Метод специальной правой части

№1

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$$

Характеристический многочлен

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1}, \underline{\lambda_2 = -4}$$

$$y_{\text{общ}} = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-4x}$$

Так как -4 – корень характеристического многочлена, частное решение

$$y_{\text{частн}_1} = \underline{A \cdot e^{-4x} \cdot x}$$

$$y'_{\text{частн}_1} = \left(A \cdot e^{-4x} \cdot x\right)' = A\left(e^{-4x} - 4x \cdot e^{-4x}\right) = \underline{Ae^{-4x}(1-4x)}$$

$$y''_{\text{частн}_1} = \left(Ae^{-4x}(1-4x)\right)' = A\left(-4(1-4x)e^{-4x} - 4e^{-4x}\right) = 4Ae^{-4x}(-1(1-4x)-1) = \underline{4Ae^{-4x}(4x-2)}$$

Подставим в изначальное уравнение

$$\underbrace{4Ae^{-4x}(4x-2)}_{y''_{\text{частн}_1}} + 3\underbrace{Ae^{-4x}(1-4x)}_{y'_{\text{частн}_1}} - 4\underbrace{A \cdot e^{-4x} \cdot x}_{y_{\text{частн}_1}} = e^{-4x}$$

Тогда получим

$$4A(4x-2) + 3A(1-4x) - 4Ax = 1$$

$$\underline{16Ax} - 8A + 3A - \underline{12Ax} - \underline{4Ax} = 1$$

$$\underline{0Ax} - 8A + 3A = 1 = 1$$

$$-5A = 1$$

$$A = -\frac{1}{5}$$

Тогда

$$y_{\text{частн}_1} = Ae^{-4x}x = -\frac{xe^{-4x}}{5}$$

Так как $\lambda = -1$ не является корнем характеристического многочлена

$$y_{\text{частн}_2} = \underline{(Bx + C)e^{-x}}$$

$$y'_{\text{частн}_2} = Be^{-x} - e^{-x}(Bx + C) = \underline{e^{-x}(B - Bx - C)}$$

$$y''_{\text{частн}_2} = -e^{-x}(B - Bx - C) - Be^{-x} = \underline{e^{-x}(Bx - 2B + C)}$$

Подставим в изначальное уравнение

$$\underbrace{(Bx - 2B + C)e^{-x}}_{y''_{\text{частн}_2}} + 3\underbrace{(B - Bx - C)e^{-x}}_{y'_{\text{частн}_2}} - 4\underbrace{(Bx + C)e^{-x}}_{y_{\text{частн}_2}} = xe^{-x}$$

$$(Bx - 2B + C) + 3(B - Bx - C) - 4(Bx + C) = x$$

$$\underline{Bx} - 2B + C + 3B\underline{-3Bx} - 3C\underline{-4Bx} - 4C = x$$

$$\underline{-6Bx} + \underbrace{B - 6C}_{=0} = x$$

Тогда

$$-6Bx = x \Rightarrow -6B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{6}$$

$$B - 6C = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} - 6C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{36}$$

Тогда

$$y''_{\text{частн}_2} = (Bx + C)e^{-x} = \left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{36}\right)e^{-x} = -\frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{6}\right)e^{-x}$$

Тогда ответ

$$y = y_{\text{общ}} + y_{\text{частн}_1} + y_{\text{частн}_2} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{5}xe^{-4x} - \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{6}\right)e^{-x}$$

№2

$$y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$$

Характеристический многочлен

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3) \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1}, \underline{\lambda_2 = -3}$$

Тогда общее решение будет выглядеть так

$$y_{\text{общ}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}$$

Так как $\lambda = 1$ – корень характеристического многочлена, то частное решение будет выглядеть так

$$y_{\text{частн}} = (Ax^2 + Bx + C)xe^x = \underline{(Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^x}$$

$$y'_{\text{частн}} = A\left(x^3 e^x\right)' + B\left(x^2 e^x\right)' + C(xe^x)' =$$
$$= A\left(3x^2 e^x + x^3 e^x\right) + B\left(2xe^x + x^2 e^x\right) + C(e^x + xe^x) =$$
$$= \underline{3Ax^2 e^x + 2Bxe^x + Ce^x + Ax^3 e^x + Bx^2 e^x + Cxe^x}$$

$$y''_{\text{частн}} = 3A\left(x^2 e^x\right)' + 2B(xe^x)' + C(e^x)' + A\left(x^3 e^x\right)' + B\left(x^2 e^x\right)' + C(xe^x)' =$$
$$= 3A\left(2xe^x + x^2 e^x\right) + 2B(e^x + xe^x) + C(e^x) + A\left(3x^2 e^x + x^3 e^x\right) + B\left(2xe^x + x^2 e^x\right) + C(e^x + xe^x) =$$
$$= (3A + B)\left(2xe^x + x^2 e^x\right) + (2B + C)(e^x + xe^x) + Ce^x + A\left(3x^2 e^x + x^3 e^x\right) =$$
$$= \underline{6Axe^x + 6Ax^2 e^x + 2Be^x + 4Bxe^x + 2Ce^x + Ax^3 e^x + Bx^2 e^x + Cxe^x}$$

Подставим в начальное уравнение

$$\underbrace{6Axe^x + 6Ax^2e^x + 2Be^x + 4Bxe^x + 2Ce^x + Ax^3e^x + Bx^2e^x + Cxe^x}_{y''_{\text{частн}}} +$$

$$+2 \cdot \left(\underbrace{3Ax^2e^x + 2Bxe^x + Ce^x + Ax^3e^x + Bx^2e^x + Cxe^x}_{y'_{\text{частн}}}\right) -$$

$$-3\underbrace{(Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^x}_{y_{\text{частн}}} =$$

$$= x^2e^x$$

$$6Axe^x + 12Ax^2e^x + 2Be^x + 8Bxe^x + 4Ce^x = x^2e^x$$

$$(12A)x^2e^x + (6A + 8B)xe^x + (2B + 4C)e^x = x^2e^x$$

$$\begin{cases} 12A = 1 \\ 6A + 8B = 0 \\ 2B + 4C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{12} \\ B = -\frac{1}{16} \\ C = \frac{1}{32} \end{cases}$$

Тогда частное решение

$$y_{\text{частн}} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^x = \left(\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x\right)e^x$$

Запишем итоговое решение

$$y = y_{\text{общ}} + y_{\text{частн}} = C_1e^x + C_2e^{-3x} + \left(\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x\right)e^x$$

№3

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$$

Характеристический многочлен

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

Дискриминант

$$\mathcal{D} = (-4)^2 - 4(1 \cdot 8) = 16 - 32 = -16 < 0$$

Корни

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{4+\sqrt{-16}}{2} = \underline{2 + 2i} \\ \lambda_2 = \frac{4-\sqrt{-16}}{2} = \underline{2 - 2i} \end{cases}$$

Запишем общее решение

$$y_{\text{общ}} = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

Запишем частное решение

Правая часть в виде $P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$

Тогда частное решение

$$y_{\text{частн}_1} = Ae^{2x}$$
$$y'_{\text{частн}_1} = A\big(e^{2x}\big)' = 2Ae^{2x}$$
$$y''_{\text{частн}_1} = 2A\big(e^{2x}\big)' = 4Ae^{2x}$$

Подставим в изначальное уравнение

$$\underbrace{4Ae^{2x}}_{y''_{\text{частн}_1}} - 4\left(\underbrace{2Ae^{2x}}_{y'_{\text{частн}_1}}\right) + 8\left(\underbrace{Ae^{2x}}_{y_{\text{частн}_1}}\right) = e^{2x}$$
$$4A - 8A + 8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

Тогда частное решение для первого слагаемого равно

$$y_{\text{частн}_1} = \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$y_{\text{частн}_2} = B\cos 2x + C\sin 2x$$
$$y'_{\text{частн}_2} = -2B\sin 2x + 2C\cos 2x$$
$$y''_{\text{частн}_2} = -4B\cos 2x - 4C\sin 2x$$

Теперь все подставим в изначальное уравнение

$$\underbrace{-4(B\cos 2x + C\sin 2x)}_{y''_{\text{частн}_2}} - 4\left(\underbrace{-2(B\sin 2x - C\cos 2x)}_{y'_{\text{частн}_2}}\right) + 8\left(\underbrace{B\cos 2x + C\sin 2x}_{y_{\text{частн}_2}}\right) = \sin 2x$$
$$\begin{cases} 4B - 8C = 0 \\ 4C + 8B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{20} \\ B = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Тогда частное решение для $\sin 2x$

$$y_{\text{частн}_2} = \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{20}\sin 2x$$

Финальное решение

$$y = y_{\text{общ}} + y_{\text{частн}_1} + y_{\text{частн}_2} = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{20}\sin 2x$$

Метод исключения

№4

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

Из первого уравнения

$$3y = x - x' \Rightarrow y = \frac{x - x'}{3}$$

$$y' = \frac{1}{3}(x - x')' = \frac{1}{3}(x' - x'')$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}(x' - x'')}_{y'} = 3x + \underbrace{\frac{1}{3}(x - x')}_{y} \quad | \cdot 3$$

$$x' - x'' = 9x + x - x'$$
$$x'' - 2x' + 10x = 0$$
$$\mathcal{D} = 4 - 4 \cdot 10 = -36$$
$$\sqrt{\mathcal{D}} = \sqrt{-36} = 6i$$
$$x(t) = \underline{e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)}$$
$$x' = e^t((C_1 + 3C_2) \cos 3t + (C_2 - 3C_1) \sin 3t)$$
$$y(t) = \frac{1}{3}(x - x') = \underline{e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)}$$

№5

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{cases}$$

Из первого уравнения

$$y = x' - 2x$$
$$y' = x'' - 2x'$$

$$\underbrace{x'' - 2x'}_{y'} = \underbrace{4x' - 8x}_{4y} - x$$

$$x'' - 6x' + 9x = 0$$
$$\underline{x(t) = e^{3t}(C_1 + C_2 t)}$$

$$x'(t) = 3C_1 e^{3t} + C_2(e^{3t} + 3te^{3t})$$

$$y(t) = x' - 2x = \underline{e^{3t}(C_1 + C_2(1 + t))}$$

Метод Эйлера

№6

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i)$$

$$\begin{cases} x' = 2x + 2z - y \\ y' = x + 2z \\ z' = y - 2x - z \end{cases}$$

Выпишем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы A. Для поиска собственных чисел составим характеристическое уравнение

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 1 & 0-\lambda & 2\\ -2 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2+1)$$

Итак, собственные числа:

$$\lambda_1=1,\lambda_2=i,\lambda_3=-i$$

Найдем собственные векторы

$$(A-\lambda_1 I)X_1=\mathbb{O}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$X_1=C_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 I)X_2=\mathbb{O}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2-i & -1 & 2\\ 1 & -i & 2\\ -2 & 1 & -1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$X_2=C_2\begin{pmatrix}-1-i\\-1-i\\1\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_3 I)X_3=\mathbb{O}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2+i & -1 & 2\\ 1 & i & 2\\ -2 & 1 & -1+i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \chi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$X_3=\overline{X_2}=C_3\begin{pmatrix}-1+i\\-1+i\\1\end{pmatrix}$$

Запишем ответ

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+C_2e^{it}\begin{pmatrix}-1-i\\-1-i\\1\end{pmatrix}+C_3e^{-it}\begin{pmatrix}-1+i\\-1+i\\1\end{pmatrix}$$

№7

$$(\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1)$$

$$\begin{cases}x'=2x-y-z\\ y'=3x-2y-3z\\ z'=2z-x+y\end{cases}$$

Запишем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2$$

Тогда собственные числа

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Найдем собственный вектор для $\lambda_1 = 0$

$$(A - \lambda_1 I)X_1 = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda = 1$

$$(A - 1I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы = 1. То есть по факту все три уравнения зависимы. Любое можно выразить через другое. Поэтому берем любое, например, первое

$$x - y - z = 0 \Rightarrow x = y + z$$

Теперь y, z – свободные переменные.

Первый вектор

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Второй вектор

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получим итоговое решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Метод вариации постоянной

$$\begin{cases} x' = y - 5\cos t \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

Запишем систему в матричной форме

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Тогда

$$X' = AX + F(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} -5\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решим однородную систему

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$$

Находим собственные векторы

$$(A - 2I)X_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)V_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Общее решение однородной системы

$$X_h(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Теперь ищем частное решение в виде

$$u_1' X_1 + u_2' X_2 = F(t)$$

$$u_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_2' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} u_1' + u_2' = -5\cos t \\ 2u_1' - u_2' = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы

$$u_2' = 2u_1'$$

Подставим в первое

$$u_1' + 2u_1' = 3u_1' = -5\cos t \Rightarrow u_1' = -\frac{5}{3}\cos t$$

$$u_2' = 2u_1' = -\frac{10}{3}\cos t$$

$$u_1(t) = \int -\frac{5}{3}\cos t dt = -\frac{5}{3}\sin t$$

$$u_2(t) = \int -\frac{10}{3}\cos t dt = -\frac{10}{3}\sin t$$

Частное решение

$$X_p(t) = u_1 X_1 + u_2 X_2 = \left(-\frac{5}{3}\sin t\right)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \left(-\frac{10}{3}\sin t\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\sin t\\0\end{pmatrix}$$

Финальное решение

$$y = y_{\text{общ}} + y_{\text{частн}} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\sin t\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1' e^{2t} + u_2' e^{-t} = 0 \\ u_1'(2e^{2t}) + u_2'(-e^{-t}) = -5\cos t \end{cases}$$