Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

# Расчетно графическая работа №2

Выполнили:

Левахин Лев

Останин Андрей

Дощенников Никита

Группы: K3221, K3240

Проверил:

Владимир Владимирович Беспалов

Санкт-Петербург
2025

# Содержание



### Цель

Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения разными способами.

Методы будут демонстрироваться на задаче Коши:

$$y'' - 4y' + 5y = 4e^{-2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

### Метод специальной правой части

Запишем характеристическое уравнение:

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

Найдем его корни. Посчитаем дискриминант:

$$\mathcal{D} = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$$

Тогда корни:

$$r_1 = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2} = 2 + i, \quad r_2 = \frac{4 - \sqrt{-4}}{2} = 2 - i$$

Запишем общее решение для однородного уравнения. Так как корни комплексные, то общее решение соответствует форме:

$$y_{\text{общ}} = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x)$$

В нашем случае $\alpha = 2, \beta = 1$. Тогда:

$$y_{\text{общ}} = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x)$$

Специальный вид правой части соответствует виду:

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

где $P_0(x) = 4\ (n = 0), \alpha = -2$.

Так как $\alpha = -2$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение представим в следующем виде:

$$y_{\text{частн}} = e^{\alpha x} \cdot Q_0(x) = e^{-2x} \cdot A$$

Найдем первую и вторую производные для частного решения:

$$y'_{\text{частн}} = \left(Ae^{-2x}\right)' = -2Ae^{-2x}$$

$$y''_{\text{частн}} = \left(-2Ae^{-2x}\right)' = 4Ae^{-2x}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$4Ae^{-2x} + 8Ae^{-2x} + 5Ae^{-2x} = 4e^{-2x}$$

Вынеся $e^{-2x}$ за скобки получим:

$$e^{-2x}(4A + 8A + 5A) = e^{-2x}(4)$$

Отсюда видно, что

$$4A + 8A + 5A = 4 \Rightarrow 17A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{17}$$

Тогда

$$y_{\text{частн}} = Ae^{-2x} = \frac{4}{17}e^{-2x}$$

Запишем общее решение:

$$y = y_{\text{общ}} + y_{\text{частн}} = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x) + \frac{4}{17}e^{-2x}$$

Теперь решим задачу Коши. Чтобы определить коэффициенты, подставим 0 вместо $x$:

$$y = C_1 + \frac{4}{17}$$

по условию $y(0) = 0$, то есть

$$C_1 + \frac{4}{17} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{4}{17}.$$

Найдем производную $y'$:

$$y' = C_1\left(e^{2x}\cos x\right)' + C_2\left(e^{2x}\sin x\right)' + \frac{4}{17}\left(e^{-2x}\right)' =$$

$$= C_1\left(2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x\right) + C_2\left(2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x\right) - \frac{8}{17}e^{-2x} =$$

$$= e^{2x}((2C_1 + C_2)\cos x + (2C_2 - C_1)\sin x) - \frac{8}{17}e^{-2x}$$

По условию $y'(0) = 1$. Подставим 0 вместо $x$ и получим:

$$y'(0) = 2C_1 + C_2 - \frac{8}{17} = 1$$

Подставим $C_1 = -\frac{4}{17}$:

$$-\frac{8}{17} + C_2 - \frac{8}{17} = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{33}{17}$$

Подставим найденные коэффициенты в итоговое решение:

$$y = e^{2x}\left(-\frac{4}{17}\cos x + \frac{33}{17}\sin x\right) + \frac{4}{17}e^{-2x}.$$

**Метод вариации постоянной**

Напомним вид общего решения для однородного уравнения:

$$y_{\text{общ}} = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x)$$

Раскроем скобки и получим

$$y_{\text{общ}} = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x$$

Сведем все к системе:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

где $y_1 = e^{2x}\cos x,\ y_2 = e^{2x}\sin x,\ f(x) = 4e^{-2x}$.

Найдем производные для $y_1$ и $y_2$:

$$y_{1'} = \left(e^{2x}\cos x\right)' = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x$$

$$y_{2'} = \left(e^{2x}\sin x\right)' = 2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x$$

Тогда система примет следующий вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)(e^{2x}\cos x) + C_2'(x)(e^{2x}\sin x) = 0 \\ C_1'(x)(2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x) + C_2'(x)(2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x) = 4e^{-2x} \end{cases}$$

Из первого уравнения системы:

$$C_1' = -C_2'\frac{e^{2x}\sin x}{e^{2x}\cos x} = -C_2'\operatorname{tg} x$$

Подставим во второе уравнение системы и вынесем $C_2'e^{2x}$:

$$C_2'e^{2x}(-\operatorname{tg} x(2\cos x - \sin x) + 2\sin x + \cos x) = 4e^{-2x}$$

Упростим

$$-\operatorname{tg} x(2\cos x - \sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x}(2\cos x - \sin x) = -2\sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

Тогда

$$\left(-2\sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) + 2\sin x + \cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

Вернемся в уравнение 2 системы. С учетом упрощения оно примет следующий вид:

$$C_2'e^{2x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 4e^{-2x}$$

Отсюда

$$C_{2'} = 4e^{-4x}\cos x$$

Найдем $C_1'$

$$C_1' = -C_2'\operatorname{tg} x = -4e^{-4x}\cos x\frac{\sin x}{\cos x} = -4e^{-4x}\sin x$$

Проинтегрируем и получим

$$C_1 = -4\int e^{-4x}\sin x dx = \frac{4}{17}e^{-4x}(4\sin x + \cos x)$$

$$C_2 = 4\int e^{-4x}\cos x dx = \frac{4}{17}e^{-4x}(4\cos x - \sin x)$$

Подставим в формулу частного решения:

$$
\begin{aligned}
y_{\text{частн}} &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \\
&= \frac{4}{17}e^{-4x}(4\sin x + \cos x)\cdot e^{2x}\cos x + \frac{4}{17}e^{-4x}(4\cos x - \sin x)\cdot e^{2x}\sin x = \\
&= \frac{4}{17}e^{-2x}((4\sin x + \cos x)\cos x + (4\cos x - \sin x)\sin x) = \\
&= \frac{4}{17}e^{-2x}(4\sin x\cos x + 4\cos x\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x) = \\
&= \frac{4}{17}e^{-2x}(8\sin x\cos x + (\cos^2 x + \sin^2 x)) = \\
&= \frac{4}{17}e^{-2x}(8\sin x\cos x + 1) = \\
&= \frac{4}{17}e^{-2x}(\cos 2x + 4\sin 2x)
\end{aligned}
$$

Так как $e^{-2x}\cos 2x$ и $e^{-2x}\sin 2x$ – решения однородного уравнения, то выражение $\frac{4}{17}e^{-2x}(\cos 2x + 4\sin 2x)$ – это частное решение и часть однородного решения. Тогда окончательно получим

$$y_{\text{частн}} = \frac{4}{17}e^{-2x}$$

Запишем общее решение:

$$y = y_{\text{общ}} + y_{\text{частн}} = e^{2x}\left(-\frac{4}{17}\cos x + \frac{33}{17}\sin x\right) + \frac{4}{17}e^{-2x}.$$

Дальнейшее решение задачи Коши идентично описанному в первом методе.

## Операционный метод

## Метод разложения в ряд