

Однородные

1. Если $k_1 \neq k_2$ - действительные и различные, то

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$$

2. Если $k_1 = k_2$ - действительные и совпавшие, то

$$y = e^{k_1 x} \cdot (C_1 + C_2 x)$$

3. Если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - комплексные корни, то

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x).$$

Неоднородные

1. Специальный вид правой части:

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}.$$

- Если α не является корнем характеристического уравнения, то

$$y_{\text{частное}} = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x).$$

- Если α - корень характеристического уравнения кратности S ($S \in \{1, 2\}$), то

$$y_{\text{частное}} = x^S \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x).$$

2. Специальный вид правой части:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x), \quad N = \max(n, m).$$

- Если $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, то

$$y_{\text{частное}} = e^{\alpha x} \cdot (P_N(x) \cdot \cos \beta x + Q_N(x) \cdot \sin \beta x).$$

- Если $\alpha \pm \beta i$ - корни характеристического уравнения, то

$$y_{\text{частное}} = x \cdot e^{\alpha x} \cdot (P_N(x) \cdot \cos \beta x + Q_N(x) \cdot \sin \beta x).$$

Метод Лагранжа (Метод вариации постоянных)

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \quad (1)$$

Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к однородным

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \quad (2)$$

если $c_1 = c_2 = 0$, то Equation 2 – однородное дифференциальное уравнение.

Пусть c_1 и c_2 не равны нулю (или одно из них)

Замена

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta, \quad (3)$$

где u, v – новые переменные, α, β – постоянные.

$$dx = du, \quad dy = dv \quad (4)$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha_1(u + \alpha) + b_1(v + \beta) + c_1}{a_2(u + \alpha) + b_2(v + \beta) + c_2} \quad (5)$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2u + b_2v + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)} \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v} \quad (8)$$

Если Equation 7 не имеет решений, то есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad (9)$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k, \quad a_1 = k \cdot a_2, \quad b_1 = k \cdot b_2 \quad (10)$$

Тогда

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \quad (11)$$

$$y' = \frac{ka_2x + kb_2y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \quad (12)$$

$$y' = \frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \quad (13)$$

Замена $a_2x + b_2y = z$

$$y' = \frac{kz + c_1}{z + c_2} \quad (14)$$

Метод Бернулли

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \quad (15)$$

$$y' + y \cdot \underbrace{\cos x}_{p(x)} = \underbrace{\sin x \cdot \cos x}_{g(x)} \quad (16)$$

$$y = u \cdot v, \text{ где } u = u(x), v = v(x) \quad (17)$$

$$y = \underbrace{\frac{y}{v}}_u \cdot v = u \cdot v \quad (18)$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (19)$$

Подставим в изначальный пример

$$\underbrace{u' \cdot v + u \cdot v'}_{y'} + \underbrace{u \cdot v}_{y} \cdot \cos x = \sin x \cos x \quad (20)$$

$$u' \cdot v + u \cdot \underbrace{(v' + v \cdot \cos x)}_{=0} = \sin x \cos x \quad (21)$$

$$v' + v \cdot \cos x = 0 \quad (22)$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \cos x \, dx \quad (23)$$

$$\ln|v| = -\sin x, \quad c = 0 \quad (24)$$

$$v = e^{-\sin x} \quad (25)$$

Теперь подставим v

$$u' \cdot \underbrace{e^{-\sin x}}_v = \sin x \cos x \quad (26)$$

$$\int du = \int e^{\sin x} \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx \quad (27)$$

$$u = \sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C \quad (28)$$

$$y = u \cdot v, \quad y = (\sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C) \cdot e^{-\sin x} \quad (29)$$

$$y = \sin x - 1 + C \cdot e^{-\sin x} \quad (30)$$

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (31)$$

$$y' + p(x)y = 0 \quad (32)$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad | \cdot \frac{dx}{y} \quad (33)$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx \quad (34)$$

$$\ln|y| = - \int p(x)dx + \ln|C_1| \quad (35)$$

$$\ln|y| - \ln|C_1| = - \int p(x)dx \quad (36)$$

$$\ln\left|\frac{y}{C_1}\right| = - \int p(x)dx \quad (37)$$

$$\left|\frac{y}{C_1}\right| = e^{-\int p(x)dx} \quad (38)$$

$$y = \pm C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx} \quad (39)$$

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx} \quad (40)$$

Полагаем $C = C(x)$

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \quad (41)$$

Потом можно найти y' и подставить y и y' в изначальное уравнение и найти $C(x)$. Готовая формула выглядит вот так

$$y = \left(\int g(x) \cdot \exp\left(\int p(x)dx\right) \cdot dx + C \right) \cdot \exp\left(-\int p(x)dx\right) \quad (42)$$

Уравнение в полных дифференциалах

$$y' = -\frac{e^x + y + \sin y}{e^y + x + x \cdot \cos y} \quad (43)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x + y + \sin y}{e^y + x + x \cdot \cos y} \quad (44)$$

$$\underbrace{(e^x + y + \sin y)dx}_{P(x,y)} + \underbrace{(e^y + x + x \cdot \cos y) \cdot dy}_{Q(x,y)} = 0 \quad (45)$$

$$P(x, y) = e^x + y + \sin y \quad (46)$$

$$Q(x, y) = e^y + x + x \cdot \cos y \quad (47)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y \quad (48)$$

Значит уравнение в полных дифференциалах

$$du = (e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x \cdot \cos y)dy \quad (49)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy \quad (50)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y + \sin y \quad (51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y + x + x \cdot \cos y \quad (52)$$

$$u(x, y) = \int (e^x + y + \sin y)dx = e^x + y \cdot x + \sin y \cdot x + \varphi(y) \quad (53)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (e^x + y \cdot x + \sin y \cdot x + \varphi(y))'_y = x + x \cdot \cos y + \varphi'(y) \quad (54)$$

$$x + x \cdot \cos y + \varphi'(y) = e^y + x + x \cos y \quad (55)$$

$$\varphi'(y) = e^y \Rightarrow \int e^y dy \quad (56)$$

$$\varphi(y) = e^y + C \quad (57)$$

$$u(x, y) = e^x + y \cdot x + \sin y \cdot x + e^y + C \quad (58)$$

$$e^x + y \cdot x + \sin y \cdot x + e^y = C_2 \quad (59)$$

Интегрирующий множитель

$$\mu(x, y) - \text{интегрирующий множитель} \quad (60)$$

$$\mu(x, y) \cdot P(x, y)dx + \mu(x, y) \cdot Q(x, y)dy = 0 \quad (61)$$

$$\frac{\partial(\mu(x, y) \cdot P(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x, y) \cdot Q(x, y))}{\partial x} \quad (62)$$

$$\mu = \mu(x, y), \quad P = P(x, y), \quad Q = Q(x, y) \quad (63)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (64)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P - \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q = \mu \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (65)$$

1) Пусть $\mu = \mu(x)$

$$-\frac{d\mu}{dx} \cdot Q = \mu \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (66)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dx \quad (67)$$

$$\ln \mu = \int \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot dx \quad (68)$$

$$\mu(x) = \exp \left(\underbrace{\int \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot dx}_{=F_1(x)} \right) \quad (69)$$

При этом

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = F_1(x) \quad (70)$$

То есть зависеть только от x .

2) Пусть $\mu = \mu(y)$

Размышляя аналогично, получим формулу

$$\mu(y) = \exp \left(\int \underbrace{\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{=F_2(y)} dy \right) \quad (71)$$

При этом

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = F_2(y) \quad (72)$$

То есть зависеть только от y .