таким образом, они образуют фундаментальную систему решений.  $\square$

**Пример 9.4.1.** Найдём общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = x - y. \end{cases}$$

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её собственные числа:  $-2$  (кратности 1) и  $1$  (кратности 2). Соответствующие им собственные векторы:  $(-1, 1, 1)^T$ ,  $(1, 1, 0)^T$ ,  $(1, 0, 1)^T$ . Тогда общее решение

$$r(t) = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

**Лемма 9.4.2.** Пусть  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $h_1, h_2, \dots, h_k$  — жорданова цепочка, соответствующая  $\lambda \in \text{spec } A$ . Тогда функции

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}h_1,$$

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda t} \left( \frac{t}{1!} h_1 + h_2 \right),$$

...

$$\varphi_k(t) = e^{\lambda t} \left( \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} h_1 + \dots + \frac{t}{1!} h_{k-1} + h_k \right)$$

являются решениями системы  $\dot{r} = Ar$ .

**Доказательство.** Принимая во внимание определение жордановой цепочки, при  $j \in [1 : k]$  имеем

$$\begin{aligned} A\varphi_j &= e^{\lambda t} \sum_{m=1}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} Ah_m = e^{\lambda t} \left( \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \lambda h_1 + \sum_{m=2}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} (\lambda h_m + h_{m-1}) \right) = \\ &= e^{\lambda t} \left( \lambda \sum_{m=1}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} h_m + \sum_{m=2}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} h_{m-1} \right). \end{aligned}$$

Это же выражение получается при дифференцировании вектор-функции  $\varphi_j$ . Значит,  $\dot{\varphi}_j = A\varphi_j$ , что и требовалось.  $\square$

**Теорема 9.4.2 (случай жорданова базиса общего вида).** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , базис пространства  $\mathbb{C}^n$  состоит из жордановых цепочек

$$\lambda_1 \sim h_1, h_2, \dots, h_k,$$

...

$$\lambda_d \sim u_1, u_2, \dots, u_m,$$

соответствующих  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \text{spec } A$ . Тогда вектор-функции

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} h_1, \dots, \varphi_k(t) = e^{\lambda_1 t} \left( \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} h_1 + \dots + \frac{t}{1!} h_{k-1} + h_k \right),$$

...

$$\psi_1(t) = e^{\lambda_d t} u_1, \dots, \psi_m(t) = e^{\lambda_d t} \left( \frac{t^{m-1}}{(l-1)!} u_1 + \dots + \frac{t}{1!} u_{m-1} + u_m \right)$$

образуют фундаментальную систему решений системы  $\dot{r} = Ar$ .

**Доказательство.** По лемме 9.4.2 каждая из вектор-функций

$$\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots, \psi_1, \dots, \psi_m$$

является решением. Их вронскиан

$$W(0) = \det(h_1, \dots, h_k, \dots, u_1, \dots, u_m) \neq 0.$$

Тогда по следствию 9.3.1.1 вектор-функции  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots, \psi_1, \dots, \psi_m\}$  линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему решений.  $\square$

**Следствие 9.4.2.1.** Пусть  $\lambda \in \text{spec } A$  имеет алгебраическую кратность  $m$  и геометрическую кратность  $s$ . Тогда система  $\dot{r} = Ar$  имеет  $m$  линейно независимых решений вида

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} Q_{m-s}(t), \quad (9.6)$$

где  $Q_{m-s}$  — вектор-многочлен степени не выше  $m-s$ .

**Доказательство.** По теореме 9.4.2 числу  $\lambda$  соответствуют  $s$  групп решения размеров  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , причём  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = m$ . Все эти решения линейно независимы и имеют вид экспоненты, умноженной на некоторый вектор-многочлен. При этом в  $j$ -ой группе степень многочленов, умножаемых на  $e^{\lambda t}$ , не превосходит  $k_j - 1$ .

Не умоляя общности, считаем  $k_1 = \max_{j \in [1:s]} k_j$ . Тогда степень многочленов  $\{Q_l\}$  не превосходит  $k_1 - 1$ . Так как

$$m = k_1 + \dots + k_s \geq k_1 + (s-1),$$

то  $k_1 - 1 \leq m - s$ , что и требовалось.  $\square$

На этом следствии основан *метод Эйлера* построения общего решения линейного однородного уравнения. Каждому собственному числу сопоставляется вектор-функция (9.6) с неопределенными коэффициентами. Они определяются подстановкой функции  $\varphi$  в систему уравнений. Среди коэффициентов всегда будет  $m$  независимых, где  $m$  — алгебраическая кратность собственного числа.

Если алгебраическая и геометрическая кратности совпадают, то метод Эйлера фактически сводится к поиску собственных векторов. Продемонстрируем данный метод на примере.

**Пример 9.4.2.** Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z, \\ \dot{y} = -z - 2x, \\ \dot{z} = y + 2x + 2z. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа  $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1$ .

Так как алгебраическая и геометрическая кратности числа  $\lambda_1$  совпадают и равны 1, то найдём собственный вектор, отвечающий  $\lambda_1$ :  $h_1 = (1, -2, 2)^T$ . Тогда соответствующие решения

$$\varphi_1(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Геометрическая кратность числа  $\lambda_{2,3}$  равна

$$s = n - \text{rank}(A - \lambda_{2,3}E) = 3 - 2 = 1.$$

Алгебраическая кратность  $m = 2$ . Поэтому многочлены в формуле (9.6) имеют степень не выше  $m - s = 2 - 1 = 1$ . Следовательно, решения, отвечающие  $\lambda_{2,3}$ , ищем в виде

$$\varphi_{2,3}(t) = e^t(at + b),$$

где  $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ . Подставляя  $\varphi_{2,3}$  в систему, находим

$$e^t(at + b) + e^ta = e^t(tAa + Ab) \iff at + (a + b) = tAa + Ab.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , получаем систему

$$\begin{cases} Aa = a, \\ Ab = a + b. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -C_2$ ,  $a_3 = C_2$ .

Подставляя во второе уравнение системы, получаем  $b_1 = C_2$ ,  $b_2 = -C_2 - C_3$ ,  $b_3 = C_3$ . Здесь  $C_2$  и  $C_3$  — произвольные параметры.

Тогда числу  $\lambda_{2,3}$  соответствуют решения вида

$$\varphi_{2,3}(t) = e^t \left( t \begin{pmatrix} 0 \\ -C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 \\ -C_2 - C_3 \\ C_3 \end{pmatrix} \right) = C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t - 1 \\ t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной системы — сумма  $\varphi_1$  и  $\varphi_{2,3}$ :

$$r(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -t - 1 \\ t \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t. \quad \triangle$$

# Тема 10: Линейные неоднородные системы. Матричная экспонента

## Содержание

---

§10.1 Линейные неоднородные системы . . . . .	88
§10.2 Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами . . . . .	90
§10.3 Матричная экспонента . . . . .	91

---

### §10.1. Линейные неоднородные системы

Установим, что общее решение линейной неоднородной системы есть сумма общего решения соответствующей однородной и некоторого частного решения исходной неоднородной системы.

**Теорема 10.1.1 (общее решение ЛС).** Пусть  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi$  — решение системы

$$\dot{r} = P(t)r + q(t), \quad (10.1)$$

$\Phi$  — фундаментальная матрица системы

$$\dot{r} = P(t)r.$$

Тогда общее решение неоднородной системы (10.1) имеет вид

$$r = \Phi C + \varphi, \quad C \in \mathbb{R}^n.$$

**Доказательство.** Пусть  $r$  — произвольное решение (10.1). Тогда

$$\dot{r} = Pr + q.$$

Функция  $\varphi$  удовлетворяет такому же соотношению:

$$\dot{\varphi} = P\varphi + q.$$

Вычитая эти равенства, находим

$$(r - \varphi)' = P(r - \varphi).$$

Значит, найдётся вектор-столбец  $C \in \mathbb{R}^n$ , такой что

$$r - \varphi = \Phi C.$$

Верно и обратное: любая функция вида  $\Phi C + \varphi$  является решением (10.1), что проверяется непосредственной подстановкой.  $\square$

**Упражнение 10.1.1 (принцип суперпозиции).** Докажите, что если  $\varphi_1$  — решение системы  $\dot{r} = P(t)r + q_1(t)$ ,  $\varphi_2$  — решение системы  $\dot{r} = P(t)r + q_2(t)$ , то  $\varphi_1 + \varphi_2$  — решение системы  $\dot{r} = P(t)r + q_1(t) + q_2(t)$ .

Если известна фундаментальная матрица однородной системы, то общее решение неоднородной системы может быть найдено методом вариации постоянных.

**Теорема 10.1.2 (метод вариации постоянных для ЛС).** Пусть  $\Phi$  — фундаментальная матрица системы  $\dot{r} = P(t)r$ ,  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ . Тогда если вектор-функция  $C$  пробегает все решения системы

$$\Phi \dot{C} = q,$$

то  $r = \Phi C$  пробегает все решения системы (10.1).

**Доказательство.** Опираясь на формулу для обратной матрицы, использующей алгебраические дополнения, заключаем, что  $\Phi^{-1} \in M_n(C(a, b))$ . Поэтому

$$C(t) = \int \Phi^{-1} q + A,$$

где  $A$  — вектор произвольных постоянных. Тогда требуется доказать, что общее решение системы (10.1) имеет вид

$$r = \Phi A + \Phi \int \Phi^{-1} q.$$

По теореме 10.1.1 достаточно показать, что второе слагаемое в правой части — частное решение системы (10.1). Убедимся в этом подстановкой:

$$\dot{\Phi} \int \Phi^{-1} q + \Phi \Phi^{-1} q = P(t) \Phi \int \Phi^{-1} q + q.$$

Это верное тождество, поскольку  $P(t)\Phi = \dot{\Phi}$ . □

**Пример 10.1.1.** Найдём общее решение системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \frac{1}{\sin t}.$$

Матрица

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

является фундаментальной для однородной системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$$

Общее решение ищем в виде  $r = \Phi(t)C(t)$ , где  $C$  удовлетворяет системе

$$\Phi \dot{C} = q.$$

Отсюда

$$\dot{C} = \Phi^{-1}q = \begin{pmatrix} -1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(t) = -t + A_1, \quad C_2(t) = \ln \sin t + A_2.$$

Поэтому общее решение исходной системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t)C(t) = A_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \cdot \ln \sin t - t \cos t \\ \cos t \cdot \ln \sin t + t \sin t \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

## §10.2. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами

Для поиска частного решения неоднородной системы с постоянными коэффициентами применим метод вариации постоянных. В случае, когда вектор-функция  $q$  в системе (9.5) является вектор-квазимногочленом, частное решение можно искать методом неопределённых коэффициентов.

**Теорема 10.2.1 (метод неопределённых коэффициентов для ЛС).** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $a_j \in \mathbb{C}^n$  при  $j \in [0 : k]$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$ ,

$$p_k(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_1 t + a_0.$$

Тогда вектор-функция  $e^{\gamma t}q_{k+s}(t)$  является решением системы

$$\dot{r} = Ar + e^{\gamma t}p_k(t),$$

где  $q_{k+s}$  — вектор-многочлен степени не выше  $k+s$ ,

- если  $\gamma \notin \operatorname{spec} A$ , то  $s = 0$ ;
- если  $\gamma \in \operatorname{spec} A$ , то  $s$  — максимальный размер жордановых клеток, соответствующих  $\gamma$ .

**Доказательство.** Пусть  $T$  — матрица перехода к жорданову базису матрицы  $A$ ,  $J$  — жорданова форма матрицы  $A$ . То есть

$$A = TJT^{-1}.$$

Положим  $y := T^{-1}r$ . Умножая обе части исходного уравнения слева на  $T^{-1}$ , имеем

$$\dot{y} = Jy + e^{\gamma t}T^{-1}p_k(t).$$

Рассмотрим те уравнения получившейся системы, которые отвечают одной жордановой клетке размера  $l$ , соответствующей собственному числу  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 + u_1(t)e^{\gamma t}, \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3 + u_2(t)e^{\gamma t}, \\ \dots \\ \dot{y}_l = \lambda y_l + u_l(t)e^{\gamma t}. \end{cases}$$

Пусть  $\gamma \neq \lambda$ , тогда частным решением последнего уравнения этой системы будет функция  $y_l = v_l(t)e^{\gamma t}$ , где  $v_l$  — многочлен той же степени, что и  $u_l$  (в этом можно убедиться, решая уравнение методом вариации постоянной). Подставляя функцию  $y_l$  в предпоследнее уравнение, получаем аналогичное выражение для  $y_{l-1}$ . Таким же образом решаются и все оставшиеся уравнения системы.

Если  $\gamma = \lambda$ , то частным решением последнего уравнения будет функция  $y_l = v_l(t)e^{\gamma t}$ , где  $v$  — многочлен степени на единицу большей, чем  $u_l$ . Для каждого последующего уравнения степень соответствующего многочлена будет увеличиваться на единицу по сравнению с многочленом, оказавшимся в правой части. Тогда  $y_1 = v_1(t)e^{\gamma t}$ , где  $v_1$  — многочлен степени не выше  $k+l$  (многочлен  $u_l$  мог иметь степень меньше, чем  $k$ ).

Отсюда получаем, что если  $\gamma \notin \text{spec } A$ , то  $y(t) = e^{\gamma t}v(t)$ , где  $v$  — вектор-многочлен степени не выше  $k$ . Если же  $\gamma \in \text{spec } A$ , то порядок вектор-многочлена  $v$  не превзойдёт  $k+s$ , где  $s$  — максимальный размер среди всех жордановых клеток, отвечающих собственному числу  $\lambda$ .

Остаётся выполнить обратную замену по формуле  $r = Ty$ . □

### §10.3. Матричная экспонента

**Определение.** *Матричной экспонентой* называется сумма ряда

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

**Теорема 10.3.1 (свойства матричной экспоненты).** *Пусть  $A, B, J, T \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\det T \neq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда*

- (i) *ряд, определяющий  $e^A$ , сходится;*
- (ii) *если  $AB = BA$ , то  $e^{A+B} = e^A e^B$ ;*
- (iii)  *$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$ ;*
- (iv) *если  $A = T J T^{-1}$ , то  $e^A = T e^J T^{-1}$ ;*
- (v) *если  $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_d)$ , то  $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, e^{A_2}, \dots, e^{A_d})$ ;*

(vi) если  $J_s(\lambda)$  — якорданова клетка размера  $s$ :

$$J_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

то

$$e^{J_s(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** (i) Сходимость ряда для экспоненты следует из сходимости ряда, составленного из норм его слагаемых, и полноты пространства  $M_n(\mathbb{C})$ .

(ii) Перестановочность матриц  $A$  и  $B$  позволяет записать частную сумму ряда  $e^{A+B}$  в виде

$$S_{2N} := \sum_{i=0}^{2N} \frac{(A+B)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{2N} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i C_i^j A^j B^{i-j} = \sum_{i=0}^{2N} \sum_{j=0}^i \frac{A^j}{j!} \frac{B^{i-j}}{(i-j)!}.$$

Перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$S_{2N} = \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \frac{A^k}{k!} \frac{B^m}{m!} + \sum_{(k,m) \in I} \frac{A^k}{k!} \frac{B^m}{m!} = \left( \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right) \left( \sum_{m=0}^N \frac{B^m}{m!} \right) + R_N,$$

где  $I$  — множество пар, не попадающих в квадрат  $[0 : N]^2$  (рис. 10.1).

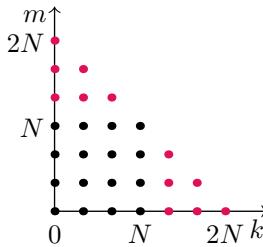


Рис. 10.1. Красные точки составляют множество  $I$

Таким образом, остаётся доказать, что  $R_N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Учитывая лемму 7.1.2, при  $(k, m) \in I$  имеем

$$\frac{|A^k B^m|}{k! m!} \leq n^{k-1+m-1} |A|^k |B|^m \frac{1}{k! m!} \leq n^{4N-2} (|A| |B|)^{2N} \frac{1}{N!} = \frac{1}{n^2} \frac{M^N}{N!},$$

где  $M = (n^2|A||B|)^2$ . Тогда

$$|R_N| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{(k,m) \in I} \frac{M^N}{N!} = \frac{1}{n^2} (N^2 + N) \frac{M^N}{N!} \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow \infty$ , что и требовалось.

(iii) По определению производной

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{A(\Delta t+t)} - e^{At}}{\Delta t}.$$

Рассмотрим числитель:

$$e^{A(\Delta t+t)} - e^{At} = e^{A\Delta t} e^{At} - e^{At} = (e^{A\Delta t} - E) e^{At} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A\Delta t)^k}{k!} \right) e^{At}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( A + \Delta t \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k (\Delta t)^{k-2}}{k!} \right) e^{At} = A e^{At}.$$

(iv) Поскольку  $A^k = T J^k T^{-1}$ , то

$$\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = T \left( \sum_{k=0}^N \frac{J^k}{k!} \right) T^{-1}.$$

Переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , получаем требуемое.

(v) Так как  $A^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_d^k)$ , то

$$\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = \text{diag} \left( \sum_{k=0}^N \frac{A_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^N \frac{A_d^k}{k!} \right).$$

Переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , получаем требуемое.

(vi) Матрица  $J_s(\lambda)$  представима как  $\lambda E + N$ , где

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрицы  $E$  и  $N$  коммутируют, то

$$e^{J_s(\lambda)t} = e^{\lambda t E} e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt}.$$

Заметим, что  $N^k$  — матрица, полученная из единичной сдвигом диагонали на  $k$  единиц вправо,  $N^k = 0$  при  $k \geq s$ . Поэтому

$$e^{Nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Nt)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{t^k}{k!} N^k.$$

Отсюда непосредственно следует требуемая формула.  $\square$

**Пример 10.3.1.** Вычислим матричную экспоненту  $e^{At}$  для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A$  имеет двукратное собственное значение  $\lambda = 3$ . Вектор  $h_1 = (2, 1)^T$  является собственным, а  $h_2 = (-1, 0)^T$  — присоединённым. Матрица перехода к жорданову базису и её обратная:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда жорданова форма матрицы  $A$  имеет вид

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = Te^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

**Теорема 10.3.2.** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Тогда матрица  $e^{At}$  является фундаментальной матрицей системы  $\dot{r} = Ar$ .

**Доказательство.** По теореме 10.3.1 будет  $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ . Следовательно, каждый столбец матрицы  $e^{At}$  — решение системы  $\dot{r} = Ar$ . Соответствующий вронсиан

$$W(0) = \det e^{A \cdot 0} = \det E_n = 1,$$

где  $E_n$  — единичная матрица порядка  $n$ . Отсюда следует, что  $e^{At}$  — фундаментальная матрица.  $\square$

**Следствие 10.3.2.1.** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $r_0 \in \mathbb{C}^n$ . Тогда решением задачи

$$\dot{r} = Ar, \quad r(t_0) = r_0$$

является вектор-функция  $\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}r_0$ .

**Пример 10.3.2.** Решим задачу Коши для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = -x + 5y, \end{cases}$$

с начальным условием  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$ .

В примере 10.3.1 вычислена матричная экспонента

$$e^{At} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 - 2t & 4t \\ -t & 1 + 2t \end{pmatrix},$$

где  $A$  — матрица данной системы уравнений. Используя следствие 10.3.2.1, получаем решение задачи Коши

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 1 + t \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

**Замечание.** Матричную экспоненту целесообразно применять при решении задачи Коши. Однако, при поиске общего решения лучше использовать теорему 9.4.2 или метод Эйлера, поскольку это требует меньше вычислительных затрат. Действительно, при нахождении матричной экспоненты требуется вычислить обратную матрицу  $T^{-1}$  для матрицы перехода  $T$  к жорданову базису матрицы  $A$ :

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}.$$

По лемме 9.3.1 матрица  $Te^{Jt}$  тоже фундаментальная, её достаточно для описания общего решения. Но матрица  $Te^{Jt}$  — фундаментальная матрица, приведённая в теореме 9.4.2.

# Тема 11: Линейные уравнения

## Содержание

---

§11.1 Линейные уравнения	96
§11.2 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	100
11.2.1 Однородное уравнение	100
11.2.2 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами	102

---

### §11.1. Линейные уравнения

**Определение.** *Линейным дифференциальным уравнением* порядка  $n$  называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = q(t), \quad (11.1)$$

где  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q \in C(a, b)$ .

**Определение.** Если  $q \equiv 0$  на  $(a, b)$ , то уравнение (11.1), то есть

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = 0, \quad (11.2)$$

называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

**Лемма 11.1.1 (о равносильной ЛС).** *Если функция  $y$  — решение уравнения (11.1) на  $(a, b)$ , то вектор-функция  $\Lambda_n y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$  — решение системы*

$$\dot{r} = P(t)r + Q(t), \quad (11.3)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

*И наоборот, если  $r = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  — решение системы (11.3), то  $y_1$  — решение (11.1) на  $(a, b)$  и  $r = \Lambda_n y_1$ .*

**Доказательство.** Следует из леммы 6.2.1. □

**Теорема 11.1.1 (существование и единственность максимального решения ЛУ).** Пусть  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q \in C(a, b)$ ,  $t_0 \in (a, b)$ ,  $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{C}$ . Тогда максимальное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_0(t)y = q(t), \\ y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (11.4)$$

существует, единственно и определено на интервале  $(a, b)$ .

**Доказательство.** По теореме 9.2.1 задача Коши для системы (11.3) с начальными условиями  $y_1(t_0) = y_0$ ,  $y_2(t_0) = \dot{y}_0$ ,  $\dots$ ,  $y_n(t_0) = y_0^{(n-1)}$  имеет единственное максимальное решение  $r = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , определённое на  $(a, b)$ . По лемме 11.1.1 функция  $y_1$  — решение исходной задачи Коши (11.4) на  $(a, b)$ .

Не существует другого решения задачи (11.4) (в том числе и определённого на большем интервале), так как иначе по той же лемме 11.1.1 нашлось бы ещё одно решение задачи Коши для системы (11.3), что противоречит теореме 9.2.1.  $\square$

**Замечание.** В дальнейшем под решением линейного уравнения понимается максимальное решение.

**Теорема 11.1.2 (об изоморфизме).** Пусть  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \in C(a, b)$ . Тогда множество решений однородного уравнения (11.2) является линейным пространством, изоморфным пространству решений системы

$$\dot{y} = P(t)y, \quad (11.5)$$

где матрица  $P$  та же, что и в (11.3). При этом изоморфизм устанавливается отображением  $\Lambda_n$ .

**Доказательство.** Любое решение уравнения (11.2) по теореме 11.1.1 является элементом линейного пространства  $C^n(a, b)$ . Кроме того, сумма двух решений, а также решение, умноженное на произвольное число, также являются решениями. Поэтому множество всех решений само образует линейное пространство.

Лемма 11.1.1 устанавливает биекцию между решениями уравнения и равносильной системы. Отображение  $\Lambda_n$  линейно. Таким образом,  $\Lambda_n$  — изоморфизм.  $\square$

**Следствие 11.1.2.1.** Пусть  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \in C(a, b)$ . Тогда множество решений уравнения (11.2) образует  $n$ -мерное линейное пространство.

**Доказательство.** По теореме 11.1.2 пространства решений уравнения (11.2) и системы (11.5) изоморфны, значит, они имеют одинаковую размерность.  $\square$

**Определение.** *Фундаментальной системой решений* однородного уравнения (11.2) называется совокупность из  $n$  его линейно независимых решений.

**Определение.** *Определителем Вронского* (или *вронскианом*) функций  $y_1, y_2, \dots, y_n \in C^{n-1}(a, b)$  называют

$$W(t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

**Теорема 11.1.3 (свойства вронскиана решений ЛОУ).** Пусть  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — решения уравнения (11.2). Тогда следующие утверждения равносильны:

- (a)  $W(t_0) = 0$  в некоторой точке  $t_0 \in (a, b)$ ;
- (б)  $W \equiv 0$  на  $(a, b)$ ;
- (в)  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно зависимы на  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Так как вронскиан функций  $\{y_k\}_{k=1}^n$  совпадает с вронскианом вектор-функций  $\{\Lambda y_k\}_{k=1}^n$ , то для доказательства достаточно принять во внимание теорему 9.3.1.  $\square$

**Следствие 11.1.3.1 (критерий линейной независимости решений ЛОУ).** Пусть  $\{y_k\}_{k=1}^n$  — решения уравнения (11.2),  $W$  — вронскиан этого набора. Тогда

- набор  $\{y_k\}_{k=1}^n$  линейно зависим, если и только если  $W(t_0) = 0$  для некоторого  $t_0 \in (a, b)$ ;
- набор  $\{y_k\}_{k=1}^n$  линейно независим, если и только если  $W(t_0) \neq 0$  для некоторого  $t_0 \in (a, b)$ .

**Теорема 11.1.4 (формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОУ).** Пусть  $t, t_0 \in (a, b)$ ,  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \in C(a, b)$ ,  $\{y_k\}_{k=1}^n$  — решения линейного однородного уравнения (11.2). Тогда вронскиан этих решений

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t (-p_{n-1}(\tau)) d\tau.$$

**Доказательство.** Принимая во внимание теорему 9.3.2 и лемму 11.1.1, находим

$$\begin{aligned} W(y_1, \dots, y_n) &= W(\Lambda y_1, \dots, \Lambda y_n) \\ &= W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \operatorname{tr} P(\tau) d\tau = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t (-p_{n-1}(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad \square$$

**Теорема 11.1.5 (общее решение ЛУ).** Пусть  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q \in C(a, b)$ ,  $\varphi$  — решение уравнения (11.1),  $\{y_k\}_{k=1}^n$  — фундаментальная система решений уравнения (11.2). Тогда общее решение уравнения (11.1) имеет вид

$$y = \sum_{k=1}^n C_k y_k + \varphi,$$

где  $\{C_k\}_{k=1}^n$  — произвольные постоянные.

**Доказательство.** По теореме 11.1.2 вектор-функции  $\{\Lambda y_k\}_{k=1}^n$  образуют базис в пространстве решений однородной системы (11.5). В силу леммы 11.1.1 вектор-функция  $\Lambda \varphi$  — решение неоднородной системы (11.3). По теореме 10.1.1

$$r = \sum_{k=1}^n C_k \Lambda y_k + \Lambda \varphi$$

— общее решение системы (11.3). По лемме 11.1.1 первая компонента правой части даёт формулу общего решения уравнения (11.1).  $\square$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения может быть использован метод вариации постоянных.

**Теорема 11.1.6 (метод вариации постоянных для ЛУ).** Пусть  $\{y_k\}_{k=1}^n$  — фундаментальная система решений однородного уравнения (11.2). Тогда если функции  $\{C_k\}$  пробегают все решения системы

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dots & \dot{y}_n \\ \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \\ \dots \\ \dot{C}_{n-1} \\ \dot{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$

то  $y = \sum_{k=1}^n C_k y_k$  пробегает все решения уравнения (11.1).

**Доказательство.** По теореме 10.1.2 общее решение системы, равносильной уравнению (11.1), имеет вид

$$r = \sum_{k=1}^n C_k \Lambda y_k,$$

где функции  $C_1, \dots, C_n$  удовлетворяют системе

$$(\Lambda y_1, \dots, \Lambda y_n) \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dots \\ \dot{C}_{n-1} \\ \dot{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

По лемме 11.1.1 первая строка вектора  $r$  — общее решение уравнения (11.1).  $\square$

**Упражнение 11.1.1.** (принцип суперпозиции) Докажите, что если  $y_1$  — решение уравнения (11.1) с правой частью  $f = f_1$ , а  $y_2$  — решение того же уравнения с правой частью  $f = f_2$ , то  $y_1 + y_2$  — решение того же уравнения с правой частью  $f = f_1 + f_2$ .

## §11.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

**Определение.** Линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами называют уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = f(t), \quad (11.6)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ ,  $f \in C(a, b)$ .

В дальнейшем для краткости используется обозначение

$$Ly := \frac{d^n}{dt^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \dots + a_1\frac{d}{dt}y + a_0y = \left( \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} \right) y,$$

где  $a_n = 1$ . При помощи оператора  $L$  уравнение (11.6) записывается в виде

$$Ly = f(t).$$

### 11.2.1. Однородное уравнение

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Ly = 0. \quad (11.7)$$

Применяя оператор  $L$  к функции  $e^{\lambda t}$ , находим

$$L(e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t}.$$

**Определение.** Многочлен

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

называется **характеристическим многочленом** уравнения (11.6), а его корни — **характеристическими числами** уравнения (11.6).

Если  $\lambda$  — корень характеристического многочлена, то получаем  $L(e^{\lambda t}) \equiv 0$ . Верно и обратное: если  $e^{\lambda t}$  — решение однородного уравнения (11.7), то  $\lambda$  — корень многочлена  $p$ . Докажем более общее утверждение.

**Лемма 11.2.1.** Пусть  $\lambda \in \mathbb{C}$  — корень кратности  $m \in \mathbb{N}$  характеристического многочлена уравнения (11.7). Тогда функции

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$$

являются решениями (11.7).

**Доказательство.** Убедимся подстановкой в уравнение (11.7), что указанные функции являются решениями.

Пусть  $k \in [0 : m - 1]$ . Считая  $\lambda$  переменной, в силу бесконечной дифференцируемости функции  $e^{\lambda t}$  при любом  $j \in \mathbb{Z}_+$  будет

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda t} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \frac{\partial^j}{\partial t^j} e^{\lambda t}.$$

Тогда

$$L(t^k e^{\lambda t}) = L\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} L(e^{\lambda t}).$$

Применяя формулу Лейбница, имеем

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} L(e^{\lambda t}) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (p(\lambda) e^{\lambda t}) = \sum_{j=0}^k C_k^j p^{(j)}(\lambda) \frac{\partial^{k-j}}{\partial \lambda^{k-j}} e^{\lambda t}.$$

Подставляя вместо  $\lambda$  корень кратности  $m$  многочлена  $p$ , получаем ноль, поскольку при  $j \in [0 : k]$  обнуляются значения  $p^{(j)}(\lambda)$ .  $\square$

**Лемма 11.2.2 (линейная независимость квазиодночленов).** Пусть  $k_j \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  при  $j \in [1 : n]$ ,  $\{(k_j, \lambda_j)\}_{j=1}^n$  — различные пары чисел. Тогда функции  $\{t^{k_j} e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^n$  линейно независимы на любом промежутке из  $\mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Разобьём множество пар  $(k_1, \lambda_1), \dots, (k_n, \lambda_n)$  на группы с одинаковым вторым элементом. Если такая группа одна, то линейная независимость указанных функций следует из линейной независимости одночленов.

Допустим, что линейная независимость доказана, если количество групп равно  $m$ . Предположим, что в случае  $m+1$  группы некоторая нетривиальная линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю. Объединяя слагаемые с одинаковыми экспонентами и изменяя нумерацию чисел  $\lambda_i$ , имеем

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + p_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + p_{m+1}(t)e^{\lambda_{m+1} t} \equiv 0,$$

где  $p_i$  — многочлены, а числа  $\lambda_i$  различны. Деля обе части на  $e^{\lambda_{m+1} t}$ , получаем

$$p_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_{m+1})t} + p_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_{m+1})t} + \dots + p_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_{m+1})t} + p_{m+1}(t) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество  $\deg p_{m+1} + 1$  раз, находим

$$q_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_{m+1})t} + q_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_{m+1})t} + \dots + q_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_{m+1})t} \equiv 0, \quad (11.8)$$

где при всех  $i \in [1 : m]$  многочлен  $q_i$  имеет ту же степень, что и  $p_i$ .

Значит, если для некоторого  $i$  будет  $p_i \not\equiv 0$ , то и  $q_i \not\equiv 0$ . Следовательно, в левой части тождества (11.8) находится нетривиальная линейная комбинация квазиодночленов. Это противоречит индукционному предположению.  $\square$

**Теорема 11.2.1 (общее решение ЛОУ с постоянными коэффициентами).** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$  — характеристические числа уравнения (11.7) кратностей  $m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ . Тогда функции

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ \dots \\ e^{\lambda_s t}, te^{\lambda_s t}, \dots, t^{m_s-1}e^{\lambda_s t} \end{aligned} \tag{11.9}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (11.7).

**Доказательство.** По лемме 11.2.1 указанные функции являются решениями (11.7), а по лемме 11.2.2 они линейно независимы. Так как сумма всех кратностей равна порядку уравнения, то эти функции образуют фундаментальную систему решений.  $\square$

**Замечание.** Пусть  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  — фундаментальная система решений уравнения (11.7), и  $y_1 = \bar{y}_2$ . Тогда, опираясь на теорему 11.1.2 и лемму об овеществлении 9.3.2, получаем, что  $\{\operatorname{Re} y_1, \operatorname{Im} y_1, y_3, \dots, y_n\}$  — фундаментальная система того же уравнения.

Если коэффициенты уравнения (11.7) вещественны, то функции из набора (11.9), соответствующие комплексным корням, разбиваются на комплексно-сопряжённые пары. Заменяя каждую пару функций

$$t^k e^{(a+ib)t}, \quad t^k e^{(a-ib)t}$$

на пару

$$t^k e^{at} \cos bt, \quad t^k e^{at} \sin bt,$$

получаем вещественный базис в пространстве решений.

### 11.2.2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Для поиска частного решения неоднородного уравнения (11.6) в случае, когда правая часть является квазимногочленом, можно воспользоваться методом неопределённых коэффициентов. Чтобы обосновать его, докажем предварительно формулу, которая позволяет упростить вычисление производной квазимногочлена. В дальнейшем  $D := \frac{d}{dt}$ .

**Лемма 11.2.3 (формула сдвига).** Пусть  $p$  — многочлен степени  $n$ , функция  $f$  дифференцируема  $n$  раз,  $\gamma \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$p(D)(f(t)e^{\gamma t}) = e^{\gamma t}p(D + \gamma)f(t).$$

**Доказательство.** Сначала докажем формулу для одночленов  $p(\lambda) = \lambda^k$ . При  $k = 0$  формула очевидна. Допустим она доказана при некотором  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда

$$\begin{aligned} D^{k+1}(fe^{\gamma t}) &= D^k(Df \cdot e^{\gamma t} + f\gamma e^{\gamma t}) = D^k(e^{\gamma t}(D + \gamma)f) \\ &= e^{\gamma t}(D + \gamma)^k(D + \gamma)f = e^{\gamma t}(D + \gamma)^{k+1}f. \end{aligned}$$

Тогда для многочлена общего вида получаем

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k D^k \right) (fe^{\gamma t}) = \sum_{k=0}^n a_k e^{\gamma t}(D + \gamma)^k f = e^{\gamma t}p(D + \gamma)f. \quad \square$$

**Теорема 11.2.2 (метод неопределённых коэффициентов для ЛУ).** Пусть правая часть уравнения (11.6) — квазимногочлен

$$f(t) = p_k(t)e^{\gamma t},$$

где  $\gamma \in \mathbb{C}$ ,  $p_k$  — многочлен степени  $k$ . Тогда уравнение (11.6) имеет единственное частное решение вида

$$\varphi(t) = t^m q_k(t)e^{\gamma t},$$

где  $q_k$  — многочлен степени  $k$ , при этом

- если  $\gamma$  не характеристическое число, то  $m = 0$ ;
- если  $\gamma$  — характеристическое число, то  $m$  — его кратность.

**Доказательство.** Пусть  $q$  — некоторый многочлен. Подставим  $y = q(t)e^{\gamma t}$  в уравнение (11.6), для которого  $p$  — характеристический многочлен. По лемме 11.2.3 имеем

$$e^{\gamma t}p(D + \gamma)q = p_k e^{\gamma t} \iff p(D + \gamma)q = p_k. \quad (11.10)$$

Оператор  $p(D + \gamma)$  отображает множество многочленов степени  $n$  в себя. Если  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  — корни многочлена  $p$ , то

$$p(D + \gamma) = \prod_{i=1}^n (D + \gamma - \lambda_i).$$

Отсюда видно, что если  $\gamma$  — не характеристическое число, то многочлен  $p(D + \gamma)$  имеет ненулевой свободный член, поэтому  $\deg p(D + \gamma)q = \deg q$ . Следовательно, ядро оператора  $p(D + \gamma)$  содержит лишь ноль. Поэтому  $p(D + \gamma)$  — изоморфизм, а тогда существует и при том единственный многочлен  $q$ , для которого верно соотношение (11.10).

Если  $\gamma$  — характеристическое число кратности  $m$ , то

$$p(D + \gamma) = \tilde{p}(D + \gamma)D^m,$$

при этом  $\tilde{p}(\gamma) \neq 0$ . Тогда, рассуждая аналогично, заключаем, что  $\tilde{p}(D + \gamma)$  — изоморфизм пространства многочленов степени не выше  $n - m$ . Поэтому (11.10) равносильно

$$D^m q = (\tilde{p}(D + \gamma))^{-1} p_k.$$

Интегрируя многочлен в правой части  $m$  раз, найдём  $q$ . Выбирая каждый раз при интегрировании константы равными нулю, получим единственный многочлен вида  $t^m q_k(t)$ , для которого верно (11.10).  $\square$

**Упражнение 11.2.1.** (*метод комплексных амплитуд*) Пусть коэффициенты оператора  $L$  вещественны. Докажите, что если  $z$  — решение уравнения  $Lz = f(t)$ , то  $\operatorname{Re} z$  и  $\operatorname{Im} z$  — решения уравнений  $Ly = \operatorname{Re} f(t)$  и  $Ly = \operatorname{Im} f(t)$  соответственно.

# Тема 12: Теория устойчивости

## Содержание

§12.1 Понятие устойчивости . . . . .	105
§12.2 Устойчивость линейной системы . . . . .	108

### §12.1. Понятие устойчивости

Рассмотрим скалярное автономное уравнение

$$\dot{x} = \lambda x.$$

Его общее решение имеет вид  $x = x_0 e^{\lambda t}$ , где  $x_0 = x(0)$ . При любом значении параметра  $\lambda$  уравнение имеет решение  $x \equiv 0$ . Ему соответствует точка покоя в начале координат на фазовой прямой — оси  $Ox$ . Проследим, как ведут себя другие решения с близкими начальными условиями в зависимости от  $\lambda$  (рис. 12.1).

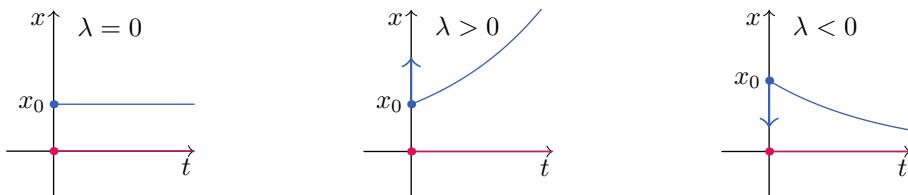


Рис. 12.1. Решения уравнения  $\dot{x} = \lambda x$

Если  $\lambda = 0$ , то любое решение — это константа, равная начальному значению. Таким образом, вся фазовая прямая состоит из точек покоя. В этом случае говорят, что решение, тождественно равное нулю, устойчиво. Другими словами, если немного изменить начальное значение, то решение сильно не изменится.

Если  $\lambda > 0$ , то при  $x_0 > 0$  решение неограниченно возрастает. Значит, точка на фазовой прямой удаляется от точки покоя, уходя в бесконечность. Аналогично поведение решения и при  $x_0 < 0$ . Говорят, что нулевое решение неустойчиво, поскольку даже очень незначительное отклонение от нуля в начальный момент времени влечёт за собой большое отклонение в будущем.

При  $\lambda < 0$  решение монотонно стремится к нулю. Соответствующая фазовая точка стремится к положению равновесия. В этом случае решение не просто устойчиво, а асимптотически устойчиво: если отойти от нуля, то фазовая точка не просто останется вблизи точки покоя, а будет притягиваться к ней.

Начальные данные для уравнения или системы уравнений обычно являются результатами каких-то измерений. Следовательно, они известны не точно, а с

некоторой погрешностью. Если сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то найденное решение не может считаться удовлетворительным в смысле описания явления. Поэтому важно знать условия, при которых малое изменение начальных данных влечёт малое изменение решения.

Перейдём к формальным определениям. В дальнейшем через  $r(t, t_0, r_0)$  обозначается решение задачи Коши с начальным условием  $r(t_0) = r_0$ , а через  $r(t, r_0)$  — решение задачи Коши с начальным условием  $r(0) = r_0$ .

**Определение.** Положение равновесия  $r = 0$  автономной системы  $\dot{r} = f(r)$  называется *устойчивым (по Ляпунову)*, если для любой  $\varepsilon$ -окрестности нуля найдётся такая  $\delta$ -окрестность нуля, что любое решение, выходящее из этой  $\delta$ -окрестности, во все будущие моменты времени отличается от нуля менее, чем на  $\varepsilon$  (рис. 12.2). То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |r_0| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0 |r(t, r_0)| < \varepsilon.$$

В противном случае положение равновесия называется *неустойчивым*.

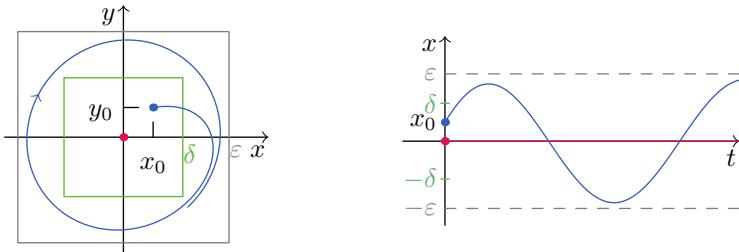


Рис. 12.2. Устойчивое положение равновесия

**Определение.** Положение равновесия  $r = 0$  автономной системы  $\dot{r} = f(r)$  называется *асимптотически устойчивым* (рис. 12.3), если

- $r = 0$  устойчиво;
- все решения, начинающиеся в некоторой окрестности нуля, в будущем стремятся к нулю, то есть

$$\exists \delta > 0: |r_0| < \delta \Rightarrow r(t, r_0) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

**Пример 12.1.1.** Опираясь на приведённые определения, исследуем на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = -2x.$$

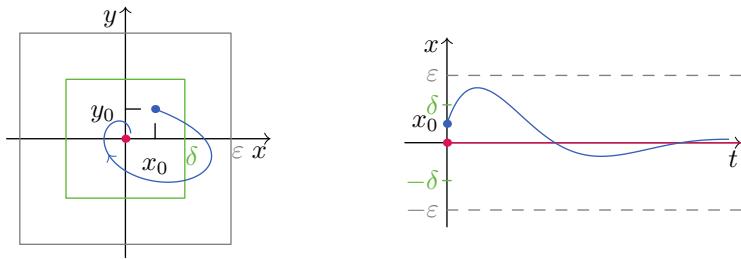


Рис. 12.3. Асимптотически устойчивое положение равновесия

Его общее решение  $x = Ce^{-2t}$ . Зафиксируем некоторое  $\varepsilon > 0$  и положим  $\delta = \varepsilon$ ,  $U_\delta$  —  $\delta$ -окрестность нуля. Тогда для любого начального значения  $x_0 \in U_\delta$  имеем решение  $x(t, x_0) = x_0 e^{-2t}$ . Оно определено при всех  $t \geq 0$ , и при этом

$$|x(t, x_0)| = |x_0 e^{-2t}| \leq |x_0| < \varepsilon.$$

Значит, нулевое решение устойчиво.

Кроме того, оно асимптотически устойчиво. В качестве  $\delta$ , участвующего в определении асимптотической устойчивости, можно выбрать любое число.  $\triangle$

Понятие устойчивости нулевого положения равновесия при помощи замены системы координат переносится на произвольное положение равновесия и произвольный начальный момент времени. Однако, значение начального момента времени несущественно для автономных систем, поскольку для любого решения автономной системы верно  $r(t + t_0, t_0, r_0) = r(t, r_0)$ . Можно, кроме того, определить устойчивость не только положения равновесия, но и других решений. Общее определение таково.

**Определение.** Решение  $\varphi$  на  $[t_0, +\infty)$  системы  $\dot{r} = f(t, r)$  называется *устойчивым (по Ляпунову)*, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдётся такая  $\delta$ -окрестность значения  $\varphi(t_0)$ , что любое решение, выходящее из этой  $\delta$ -окрестности при  $t = t_0$ , во все будущие моменты времени отличается от  $\varphi$  менее, чем на  $\varepsilon$  (рис. 12.4). То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |r_0 - \varphi(t_0)| < \delta \Rightarrow \forall t \in [t_0, +\infty) |r(t, t_0, r_0) - \varphi(t)| < \varepsilon. \quad (12.1)$$

Таким образом, решение  $\varphi$  устойчиво, если близкие к нему по начальным условиям решения остаются близкими и в будущем.

**Определение.** Если решение  $\varphi$  устойчиво и  $r(t, t_0, r_0) - \varphi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  для всех  $r_0$  из некоторой окрестности  $\varphi(t_0)$ , то решение  $\varphi$  *асимптотически устойчиво*.

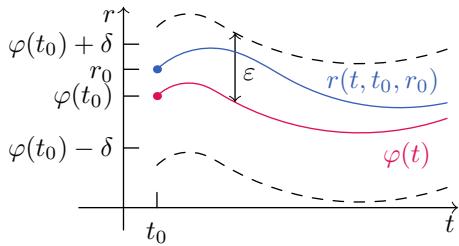


Рис. 12.4. Устойчивое решение

**Замечание.** Используя равномерную норму  $\|\cdot\|_{C[t_0, +\infty)}$ , выражение (12.1) можно заменить равносильным ему:

$$\lim_{r_0 \rightarrow \varphi(t_0)} \|r(\cdot, t_0, r_0) - \varphi\|_{C[t_0, +\infty)} = 0.$$

Исследование устойчивости решения  $\varphi$  всегда можно свести к исследованию нулевого решения другой системы.

**Лемма 12.1.1.** Пусть  $\varphi$  — решение системы  $\dot{r} = f(t, r)$ . Тогда  $\varphi$  устойчиво (асимптотически устойчиво), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) решение  $s = 0$  системы

$$\dot{s} = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi).$$

**Доказательство.** Положим  $s = r - \varphi$ . Пусть  $\dot{r} = f(t, r)$ , тогда

$$\dot{s} = \dot{r} - \dot{\varphi} = f(t, r) - f(t, \varphi) = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi).$$

Получаем, что  $s = 0$  — решение системы  $\dot{s} = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi)$ . Остается сопоставить определение устойчивости (асимптотической устойчивости) для решения  $\varphi$  исходной и решения  $s = 0$  новой системы.  $\square$

В случае, когда известно общее решение в элементарных функциях, вопрос об устойчивости можно разрешить непосредственной проверкой определения. Однако, найти явные выражения для решений удаётся далеко не всегда. Поэтому возникает необходимость построения общей теории, которая позволяла бы судить об устойчивости решения только по аналитической структуре правой части системы.

## §12.2. Устойчивость линейной системы

Из леммы 12.1.1 следует, что решение  $\varphi$  линейной системы

$$\dot{r} = P(t)r + q(t)$$

устойчиво (асимптотически устойчиво), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) решение  $r = 0$  соответствующей линейной однородной системы

$$\dot{r} = P(t)r.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что все решения линейной системы имеют одинаковый характер устойчивости, поэтому можно говорить об *устойчивости линейной системы*.

**Теорема 12.2.1 (устойчивость ЛОС с постоянными коэффициентами).** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Тогда система

$$\dot{r} = Ar \quad (12.2)$$

- (i) асимптотически устойчива, если  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  для всех  $\lambda \in \operatorname{spec} A$ ;
- (ii) устойчива, но не асимптотически, если имеются собственные числа с нулевой вещественной частью, и при этом их алгебраическая кратность совпадает с геометрической, а остальные собственные числа, если они есть, имеют отрицательную вещественную часть;
- (iii) неустойчива, если найдётся  $\lambda \in \operatorname{spec} A$ , такое что либо  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , либо  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  и алгебраическая кратность числа  $\lambda$  больше геометрической.

**Доказательство.** Через  $T$  обозначаем матрицу перехода к жорданову базису матрицы  $A$ ,  $J$  — жорданова форма матрицы  $A$ .

В силу следствия 10.3.2.1 любое решение системы (12.2) имеет вид

$$r(t) = e^{At}r(0) = Te^{Jt}T^{-1}r(0).$$

Принимая во внимание лемму 7.1.2, получаем

$$|r(t)| \leq n^3 |T| |e^{Jt}| |T^{-1}| |r(0)| = K |e^{Jt}| |r(0)|, \quad (12.3)$$

где  $K > 0$  не зависит от  $t$ . Обозначим через  $a_{ij}(t)$  элементы матрицы  $e^{Jt}$ .

(i) Каждая функция  $a_{ij}(t)$  имеет вид  $Ce^{\lambda t}t^k$ , где  $\lambda$  — одно из собственных чисел. Поскольку  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , то для всех  $i, j$  будет  $a_{ij}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , следовательно,

$$|e^{Jt}| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Тогда из оценки (12.3) следует устойчивость и асимптотическая устойчивость нулевого решения.

(ii) Каждая функция  $a_{ij}(t)$  имеет вид  $Ce^{\lambda t}t^k$ , но теперь  $k = 0$ , если  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ . Следовательно, существует такое число  $M$ , что при всех  $t \geq 0$

$$|e^{Jt}| < M.$$

Поэтому из оценки (12.3) следует устойчивость нулевого решения.

Пусть  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  и соответствующая функция  $e^{\lambda t}$  расположена в матрице  $e^{Jt}$  на пересечении  $j$ -й строки и  $j$ -го столбца. Обозначим через  $e_j$  столбец, в котором на  $j$ -м месте стоит 1, а остальные элементы нулевые. Тогда при любом  $\delta > 0$  решение с начальным значением

$$r(0) = \delta T e_j$$

не стремится к нулю. Поэтому асимптотической устойчивости нет.

(iii) Пусть существует собственное число  $\lambda = \alpha + i\beta$ , где  $\alpha > 0$ . Обозначим через  $h$  соответствующий собственный вектор. Тогда вектор-функция

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} h$$

является комплексным решением (12.2).

Если же имеется собственное число  $\lambda = i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ , алгебраическая кратность которого больше геометрической, то система (12.2) имеет комплексное решение

$$\varphi(t) = e^{i\beta t} (th_1 + h_2),$$

где  $h_1, h_2$  — собственный и присоединённый вектор, соответствующие числу  $\lambda$ .

Заметим, что в обоих случаях  $|\varphi(t)| \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Следовательно, хотя бы одна из вектор-функций,  $\operatorname{Re} \varphi(t)$  или  $\operatorname{Im} \varphi(t)$ , является неограниченным вещественным решением (12.2). Пусть таковой является  $\operatorname{Re} \varphi(t)$ . Тогда выбирая в качестве начального условия

$$r(0) = \mu \operatorname{Re} \varphi(0)$$

при достаточно малом  $\mu$ , получаем неограниченное решение с начальным значением в сколь угодно малой окрестности нуля. Отсюда следует, что нулевое решение неустойчиво.  $\square$

# Тема 13: Классификация точек покоя. Теоремы Ляпунова

## Содержание

---

§13.1 Классификация точек покоя линейной однородной системы второго порядка . . . . .	111
§13.2 Теоремы Ляпунова . . . . .	115
13.2.1 Устойчивость по первому приближению . . . . .	115
13.2.2 Метод функций Ляпунова . . . . .	117

---

### §13.1. Классификация точек покоя линейной однородной системы второго порядка

Исследуем подробно поведение траекторий в окрестности точки покоя линейной системы

$$\dot{r} = Ar, \quad (13.1)$$

если  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Пусть  $\det A \neq 0$ , тогда имеется единственное положение равновесия  $r = 0$  и собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$  отличны от нуля.

#### I. Случай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

Перейдём в систему координат  $u, v$ , связанную с собственным базисом  $h_1, h_2$ . Подставляя в уравнение  $r = Ts$ , где  $s = (u, v)^T$ ,  $T = (h_1, h_2)$ , получаем

$$T\dot{s} = ATs.$$

Умножая слева на  $T^{-1}$ , находим

$$\dot{s} = T^{-1}ATs.$$

Так как  $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ , то в новых координатах система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u, \\ \dot{v} = \lambda_2 v. \end{cases}$$

Её решение:  $u = C_1 e^{\lambda_1 t}$ ,  $v = C_2 e^{\lambda_2 t}$ .

Если одна, и только одна из констант  $C_1$  и  $C_2$  равна нулю, то получаем параметрическое задание одной из полуосей. Заметим ещё, что изменение знака одной из констант преобразует фазовую траекторию в симметричную ей относительно координатной оси. Таким образом, достаточно изучить фазовый портрет только в первой четверти.

Пусть  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$ . Выражая  $t$  через  $u$  и подставляя в выражение для  $v$ , находим

$$v = C_2 \left( \frac{u}{C_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1} = C u^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

При  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  получается семейство парабол. Функции  $u$  и  $v$  возрастают, следовательно, фазовые траектории расходятся от начала координат. Отражая траектории относительно координатных осей, получаем фазовый портрет во всей плоскости (рис. 13.1). Такая точка покоя называется **неустойчивый узел**.

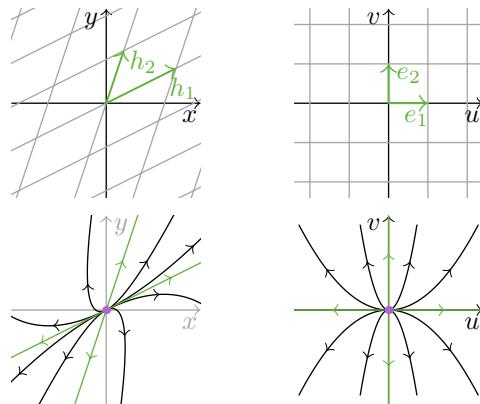


Рис. 13.1. Неустойчивый узел в старой и новой системе координат

При возвращении к прежней системе координат фазовый портрет исказится, но качественное поведение траекторий не изменится. Это замечание относится и ко всем последующим случаям.

Если  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , то уравнение фазовых траекторий не меняется, но изменяется направление движения. Теперь фазовые точки стремятся к началу координат. Соответствующее положение равновесия — **устойчивый узел** (рис. 13.2).

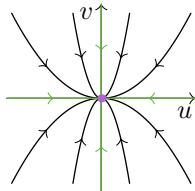


Рис. 13.2. Устойчивый узел

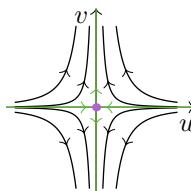


Рис. 13.3. Седло

Если  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , то  $v = C u^{\lambda_2/\lambda_1}$  — уравнение гиперболы. Соотношения  $u = C_1 e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ ,  $v = C_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow +\infty$  дают представление о направлении движения вдоль фазовых траекторий. Точка покоя называется **седло**

(рис. 13.3), она неустойчива. Асимптоты фазовых траекторий называют *сепаратрисами седла*. В старой системе координат сепаратрисы проходят вдоль собственных векторов матрицы коэффициентов.

## II. Случай $\lambda_1 = \lambda_2$

Если геометрическая кратность собственного числа  $\lambda = \lambda_{1,2}$  равна двум, то  $A = \text{diag}(\lambda, \lambda)$ . Тогда решения системы:  $x = C_1 e^{\lambda t}$ ,  $y = C_2 e^{\lambda t}$ . Исключая отсюда параметр  $t$  получаем, что фазовые траектории — лучи, входящие в начало координат при  $\lambda < 0$ , и выходящие из него, если  $\lambda > 0$ . Соответствующая точка покоя — устойчивый или неустойчивый *дикритический узел* (рис. 13.4).

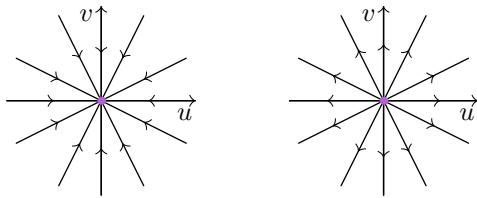


Рис. 13.4. Устойчивый и неустойчивый дикритический узел

Пусть собственное число  $\lambda$  имеет геометрическую кратность 1. Подставляя в систему  $r = Ts$ , где  $T$  — матрица перехода к жорданову базису, получаем

$$\dot{s} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} s.$$

Тогда

$$s = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda t} \left( t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Следовательно,  $u = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$ ,  $v = C_2 e^{\lambda t}$ .

Заметим, что одновременная замена знака у постоянных  $C_1$  и  $C_2$  переводит фазовую траекторию в симметричную ей относительно начала координат. При  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 = 0$  функции  $u$  и  $v$  определяют полуоси координатной оси  $u$ . Таким образом, достаточно изучить фазовый портрет при  $v > 0$ .

Выражая параметр  $t$  через  $v$  и подставляя его в выражение для  $u$ , находим уравнение траекторий

$$u = Cv + \frac{\ln v}{\lambda} v,$$

где  $C = C_1/C_2$ . Производная  $u'_v$  указывает на то, что все фазовые траектории касаются оси  $u$  при  $v \rightarrow 0$  (рис. 13.5). Соответствующая точка покоя — *вырожденный узел* (устойчивый при  $\lambda < 0$  и неустойчивый при  $\lambda > 0$ ).

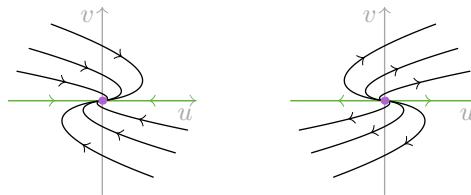


Рис. 13.5. Устойчивый и неустойчивый вырожденный узел

### III. Случай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0$

Поскольку матрица  $A$  вещественная, то  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ . Пусть  $\lambda = \lambda_1$ ,  $h$  — соответствующий собственный вектор. Тогда  $\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h$  — базис в  $\mathbb{R}^2$ . Поскольку

$$\operatorname{Re} h = \frac{h + \bar{h}}{2}, \quad \operatorname{Im} h = \frac{h - \bar{h}}{2i} = \frac{-ih + i\bar{h}}{2},$$

то матрица перехода  $T$  к базису  $\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h$  представима в виде

$$T = (\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h) = \frac{1}{2}(h, \bar{h}) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Пусть  $H = (h, \bar{h})$  — матрица перехода к собственному базису. Подставляя  $r = Ts$  в уравнение  $\dot{r} = Ar$ , находим

$$\frac{1}{2}H \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \dot{s} = A \frac{1}{2}H \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} s.$$

Сокращая на множитель  $1/2$  и умножая слева на  $H^{-1}$ , получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \dot{s} = H^{-1}AH \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} s. \quad (13.2)$$

Поскольку  $H^{-1}AH = \operatorname{diag}(\lambda, \bar{\lambda})$ , то система (13.2) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = \lambda(u - iv), \\ \dot{u} + i\dot{v} = \bar{\lambda}(u + iv). \end{cases}$$

Уравнения этой системы равносильны: одно получается из другого при комплексном сопряжении. Поэтому достаточно рассмотреть только одно из них. Положим  $z = u + iv$ . Тогда второе уравнение принимает вид

$$\dot{z} = \bar{\lambda}z.$$

Его решения:  $z = Ce^{\bar{\lambda}t}$ .

Пусть  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $C = ae^{i\varphi}$ . Тогда

$$z = ae^{\alpha t}e^{i(\varphi - \beta t)}.$$

При  $\alpha = 0$  получаем окружности радиуса  $a$ . Соответствующая устойчивая, но не асимптотически устойчивая точка покоя называется **центр**. Направление обхода окружностей зависит от знака  $\beta$ .

При  $\alpha > 0$  получаем логарифмическую спираль. Модуль  $z$  возрастает, значит, точка удаляется от начала координат, при этом совершая вокруг него обороты. Данное положение равновесия называется **неустойчивый фокус**.

При  $\alpha < 0$  спираль закручивается. Точка покоя — **устойчивый фокус**. Направление закручивания или раскручивания траекторий в случае фокуса зависит от знака  $\text{Im } \lambda$  (рис. 13.6).

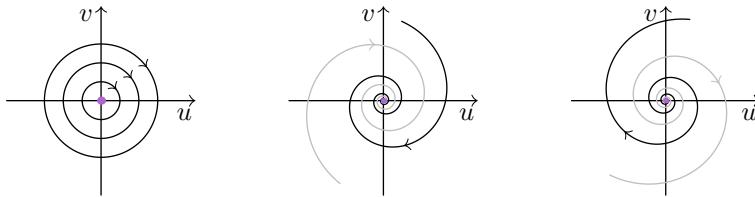


Рис. 13.6. Центр, устойчивый и неустойчивый фокус

## §13.2. Теоремы Ляпунова

### 13.2.1. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим нелинейную автономную систему  $\dot{r} = f(r)$ . Допустим, вектор-функция  $f$  дифференцируема в нуле, то есть

$$f(r) = f(0) + f'(0)r + o(r) \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

**Определение.** Пусть  $f(0) = 0$ . Тогда система

$$\dot{r} = f'(0)r$$

называется **системой первого приближения** или **линеаризацией** системы  $\dot{r} = f(r)$ .

**Теорема 13.2.1 (Ляпунов, устойчивость по первому приближению).** Пусть  $f \in C^2(\Omega)$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — окрестность нуля,  $f(0) = 0$ . Тогда нулевое решение системы  $\dot{r} = f(r)$

- (а) асимптотически устойчиво, если  $\text{Re } \lambda < 0$  для любого  $\lambda \in \text{spec } f'(0)$ ;
- (б) неустойчиво, если найдётся  $\lambda \in \text{spec } f'(0)$ , для которого  $\text{Re } \lambda > 0$ .

**Доказательство.** См. [9, гл. 7, §4]. □

Таким образом, при выполнении условий теоремы нулевое положение равновесия исходной системы и системы первого приближения ведут себя одинаково в смысле устойчивости.

**Пример 13.2.1.** Исследуем на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8 \sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

Матрица Якоби правой части системы

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Её собственные числа  $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$  имеют отрицательные вещественные части. Следовательно, точка покоя данной системы асимптотически устойчива.  $\triangle$

Отметим, что в теореме 13.2.1 не указан случай, когда имеются собственные числа с нулевой вещественной частью, а остальные, если они есть, имеют отрицательную вещественную часть. В этом случае характер устойчивости положения равновесия исходной и линеаризованной системы может различаться.

**Пример 13.2.2.** Скалярное уравнение  $\dot{x} = x^2$  имеет точку покоя  $x = 0$ . Соответствующая линеаризация  $\dot{x} = 0$  — устойчивое уравнение. Решения исходного уравнения при  $x > 0$  — семейство гипербол

$$x = \frac{1}{C - t}.$$

Для устойчивости все решения с достаточно близкими к нулю начальными значениями должны мало отличаться от нулевого решения во все будущие моменты времени. Однако, если хоть немного отступить от нуля в положительном направлении оси  $x$ , то соответствующее решение не только не будет близким к нулевому решению в будущем. Оно даже не будет определено, начиная с некоторого момента времени (рис. 13.7). Следовательно, нулевое решение неустойчиво по определению.  $\triangle$

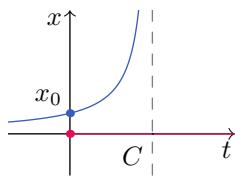


Рис. 13.7. Решение уравнения  $\dot{x} = x^2$  при  $x_0 > 0$

Таким образом, в указанном случае требуется привлекать иные методы исследования на устойчивость.

### 13.2.2. Метод функций Ляпунова

**Определение.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — окрестность нуля. Функция  $V \in C^1(\Omega)$  называется **функцией Ляпунова** системы  $\dot{r} = f(r)$ , если

- $V(r) > 0$  при всех  $r \in \Omega \setminus \{0\}$ ,  $V(0) = 0$ ;
- $V' \cdot f \leq 0$  при всех  $r \in \Omega$ .

**Теорема 13.2.2 (Ляпунов, об устойчивости).** Пусть  $f \in \text{Lip}_{loc}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — окрестность нуля,  $f(0) = 0$ . Если в области  $\Omega$  существует функция Ляпунова системы  $\dot{r} = f(r)$ , то  $r = 0$  — устойчивое решение.

Первое свойство функции Ляпунова позволяет говорить о ней как о расстоянии до начала координат. Конечно, она не обладает всеми свойствами расстояния. Надо понимать её как некоторое обобщённое расстояние.

Второе свойство утверждает, что скалярное произведение градиента функции  $V$  и вектора фазовой скорости  $f$  неположительно. Другими словами, угол между  $V'$  и  $f$  не острый (рис. 13.8). То есть движение в данной точке направлено в сторону уменьшения или хотя бы не увеличения «расстояния» до начала координат. Это верно для любой точки в окрестности нуля, а значит, положение устойчиво — в этом смысле теоремы Ляпунова.

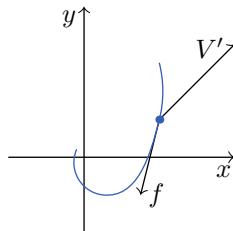


Рис. 13.8. Градиент функции Ляпунова и фазовая скорость

**Доказательство.** Будем доказывать от противного. Пусть нулевое положение равновесия неустойчиво. Тогда найдётся такое  $\varepsilon > 0$ , что при любом сколь угодно малом  $\delta > 0$  можно выбрать такое начальное значение  $r_0$  из  $\delta$ -окрестности нуля, что будет ложным утверждение

$$\forall t \geq 0 \quad |r(t, r_0)| < \varepsilon. \quad (13.3)$$

Все числа, меньшие  $\varepsilon$ , обладают тем же свойством, что и  $\varepsilon$ . Поэтому можно считать, что  $\varepsilon$ -окрестность содержитя вместе с границей в области  $\Omega$ .

Ложность утверждения (13.3) означает одно из двух:

- решение  $r(t, r_0)$  определено не при всех  $t \geq 0$ ;
- найдётся  $t_\varepsilon > 0$ , такое что  $|r(t_\varepsilon, r_0)| \geq \varepsilon$ .

Допустим, выполнено (i), то есть максимальное решение  $r(t, r_0)$  (которое существует и единствено по теореме 9.1.2) определено на интервале  $(a, b) \ni 0$ , где  $b < +\infty$ . Построим цилиндр  $[0, b] \times \overline{B}_\varepsilon(0)$ , где  $\overline{B}_\varepsilon(0)$  — замыкание  $\varepsilon$ -окрестности нуля. По теореме 9.1.3 интегральная кривая решения  $r(t, r_0)$  выйдет на его границу при некотором  $t_\varepsilon < b$ . Значит, верно утверждение (ii).

Итак, достаточно получить противоречие, если верно (ii). Будем считать, что  $t_\varepsilon$  — это точка, в которой  $r(t_\varepsilon, r_0) \in \partial B_\varepsilon(0)$ , где  $\partial B_\varepsilon(0)$  — граница  $\varepsilon$ -окрестности нуля.

Пусть  $m_V = \min_{r \in \partial B_\varepsilon(0)} V(r)$ . Поскольку  $V(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , то можно выбрать  $\delta$  так, чтобы  $V(r) < m_V/2$  при  $|r| < \delta$ . Положим

$$v(t) := V(r(t, r_0)),$$

где  $r_0$  выбрано из  $\delta$ -окрестности нуля так, чтобы выполнялось (ii).

Функция  $v$  дифференцируема,

$$\begin{aligned} v(0) &= V(r_0) < \frac{m_V}{2}, \\ v(t_\varepsilon) &= V(r(t_\varepsilon, r_0)) \geq m_V. \end{aligned}$$

Поэтому найдётся точка  $t_1 \in (0, t_\varepsilon)$ , в которой  $\dot{v}(t_1) > 0$ .

Однако, исходя из второго свойства функции Ляпунова, имеем

$$\dot{v}(t_1) = V'(r(t_1, r_0)) \cdot r'_t(t_1, r_0) = V'(r(t_1, r_0)) \cdot f(r(t_1, r_0)) \leq 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.  $\square$

**Определение.** Скалярное произведение градиента функции  $V$  и правой части системы называют ещё *производной функции  $V$  в силу данной системы*.

Приведём без доказательства условия для асимптотической устойчивости.

**Теорема 13.2.3 (Ляпунов, об асимптотической устойчивости).** *Если в условиях теоремы 13.2.2 выполнено  $V' \cdot f < 0$  в области  $\Omega \setminus \{0\}$ , то нулевое решение системы  $\dot{r} = f(r)$  асимптотически устойчиво.*

Применение указанных теорем носит название метода функций Ляпунова. Данный метод более универсален, чем метод исследования на устойчивость по первому приближению. Его недостаток в том, что не существует общего алгоритма построения функции Ляпунова. В простейших случаях её можно искать в виде линейной комбинации чётных степеней переменных:

$$V(x, y) = ax^{2p} + by^{2q}.$$

В более общем случае рекомендуется искать функцию Ляпунова в виде квадратичной формы:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j.$$

**Пример 13.2.3.** Исследуем на устойчивость точку покоя  $x = y = 0$  системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^5, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

По соответствующей системе первого приближения об устойчивости точки покоя ничего сказать нельзя, поскольку собственные числа её матрицы коэффициентов чисто мнимые.

Попробуем подобрать функцию Ляпунова в виде  $V(x, y) = ax^2 + by^2$ . Производная  $V$  в силу данной системы:

$$\begin{aligned} V' \cdot f &= (2ax, 2by) \cdot \begin{pmatrix} -y - x^5 \\ x - y^3 \end{pmatrix} = 2ax(-y - x^5) + 2by(x - y^3) \\ &= -2ax^6 - 2axy + 2bxy - 2by^4. \end{aligned}$$

Заметим, что второе и третье слагаемое сокращаются, если  $a = b$ . Оставшееся выражение при этом будет иметь определённый знак.

Пусть  $a = b = 1$ . Тогда, во-первых,  $V(x, y) > 0$  при  $(x, y) \neq (0, 0)$  и  $V(0, 0) = 0$ . Во-вторых, производная в силу системы

$$V' \cdot f = -2(x^6 + y^4) < 0$$

всюду, за исключением начала координат. Тем самым, функция  $V$  обладает свойствами из теоремы 13.2.3. Следовательно, положение равновесия асимптотически устойчиво.  $\triangle$

# Тема 14: Линейные уравнения второго порядка

## Содержание

---

§14.1 Решение уравнений при помощи рядов . . . . .	120
14.1.1 Уравнение Бесселя . . . . .	121
§14.2 Корни решений . . . . .	123

---

### §14.1. Решение уравнений при помощи рядов

**Определение.** Уравнением Эйри называют уравнение

$$\ddot{y} - ty = 0. \quad (14.1)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде степенного ряда

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Предполагая, что  $t$  лежит внутри промежутка сходимости, имеем

$$\ddot{\varphi}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2}.$$

Подставляя ряды в уравнение и заменяя индексы суммирования, находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}t^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}t^k = 0,$$

то есть

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-1})t^k = 0.$$

Отсюда

$$c_2 = 0, \quad c_k = \frac{c_{k-3}}{k(k-1)}, \quad k \geq 3.$$

Тогда  $c_k = 0$ , если  $k \equiv 2 \pmod{3}$ ,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{(k-2)!!}{k!} c_0, & \text{если } k \equiv 0 \pmod{3}, \\ c_k &= \frac{(k-2)!!}{k!} c_1, & \text{если } k \equiv 1 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= c_0 \left( 1 + \sum_{k=3, k \equiv 0}^{\infty} \frac{(k-2)!!}{k!} t^k \right) + c_1 \left( t + \sum_{k=4, k \equiv 1}^{\infty} \frac{(k-2)!!}{k!} t^k \right) \\ &= c_0 \varphi_0(t) + c_1 \varphi_1(t).\end{aligned}$$

Таким образом, при любых  $c_0$  и  $c_1$  функция  $\varphi$  будет решением. По признаку Даламбера ряды  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  сходятся на  $\mathbb{R}$ . Вронсиан решений  $\varphi_0, \varphi_1$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

поэтому  $\varphi_0, \varphi_1$  — фундаментальная система решений уравнения (14.1) на  $\mathbb{R}$ .

При  $c_0 = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}$ ,  $c_1 = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma(1/3)}$  будет  $\varphi(t) = \text{Ai}(t)$ . При  $c_0 = \frac{1}{3^{1/6}\Gamma(2/3)}$ ,  $c_1 = \frac{3^{1/6}}{\Gamma(1/3)}$  будет  $\varphi(t) = \text{Bi}(t)$ . Здесь  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера,  $\text{Ai}$ ,  $\text{Bi}$  — функции Эйри. Их свойства хорошо известны<sup>1</sup>.

Приведём частный случай теоремы Коши для уравнения 2-го порядка, которая указывает, когда можно искать решения в виде ряда.

**Теорема 14.1.1 (Коши, аналитичность решения).** *Если  $p_0, p_1, p_2$  — аналитические функции в окрестности точки  $t_0$  и  $p_2(t_0) \neq 0$ , то решения уравнения*

$$p_2(t)y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0 \quad (14.2)$$

являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки  $t_0$ .

### 14.1.1. Уравнение Бесселя

**Определение.** Уравнение

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (14.3)$$

называется *уравнением Бесселя* порядка  $\nu$ .

Будем искать решение в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r}, \quad c_0 \neq 0, r \in \mathbb{R}.$$

Подставляя формально этот ряд в (14.3), имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)x^{k+r} + (x^2 - \nu^2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} = 0.$$

<sup>1</sup> См., например, <https://dlmf.nist.gov/9>

После приведения подобных слагаемых приравняем к нулю коэффициенты при степенях  $x$ . Получаем

$$\begin{aligned} (r^2 - \nu^2)c_0 &= 0, \\ ((r+1)^2 - \nu^2)c_1 &= 0, \\ ((r+2)^2 - \nu^2)c_2 + c_0 &= 0, \\ &\dots \\ ((r+k)^2 - \nu^2)c_k + c_{k-2} &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим  $r = \pm\nu$ , поскольку  $c_0 \neq 0$ .

Рассмотрим случай  $r = \nu \geq 0$ . Из второго уравнения следует  $c_1 = 0$ , а значит и  $c_{2m-1} = 0$  при всех  $m \in \mathbb{N}$ , а

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m}(\nu+1)(\nu+2) \cdots (\nu+m)m!}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Коэффициент  $c_0$  произвольный. Если положить  $c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ , где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера, то

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} \Gamma(m+1) \Gamma(\nu+m+1)}.$$

При помощи признака Даламбера убеждаемся, что полученный ряд сходится на всей вещественной оси, а значит, даёт решение уравнения (14.3).

Это решение называется функцией Бесселя первого рода порядка  $\nu$  и обозначается

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}, \quad \nu \geq 0.$$

Если  $\nu = -\mu < 0$  и не целое, то аналогично строится ещё одно решение

$$J_{-\mu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\mu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\mu}, \quad \mu > 0.$$

Если  $\nu > 0$  и не целое, то решения  $J_\nu$  и  $J_{-\nu}$  линейно независимы, и потому образуют фундаментальную систему решений уравнения (14.3).

При целом значении  $\nu$  второе линейно независимое с  $J_\nu$  решение (14.3) называется функцией Бесселя второго рода. Её можно найти, например, с помощью формулы Остроградского–Лиувилля.

**Теорема 14.1.2 (разложимость решения в обобщённый степенной ряд).** Пусть  $s-2 \in \mathbb{Z}_+$ ,  $p_0, p_1, p_2$  — аналитические функции в окрестности точки  $x_0$ , являющейся нулюм порядка  $s$  функции  $p_2$ , нулюм порядка  $s-1$  или выше

функции  $p_1$  и нулём порядка  $s - 2$  или выше функции  $p_0$ . Тогда существует по крайней мере одно нетривиальное решение уравнения (14.2), представимое в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^{r+k},$$

где  $r \in \mathbb{R}$ ,  $c_0 \neq 0$ .

## §14.2. Корни решений

При исследовании расположения нулей решений уравнений второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

можно ограничиться изучением нулей решений уравнений вида

$$y'' + p(x)y = 0 \tag{14.4}$$

(см. упражнение 14.2.1).

**Упражнение 14.2.1.** Убедитесь, что подстановка

$$y = u \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p_1(s) ds\right)$$

приводит уравнение к виду  $u'' + p(x)u = 0$ .

**Лемма 14.2.1.** Любое ненулевое решение уравнения (14.4), где  $p \in C(a, b)$ , может иметь лишь конечное число корней на любом конечном отрезке.

**Доказательство.** Предположим, что на некотором отрезке  $[a, b]$  существует бесконечное число корней ненулевого решения  $\varphi$  уравнения (14.4). По теореме Больцано–Вейерштрасса из этого множества можно выбрать последовательность  $\{x_m\}$ , сходящуюся к  $x^* \in [a, b]$ . В силу непрерывности  $\varphi$  будет  $\varphi(x^*) = 0$ .

По теореме Ролля в каждом интервале  $(x_m, x_{m+1})$  найдётся точка  $\theta_m$ , в которой  $\varphi'(\theta_m) = 0$ . Ясно, что  $\theta_m \rightarrow x^*$  и, по непрерывности,  $\varphi'(x^*) = 0$ .

Таким образом, функция, тождественно равная нулю, и  $\varphi$  — два различных решения уравнения (14.4) с начальными условиями  $y(x^*) = 0$ ,  $y'(x^*) = 0$ , что противоречит теореме единственности 8.2.1.  $\square$

Другими словами, лемма 14.2.1 говорит о том, что корни любого решения уравнения (14.4) отделены друг от друга.

**Теорема 14.2.1 (Штурм, о сравнении).** Пусть  $p, P \in C(a, b)$ , функции  $\varphi$  и  $\psi$  — нетривиальные решения, соответственно, уравнений

$$y'' + p(x)y = 0, \tag{14.5}$$

$$y'' + P(x)y = 0. \quad (14.6)$$

Пусть, далее,  $x_1, x_2$  — соседние корни  $\varphi$ ;  $p(x) \leq P(x)$  при  $x \in [x_1, x_2]$ .

Тогда функция  $\psi$  имеет хотя бы один корень  $x^* \in [x_1, x_2]$ . При этом либо  $x^* \in (x_1, x_2)$ , либо

$$\begin{cases} \psi(x) \neq 0 \text{ при } x \in (x_1, x_2), \\ \psi(x_1) = \psi(x_2) = 0, \\ p \equiv P \text{ на } [x_1, x_2]. \end{cases}$$

**Доказательство.** Не умаляя общности, считаем, что  $\varphi(x) > 0$  при  $x \in (x_1, x_2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi'(x_1) &= \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{\varphi(x)}{x - x_1} > 0, \\ \varphi'(x_2) &= \lim_{x \rightarrow x_2-0} \frac{\varphi(x)}{x - x_2} < 0. \end{aligned}$$

Заметим, что неравенства строгие, поскольку равенства исключаются теоремой единственности.

Умножая (14.5) при  $y = \varphi$  на  $\psi$ , (14.6) при  $y = \psi$  на  $-\varphi$  и складывая получившиеся равенства, находим

$$\varphi''\psi - \varphi\psi'' = (P - p)\varphi\psi.$$

Левая часть является производной от  $\varphi'\psi - \varphi\psi'$ . Поэтому, интегрируя по отрезку  $[x_1, x_2]$ , имеем

$$\varphi'(x_2)\psi(x_2) - \varphi'(x_1)\psi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (P(x) - p(x))\varphi(x)\psi(x) dx. \quad (14.7)$$

Если предположить, что  $\psi(x) > 0$  на всём отрезке  $[x_1, x_2]$ , то получится противоречие: левая часть последнего равенства окажется строго меньшей нуля, а правая большей или равной нулю. Случай  $\psi(x) < 0$  разбирается аналогично.

Поэтому на отрезке  $[x_1, x_2]$  существует хотя бы один корень функции  $\psi$ .

Предположим, что  $\psi(x) \neq 0$  (пусть  $\psi(x) > 0$ ) на интервале  $(x_1, x_2)$ . Тогда  $\psi(x_1) = 0$ , либо  $\psi(x_2) = 0$ . Допустим, верно первое равенство. Левая часть (14.7)

$$\varphi'(x_2)\psi(x_2) - \varphi'(x_1)\psi(x_1) = \varphi'(x_2)\psi(x_2) \leq 0,$$

а правая часть того же равенства

$$\int_{x_1}^{x_2} (P(x) - p(x))\varphi(x)\psi(x) dx \geq 0.$$

Это возможно лишь тогда, когда обе части равны нулю, а значит,  $\psi(x_2) = 0$  и  $P(x) \equiv p(x)$  на  $[x_1, x_2]$ .  $\square$

## Список литературы

1. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : Учебное пособие. — 2-е изд. — СПб : Лань, 2011. — 304 с.
2. *Буфетов А. И., Гончарук Н. Б., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения (электронная версия). — 2019.
3. *Демидович Б. П.* Математические основы квантовой механики. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2005.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — 3-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 480 с.
5. *Краснов М. Л., Киселёв А. И., Макаренко Г. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. — 4-е изд. — М : Едиториал УРСС, 2002. — 256 с.
6. *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — 5-е изд. — Минск, 1977.
7. *Матвеев Н. М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. — СПб : Специальная Литература, 1996.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — 7-е изд. — М : Изд-во МГУ, 1984.
9. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — 4-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 347 с.
10. *Романко В. К., Агаханов Н. Х., Власов В. В., Коваленко Л. И.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / под ред. В. К. Романко. — 5-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 222 с.
11. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — 3-е изд. — Москва : Наука, 1989. — 480 с.
12. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
13. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — 2-е изд. — Москва : КомКнига, 2007.
14. *Халил Х. К.* Нелинейные системы. — 3-е изд. — М.-Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. — 832 с.
15. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1969.