

# Содержание

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Электростатика .....                                                                     | 5  |
| Закон Кулона. Принцип суперпозиции. ....                                                 | 5  |
| №1 (done) .....                                                                          | 5  |
| №2 (done) .....                                                                          | 5  |
| №3 (done) .....                                                                          | 7  |
| №4 (done) .....                                                                          | 8  |
| №5 (done) .....                                                                          | 9  |
| №6 (done) .....                                                                          | 11 |
| №7 .....                                                                                 | 11 |
| №8 (done) .....                                                                          | 12 |
| №9 (done) .....                                                                          | 12 |
| №10 (done) .....                                                                         | 13 |
| №11 (done) .....                                                                         | 13 |
| №12 (done) .....                                                                         | 13 |
| №13 (done) .....                                                                         | 14 |
| №14 .....                                                                                | 14 |
| №15 .....                                                                                | 14 |
| №16 .....                                                                                | 14 |
| №17 .....                                                                                | 15 |
| №18 .....                                                                                | 15 |
| Расчет напряженности непрерывного распределения заряда<br>на основе теоремы Гаусса. .... | 15 |
| №1 .....                                                                                 | 15 |
| №2 .....                                                                                 | 16 |
| №3 .....                                                                                 | 16 |
| №4 .....                                                                                 | 16 |
| №5 .....                                                                                 | 17 |
| №6 .....                                                                                 | 17 |
| №7 .....                                                                                 | 17 |
| №8 .....                                                                                 | 18 |
| №9 .....                                                                                 | 18 |
| Работа кулоновских сил. Потенциал электростатического<br>поля. ....                      | 18 |
| №1 (done) .....                                                                          | 18 |
| №2 (done) .....                                                                          | 18 |
| №3 (done) .....                                                                          | 19 |
| №4 (done) .....                                                                          | 19 |
| №5 (done) .....                                                                          | 19 |
| №6 (done) .....                                                                          | 20 |
| №7 (done) .....                                                                          | 20 |

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| №8 (done) .....                                        | 20 |
| №9 (done) .....                                        | 20 |
| №10 .....                                              | 21 |
| №11 .....                                              | 21 |
| №12 .....                                              | 22 |
| №13 .....                                              | 22 |
| №14 .....                                              | 23 |
| №15 .....                                              | 23 |
| №16 .....                                              | 23 |
| Электрический диполь. ....                             | 23 |
| №1 (done) .....                                        | 23 |
| №2 .....                                               | 24 |
| №3 .....                                               | 24 |
| №4 .....                                               | 25 |
| №5 .....                                               | 25 |
| №6 .....                                               | 26 |
| №7 .....                                               | 26 |
| №8 .....                                               | 26 |
| Электростатическое поле при наличии диэлектриков. .... | 27 |
| №1 .....                                               | 27 |
| №2 .....                                               | 27 |
| №3 .....                                               | 27 |
| №4 .....                                               | 28 |
| №5 .....                                               | 28 |
| Электростатическое поле при наличии проводников. ....  | 28 |
| №1 .....                                               | 28 |
| №2 .....                                               | 29 |
| №3 .....                                               | 29 |
| №4 .....                                               | 29 |
| №5 .....                                               | 29 |
| №6 .....                                               | 30 |
| Энергия электростатического поля. ....                 | 30 |
| №1 .....                                               | 30 |
| №2 .....                                               | 30 |
| №3 .....                                               | 30 |
| №4 .....                                               | 31 |
| №5 (done) .....                                        | 31 |
| Конденсаторы. ....                                     | 31 |
| №1 (done) .....                                        | 31 |
| №2 (done) .....                                        | 32 |
| №3 (done) .....                                        | 32 |
| №4 .....                                               | 32 |

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| Постоянное магнитное поле .....                                    | 33 |
| Индукция магнитного поля. Закон Био-Савара .....                   | 33 |
| №1 .....                                                           | 33 |
| №2 .....                                                           | 34 |
| №3 .....                                                           | 35 |
| №4 .....                                                           | 37 |
| №5 .....                                                           | 39 |
| №6 .....                                                           | 40 |
| №7 .....                                                           | 43 |
| №8 .....                                                           | 43 |
| №9 .....                                                           | 44 |
| №10 .....                                                          | 45 |
| Закон полного тока .....                                           | 46 |
| №1 .....                                                           | 46 |
| №2 .....                                                           | 46 |
| №3 .....                                                           | 48 |
| №4 .....                                                           | 49 |
| №5 .....                                                           | 51 |
| №6 .....                                                           | 51 |
| №7 .....                                                           | 53 |
| №8 .....                                                           | 54 |
| №9 .....                                                           | 57 |
| Магнитное поле при наличии Магнетиков. Магнитный<br>момент. ....   | 58 |
| №1 .....                                                           | 58 |
| №2 .....                                                           | 58 |
| №3 .....                                                           | 60 |
| №4 .....                                                           | 61 |
| №5 .....                                                           | 61 |
| №6 .....                                                           | 61 |
| №7 .....                                                           | 62 |
| №8 .....                                                           | 63 |
| №9 .....                                                           | 64 |
| Частица в магнитном поле .....                                     | 65 |
| №1 .....                                                           | 65 |
| №2 .....                                                           | 65 |
| Работа по перемещению проводника с током в магнитном<br>поле ..... | 67 |
| №1 .....                                                           | 67 |
| №2 .....                                                           | 67 |
| Электромагнитная индукция .....                                    | 70 |

|                                                 |    |
|-------------------------------------------------|----|
| Индукция токов. Закон электромагнитной индукции |    |
| Фарадея .....                                   | 70 |
| №1 .....                                        | 70 |
| №2 .....                                        | 70 |
| №3 .....                                        | 72 |
| №4 .....                                        | 73 |
| №5 .....                                        | 74 |
| №6 .....                                        | 75 |
| №7 .....                                        | 77 |
| №8 .....                                        | 78 |
| №9 .....                                        | 79 |

## Электростатика

### Закон Кулона. Принцип суперпозиции.

#### №1 (done)

**Условие:** На шёлковой нити подвешен шар массы  $m$ , заряд которого  $q_1^+$ . Рассчитать на какое расстояние необходимо поднести положительно заряженный шар, с зарядом  $q_2^+$ , чтобы сила натяжения нити уменьшилась вдвое.

**Решение:**

**Ответ:**  $l = \sqrt{\frac{2kq_1^+q_2^+}{mg}}$ .

#### №2 (done)

**Условие:** К потолку в одной точке на шёлковых нитях длины  $l$  подвешены два одинаковых шара обладающих одинаковым зарядом  $q$  и массой  $m$ . Расстояние между шарами  $x \ll l$ . Рассчитать скорость утечки зарядов  $\frac{dq}{dt}$  с каждого шара, если скорость их сближения, как функция от  $x$  имеет вид:  $v(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x}}$  ( $\alpha$  – некоторая постоянная).

**Решение:**

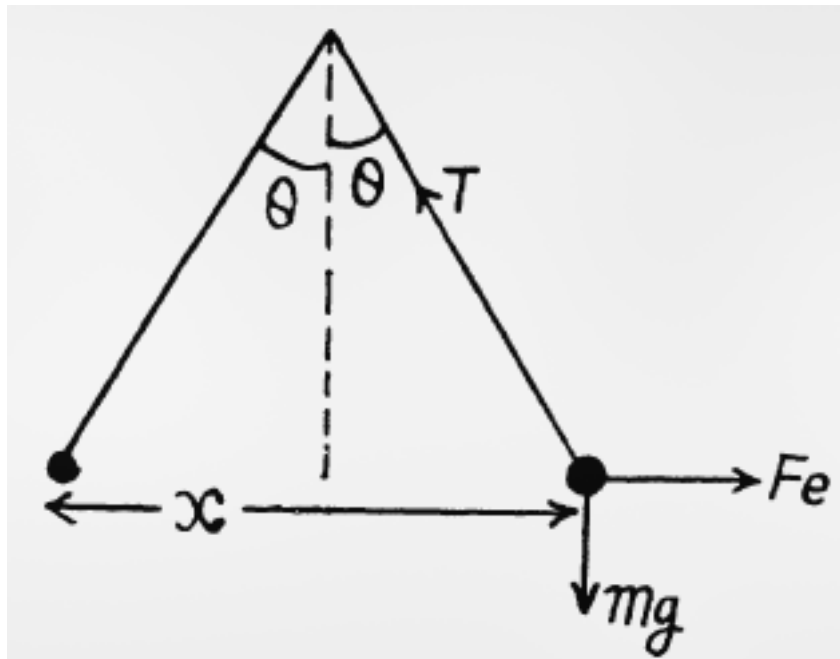


Рис. 1. Поясняющий рисунок.

Пусть шары отклоняются на угол  $\theta$ , от вертикали, когда расстояние между ними равно  $x$ .

Применяя второй закон Ньютона для любого шарика, получим,

$$T \cos \theta = mg \quad (1)$$

и

$$T \sin \theta = F_e \quad (2)$$

Из уравнений 1 и 2

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_e}{mg} \quad (3)$$

Из рисунка

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \approx \frac{x}{2l} \quad x \ll l \quad (4)$$

Из уравнения 3 и 4

$$F_e = \frac{mgx}{2l} \quad \text{или} \quad \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{mgx}{2l} \quad (5)$$

$$q^2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 mgx^3}{l} \quad (6)$$

Дифференцируя уравнение 6 по времени

$$2q \frac{dq}{dt} = \frac{2\pi\varepsilon_0 mg}{l} 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad (7)$$

Согласно задаче  $\frac{dx}{dt} = v = \frac{a}{\sqrt{x}}$  (скорость сближения  $\frac{dx}{dt}$ ).

Итак,  $\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mg}{l}} x^3 \frac{dq}{dt} = \frac{3\pi\varepsilon_0 mg}{l} x^2 \frac{a}{\sqrt{x}}$

Следовательно,  $\frac{dq}{dt} = \frac{3}{2} a \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mg}{l}}$ .

Ответ:  $\frac{dq}{dt} = \frac{3\alpha}{2} \sqrt{\frac{mg}{2kl}}$ .

### №3 (done)

**Условие:** Радиус векторы двух положительных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  соответственно  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ . Рассчитать отрицательный заряд  $q_3$  и его радиус-вектор  $\vec{r}_3$  точки в которую его надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из зарядов была равна 0.

**Решение:**

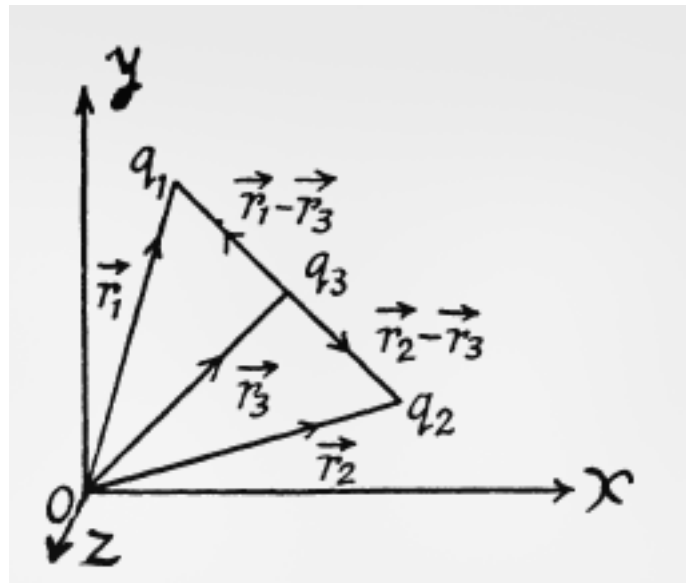


Рис. 2. Поясняющий рисунок.

Выберем координатные оси, как показано на рисунке, и зафиксируем три заряда,  $q_1, q_2$  и  $q_3$  с векторами положения  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  и  $\vec{r}_3$  соответственно.

Теперь для равновесия  $q_3$

$$\frac{+q_2 q_3 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + \frac{q_1 q_3 (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2} = 0 \quad (8)$$

или,  $\frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} = \frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2}$

потому что  $\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2}$

или,  $\sqrt{q_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) = \sqrt{q_1}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)$

или,  $\vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_2}\vec{r}_1 + \sqrt{q_1}\vec{r}_2}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}$

Для равновесия  $q_1$ ,

$$\frac{q_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = 0 \quad (9)$$

или,  $q_3 = \frac{-q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2$

Подставляя значение  $\vec{r}_3$ , получаем,

$$q_3 = \frac{-q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}. \quad (10)$$

**Ответ:**  $q_3 = -\frac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}, \vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_1}\vec{r}_2 + \sqrt{q_2}\vec{r}_1}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}.$

#### №4 (done)

**Условие:** Точечный заряд  $q = 50$  мкКл расположен в точке с радиус-вектором  $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ . Найти напряжённость  $\vec{E}$  электрического поля и её модуль в точке с радиус-вектором  $\vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$ . Координаты векторов заданы в метрах.

**Решение:**



Рис. 3. Поясняющий рисунок.

$$\vec{z} - \vec{z}_0 = 6\vec{i} - 8\vec{j} \quad (11)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad (12)$$

$$z = |\vec{z} - \vec{z}_0| = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ м} \quad (13)$$

$$E = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-5}}{100} = 4500 \text{ В/м} = 4.5 \text{ кВ/м} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{z} - \vec{z}_0}{|\vec{z} - \vec{z}_0|} \cdot E = (0.6i - 0.8j) \cdot 4.5 = \\ &= (2.7i - 3.6j) \text{ кВ/м}. \end{aligned} \quad (15)$$

**Ответ:**  $E = 4.5 \text{ кВ/м}$ ;  $\vec{E} = 2.7\vec{i} - 3.6\vec{j}$ .

### №5 (done)

**Условие:** Точечные заряды  $q^{(+)}$  и  $q^{(-)}$  расположены по углам квадрата (Рис. 4), диагональ которого равна  $2l$ . Найти модуль напряжённости электрического поля в точке, отстоящей на расстояние  $x$  от плоскости квадрата, симметрично относительно его вершин.

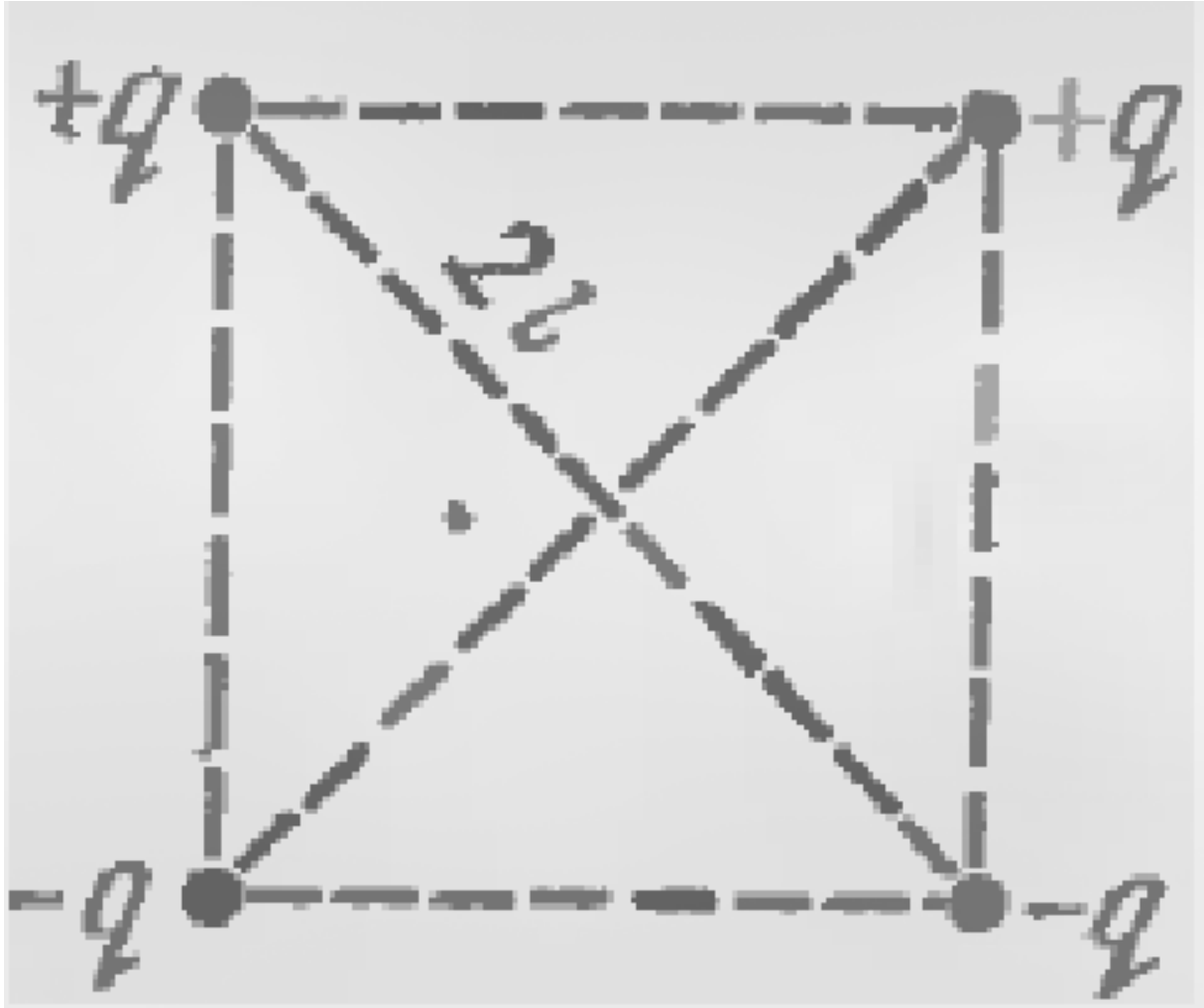


Рис. 4. Поясняющий рисунок.

Решение:

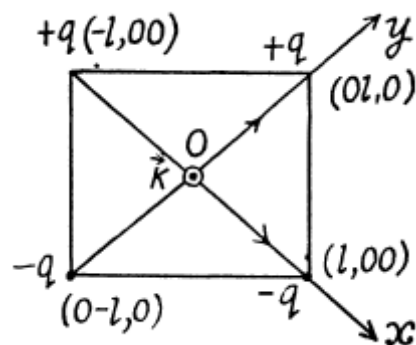


Рис. 5. Пояснительный рисунок.

Зафиксируем систему координат, взяв точку пересечения диагоналей как начало координат, а  $\vec{k}$  - нормальное направление, выходящее из плоскости фигуры. Следовательно, искомая напряженность поля:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l\vec{i} + x\vec{k}}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
&+ \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l(-\vec{i}) + x\vec{k}}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
&+ \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l\vec{j} + x\vec{k}}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
&+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l(-\vec{j}) + x\vec{k}}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} [2l\vec{i} - 2l\vec{j}]
\end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом,

$$E = \frac{ql}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{17}$$

**Ответ:**  $E = k \frac{2\sqrt{2}ql}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

### №6 (done)

**Условие:** В центре равностороннего треугольника расположен заряд  $q_0 = 10$  нКл. Рассчитайте, какие одинаковые заряды  $q_1$  необходимо расположить в вершинах этого треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю.

**Решение:**

**Ответ:**  $q_1 = -17$  нКл.

### №7

**Условие:** Система состоит из протона  $p$  и электрона  $e$ , расстояние между которыми  $r = 50$  пм. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля, создаваемого этими частицами в точках  $A$  и  $B$ , когда эти частицы находятся в положении, изображённом на (Рис. 6).

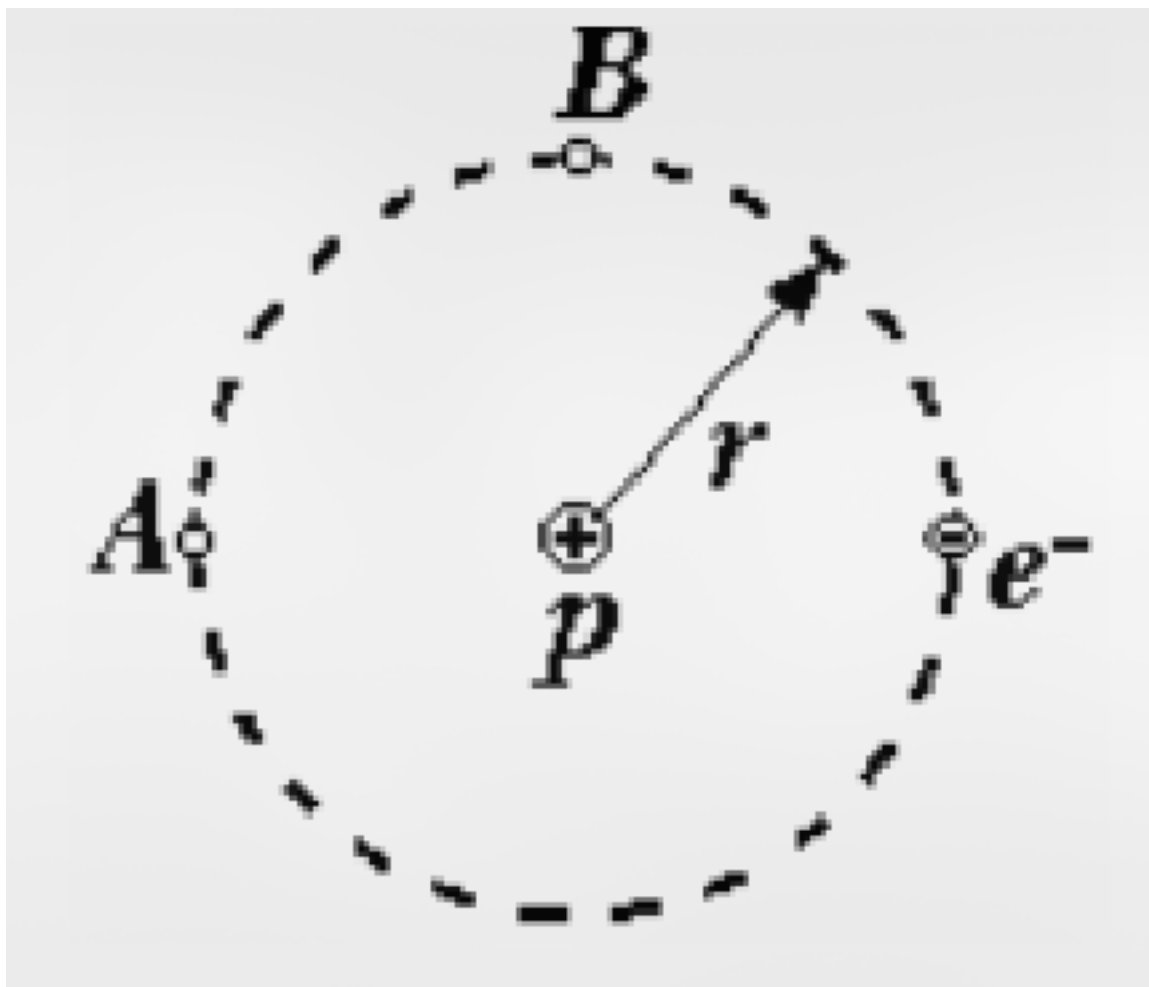


Рис. 6. Поясняющий рисунок.

**Решение:**

**Ответ:**  $E_A = 4.3 \cdot 10^{11}$  В/м,  $E_B = 4.2 \cdot 10^{11}$  В/м.

### №8 (done)

**Условие:** В вершинах квадрата со сторонами  $a = 0.08$  м расположены одинаковые заряды  $q^{(+)} = 5$  нКл. Рассчитайте модуль напряжённости электрического поля в середине одной из сторон квадрата.

**Решение:**

**Ответ:**  $E \approx 10$  кВ/м.

### №9 (done)

**Условие:** Свинцовый шарик диаметр которого  $d = 7$  мм поместили в однородное электрическое поле в глицериновый раствор. Рассчитать

заряд этого шарика, если электрическое поле направленно вверх, а модуль его напряжённости  $E = 9 \text{ кВ/см}$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $q \approx 20 \text{ нКл}$ .

### №10 (done)

**Условие:** Кусок тонкой проволоки изогнутый полукольцом радиусом  $R$  имеет равномерно распределённый заряд  $q$ . Рассчитать модуль напряжённости электрического поля  $E$  в центре этого полукольца.

**Решение:**

**Ответ:**  $E = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$ .

### №11 (done)

**Условие:** Найти модуль напряжённости электрического поля на оси заряженного тонкого кольца, как функцию расстояния до центра кольца –  $E(z)$ , если заряд кольца равен  $q$ , а радиус  $R$ . Исследовать полученную зависимость при  $z \gg R$ . Рассчитать максимальное значение модуля напряжённости  $E_{\max}$  и соответствующую ему координату точки на оси  $OZ$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $E(z) = \frac{kqz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$ ,  $z_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$ ,  $E_{\max} = \frac{2kq}{3^{\frac{3}{2}} R^2}$ .

### №12 (done)

**Условие:** Рассчитать модуль силы взаимодействия между тонким кольцом радиуса  $R$ , заряд которого равен  $q$  и длинной равномерно заряженной нитью, имеющей линейную плотность заряда равную  $\lambda$ , если нить расположена вдоль оси симметрии кольца, так, что один её конец совпадает с центром кольца.

**Решение:**

**Ответ:**  $F = \frac{kq\lambda}{R}$ .

### №13 (done)

**Условие:** Тонкий стержень длины  $l$  имеет равномерно распределённый заряд  $q$ . Рассчитать, модуль напряжённости электрического поля в точке расположенной на расстоянии  $a$  от одного из концов стержня, по линии стержня.

**Решение:**

**Ответ:**  $E = \frac{kq}{a(l+a)}.$

### №14

**Условие:** Линейная плотность тонкого заряженного кольца радиуса  $R$  зависит от азимутального угла по закону  $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$  ( $\lambda_0$  – постоянная). Рассчитать модуль напряжённости электрического поля в центра кольца и на оси симметрии кольца в зависимости от расстояния до центра кольца.

**Решение:**

**Ответ:**  $E_O = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}, E(z) = \frac{\lambda_0 R^2}{4\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$

### №15

**Условие:** Система состоит из равномерно заряженного стержня длины  $2a$ , расположенного в вакууме. Рассчитать модуль вектора напряжённости как функцию расстояния  $r$  от центра стержня до точки на прямой:

- перпендикулярной стержню и проходящей через его центр;
- совпадающей с осью стержня, при  $r > a$ .

Заряд стержня равен  $q$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $E = \frac{kq}{r\sqrt{a^2 + r^2}}, E = \frac{kq}{r^2 - a^2}.$

### №16

**Условие:** Сфера радиуса  $R$  заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma = (\vec{r}, \vec{a})$ , где  $\vec{a}$  некоторый постоянный вектор, а  $\vec{r}$  – радиус вектор

точки на сфере относительно её центра. Рассчитать вектор напряжённости электрического поля в центре сферы.

**Решение:**

**Ответ:**  $\vec{E} = \frac{aR}{3\varepsilon_0} \vec{e}_z$ .

### №17

**Условие:** Рассчитать вектор напряжённости в центре заряженного шара радиуса  $R$  если объёмная плотность заряда шара  $\rho = (\vec{r}, \vec{a})$ , где  $\vec{a}$  некоторый постоянный вектор, а  $\vec{r}$  – радиус вектор произвольной точки шара, проведённый из его центра.

**Решение:**

**Ответ:**  $\vec{E} = \frac{R^2 a}{6\varepsilon_0} \vec{e}_z$ .

### №18

**Условие:** Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность круглого сечения заряжена так, что поверхностная плотность зависит только от угла  $\varphi$  цилиндрической системы координат:  $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$ . Рассчитать модуль вектора в произвольной точке, лежащей на оси цилиндра.

**Решение:**

**Ответ:**  $E = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ .

**Расчет напряженности непрерывного распределения заряда на основе теоремы Гаусса.**

### №1

**Условие:** Напряжённость электрического поля, как функция координат имеет вид:  $\vec{E} = \frac{\alpha x \vec{i} + \alpha y \vec{j}}{x^2 + y^2}$ , где  $\alpha = \text{const}$ , а  $\vec{i}, \vec{j}$  – орты координатных осей  $OX$  и  $OY$  соответственно. Найти поток вектора  $\vec{E}$  через сферу радиуса  $R$  с центром в начале координат.

**Решение:**

**Ответ:**  $P = 4\pi\alpha R$ .

## №2

**Условие:** Объёмная плотность положительно заряженного шара радиуса  $R$  зависит только от расстояния до центра шара:  $\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ , где  $\rho_0 = \text{const}$ . Найти:

- модуль напряжённости электрического поля внутри и вне шара, как функцию  $r$ ;
- максимальное значения модуля напряжённости  $E_{\text{max}}$  и соответствующее ему значение  $r_{\text{max}}$ .

Диэлектрическая проницаемость всюду  $\varepsilon = 1$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $E_r(r \leq R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right)$ ,  $E_r(r \geq R) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$ ,  $r_{\text{max}} = \frac{2}{3}R$ ,  $E_r(r_{\text{max}}) = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$ .

## №3

**Условие:** Система состоит из равномерно заряженного шара радиуса  $R = 0.2$  м, объёмная плотность которого  $\rho = 20$  нКл/м<sup>3</sup>. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля:

- на расстоянии  $r = 0.1$  м от центра шара;
- на поверхности шара;
- на расстоянии  $r = 0.25$  м от центра шара.

Диэлектрическая проницаемость материала из которого состоит шар  $\varepsilon = 5$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $E(0.1) \approx 15$  В/м,  $E(0.2) \approx 30$  В/м ( $r \leq R$ ),  $E(0.25) \approx 96$  В/м,  $E(0.2) \approx 151$  В/м ( $r \geq R$ ).

## №4

**Условие:** Шар радиуса  $R$  заряженный равномерно помещён в некоторую среду диэлектрическая проницаемость которой  $\varepsilon = 1$ . Среда заполнена зарядом, объёмная плотность которого  $\rho = \frac{\alpha}{r}$ , где  $\alpha$  –

постоянная, а  $r$  – расстояние от центра шара. Рассчитать заряд шара при котором модуль напряжённости электрического поля вне шара не зависит от  $r$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $q = 2\pi\alpha R^2$ .

### №5

**Условие:** Система представлена областью пространства. По пространству распределён заряд, плотность которого зависит от расстояния до центра по закону  $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$ , где  $\alpha$  некоторая постоянная. Найти модуль напряжённости, как функцию  $r$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $E_r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2} (1 - \exp(-\alpha r^3))$ .

### №6

**Условие:** Рассчитать напряжённость электрического поля бесконечной плоскости, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда –  $\sigma$ . Расчёт произвести 2-мя способами:

- с использованием закона Кулона;
- с использованием теоремы Гаусса.

**Решение:**

**Ответ:**  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$ .

### №7

**Условие:** Рассчитать напряжённость электростатического поля создаваемого бесконечной длинной нитью, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда –  $\lambda$ . Расчёт произвести 2-мя способами:

- с использованием закона Кулона;
- с использованием теоремы Гаусса.

**Решение:**

**Ответ:**  $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{n}$ .

### №8

**Условие:** Рассчитать вектор напряжённости электростатического поля в области пересечения двух шаров, равномерно заполненных разноименными зарядами с объёмной плотностью  $\rho$  и  $-\rho$ . Расстояния между центрами шаров характеризуется вектором  $\vec{a}$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{a}$ .

### №9

**Условие:** Напряжённость аксиально симметричного электростатического поля зависит от расстояния до источника по закону  $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{r}$  ( $\alpha$  – постоянная). Рассчитать заряд внутри сферы радиуса  $R$ , центр которой расположен на источнике.

**Решение:**

**Ответ:** хз.

**Работа кулоновских сил. Потенциал электростатического поля.**

### №1 (done)

**Условие:** Потенциал электрического поля зависит от координат  $x, y$  по закону:

- $\varphi(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)$ ,
- $\varphi(x, y) = \alpha xy$ ,

где  $\alpha = \text{const}$ . Найти вектор напряжённости этих полей.

**Решение:**

**Ответ:**  $\vec{E} = -2\alpha\vec{r}$ ,  $\vec{E} = -\alpha y\vec{i} - \alpha x\vec{j}$ .

### №2 (done)

**Условие:** Найти потенциалы, как функции координат следующих электрических полей:

а)  $\vec{E} = a(y\vec{i} + x\vec{j})$ ;

б)  $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 - y^2)\vec{j}$ ;

с)  $\vec{E} = ay\vec{i} + (ax + bz)\vec{j} + by\vec{k}$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $\varphi_a = -axy + C, \quad \varphi_b = ay\left(\frac{y^2}{3} - x^2\right) + C, \quad \varphi_c = -y(ax + bz) + C.$

### №3 (done)

**Условие:** Потенциал электрического поля имеет вид:  $\varphi(x, y, z) = \alpha(xy - z^2)$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Найти проекцию напряжённости электрического поля в точке  $M\{2, 1, -3\}$  на направление вектора  $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $E_a = \frac{(\vec{E}, \vec{a})}{a} \approx -6\alpha.$

### №4 (done)

**Условие:** Тонкий кусок проволоки изогнутый полукольцом имеет равномерно распределённый заряд, линейная плотность которого  $\lambda = 5 \text{ нКл/м}$ . Рассчитать потенциал  $\varphi$ , создаваемый зарядом проволоки в центре полукольца.

**Решение:**

**Ответ:**  $\varphi = \pi k \lambda \approx 0.14 \text{ кВ}.$

### №5 (done)

**Условие:** Тонкий стержень длиной  $l = 10 \text{ см}$  заряжен равномерно. Рассчитать потенциал  $\varphi$  электрического поля в точке, расположенной на оси стержня на расстоянии  $a = 50 \text{ см}$ . от его ближайшего конца, если полный заряд стержня  $q = 10 \text{ мкКл}$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $\varphi = \frac{kq}{l} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right) \approx 0.16 \text{ МВ}.$

### №6 (done)

**Условие:** Тонкая проволока свёрнутая в кольцо несёт равномерный заряд  $q = 20$  нКл. Рассчитать потенциал электрического поля кольца в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии  $a = 50$  см от центра кольца. Радиус кольца  $R = 8$  см.

**Решение:**

**Ответ:**  $\varphi = \frac{q}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+a^2}} \approx 0.36$  кВ.

### №7 (done)

**Условие:** Рассчитать разность потенциалов между центрами тонких проволочных колец радиуса  $R = 30$  см, если центры колец лежат на одной оси, а расстояние между центрами  $l = 52$  см. Заряды колец равны  $q$  и  $-q$ .  $|q| = 0.4$  мкКл.

**Решение:**

**Ответ:**  $\Delta\varphi = 2kq\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+l^2}}\right) \approx 12$  кВ.

### №8 (done)

**Условие:** Кольцо радиуса  $R$  заряжено неравномерно. Рассчитать работу, совершаемую при перемещении заряда  $q_0$  из центра кольца в произвольную точку лежащую на оси кольца, если полный заряд кольца равен  $q$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $A = kqq_0\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$ .

### №9 (done)

**Условие:** Рассчитать разность потенциалов между точками (1) и (2) электрического поля, создаваемого тонкой равномерно заряженной нитью бесконечной длины, если известно, что точка (2) расположена в 7 раз дальше от нити, чем точка (1). Линейная плотность заряда нити  $\lambda = 9$  мкКл/м.

**Решение:**

Ответ:  $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi} \ln 7 \approx 0.32$  МВ.

### №10

**Условие:** Провод, изображённый на (Рис. 7) заряжен равномерно с линейной плотностью  $\lambda = 0.5$  нКл/м. Длина прямого участка  $a = 50$  см, радиус полукольца  $R = 20$  см. Рассчитать, какую работу совершат электрические силы при удалении точечного заряда  $q = 10$  нКл от центра полукольца на бесконечность.

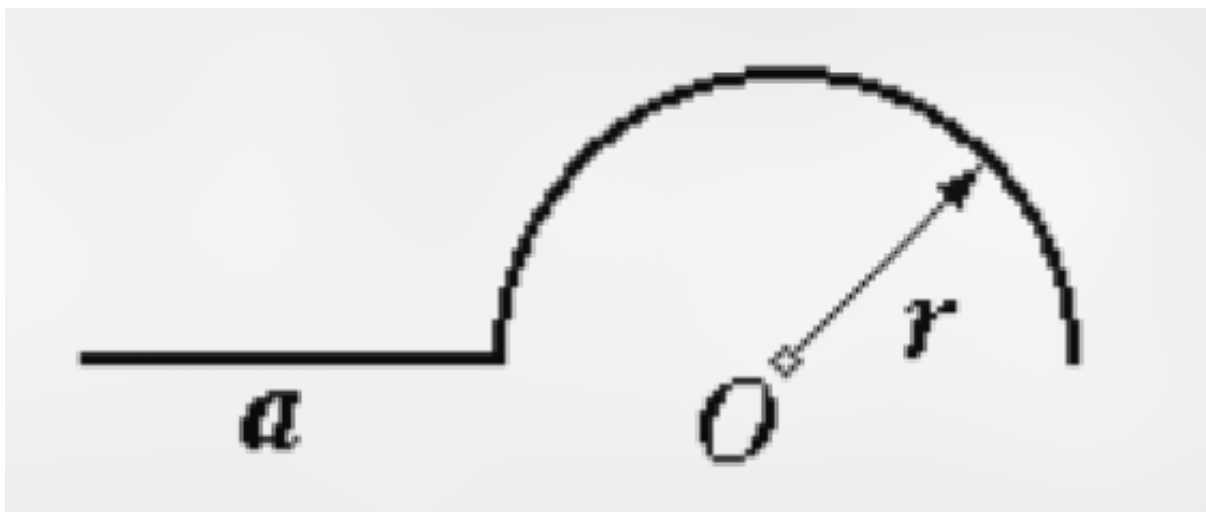


Рис. 7. Поясняющий рисунок.

**Решение:**

Ответ:  $A = kq\lambda\left(\pi + \ln\left(\frac{R+a}{a}\right)\right) \approx 0.2$  мкДж.

### №11

**Условие:** Электрическое поле создано равномерно заряженным шаром радиуса  $R = 20$  см. Объёмная плотность заряда  $\rho = 10$  нКл/м<sup>3</sup>. Рассчитать разность потенциалов между точками, лежащими на расстоянии  $r_1 = 1$  см и  $r_2 = 25$  см от центра шара соответственно. Диэлектрическая проницаемость всюду равна 1.

**Решение:**

Ответ:  $\Delta\varphi \approx 11$  В.

### №12

**Условие:** В вершинах равностороннего треугольника, сторона которого  $a = 5$  см, расположены 3 точечных заряда  $q$  и  $-2q$ , как это показано на (Рис. 8). Рассчитать работу электрических сил при перемещении заряда  $-2q$  из точки  $B$  в точку  $C$  если  $q = 3$  нКл.

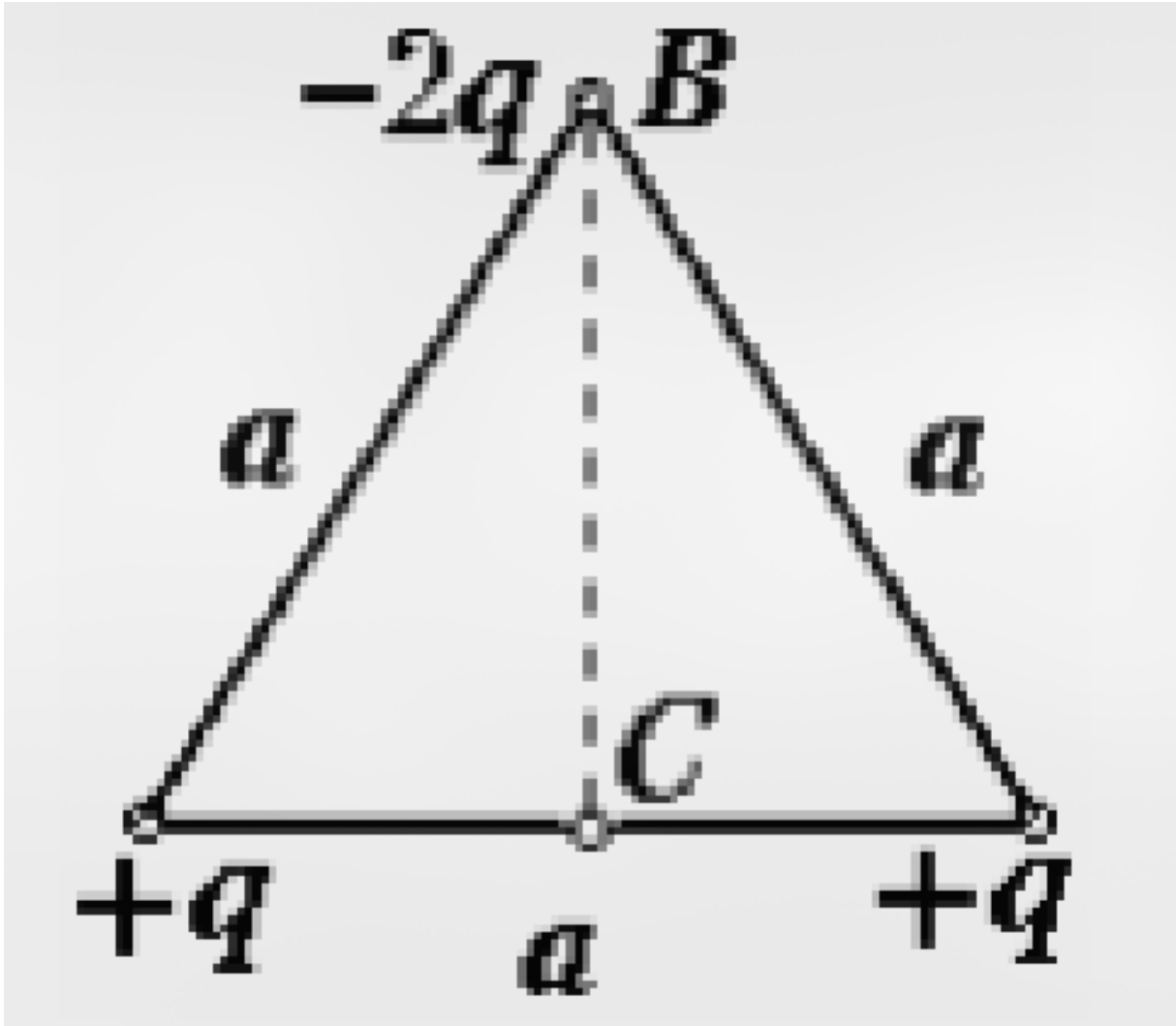


Рис. 8. Пояснительный рисунок.

**Решение:**

**Ответ:**  $A = \frac{4kq^2}{a} \approx 6.5$  мкДж.

### №13

**Условие:** Коническая поверхность, радиус основания которой равен  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Рассчитать потенциал электростатического поля в вершине конуса.

**Решение:**

**Ответ:**  $\varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$ .

#### **№14**

**Условие:** Рассчитать потенциал в точке, расположенной на краю тонкого диска, радиуса  $R$ , если поверхностная плотность заряда, распределённого по диску равна  $\sigma$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $\varphi = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$ .

#### **№15**

**Условие:** Потенциал электростатического поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до центра шара:  $\varphi = ar^2 + b$ . Рассчитать объёмную плотность заряда, как функцию  $r$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $\rho(r) = -6\varepsilon_0 a$ .

#### **№16**

**Условие:** Заряд  $q$  распределён равномерно по объёму шара радиуса  $R$ . Рассчитать:

- потенциал в центре шара;
- потенциал внутри шара как функцию  $r$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $\varphi(0) = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}, \quad \varphi(r) = \varphi(0)\left(1 - \frac{r^2}{3R^3}\right)$

#### **Электрический диполь.**

#### **№1 (done)**

**Условие:** Заряд  $q$  помещён в точку с координатами  $(a, 0)$ . Найти вектор дипольного момента, если заряд  $-q$  поместить в точку с координатами:

- $(-a, 0);$
- $(0, a);$
- $(-a, -a).$

**Решение:**

**Ответ:**  $\vec{p} = 2qa\vec{i}; \vec{p} = q(a\vec{i} - a\vec{j}); \vec{p} = q(2a\vec{i} + a\vec{j}).$

## №2

**Условие:** Рассчитать потенциалы и модули напряжённости электрического поля, создаваемого диполем в точках  $A$  и  $B$ , расположенных на расстоянии  $r$  от центра диполя на перпендикуляре к диполю и на оси диполя в направлении диполя, соответственно. Модуль дипольного момента  $p = 0.12$  нКл/м,  $|q| = 1$  нКл,  $r = 8$  см.

**Решение:**

**Ответ:**  $\varphi(A) = 0$  В,  $\varphi(B) \approx 386$  В,  $E(A) \approx 1.08$  кВ/м,  $E(B) = 22$  кВ/м.

## №3

**Условие:** Показать, что потенциал поля диполя с электрическим моментом  $\vec{p}$  (Рис. 9) может быть представлен, как  $\varphi(r) = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ , где  $r$  – радиус-вектор.

- Найти с помощью этого выражения вектор напряжённости  $\vec{E}$  как функцию  $\vec{r}, \vec{p}$  и модуль вектора напряжённости электрического поля диполя, как функцию  $r$  и  $\theta$ .
- Найти проекции напряжённости электрического поля диполя на ось  $Z - E_z$ , и на плоскость перпендикулярную оси  $Z - E_{\perp}$ .



Рис. 9. Поясняющий рисунок.

**Решение:**

**Ответ:**

$$\vec{E}(\vec{p}, \vec{r}) = k \left( \frac{3(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right), \quad E(p, \theta) = \frac{kp}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}; \quad E_z = \frac{kp}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad E_{\perp} = \frac{3kp \cos \theta \sin \theta}{r^3}.$$

#### №4

**Условие:** Диполь с электрическим моментом  $\vec{p}$  равномерно вращается с частотой  $\nu$  вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плечу диполя. Получить потенциал создаваемый диполем в точке  $S$ , отстоящей от центра диполя на расстояние  $r \gg l$  ( $l$  – плечо диполя), как функцию времени. Считать, что  $\varphi(0) = 0$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $\varphi(t) = -\frac{kp}{r^2} \sin(2\pi\nu t).$

#### №5

**Условие:** Для системы состоящей из 2-х сонаправленных точечных диполей, лежащих на одной прямой,  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ , рассчитать модуль силы взаимодействия между этими диполями если  $p_1 = 1$  пКл/м,  $p_2 = 4$  пКл/м,  $r = 0.02$  м ( $r$  – расстояние между центрами диполей)

**Решение:**

**Ответ:**  $F = \frac{3p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^4} \approx 1.35 \text{ мкН}$ .

### №6

**Условие:** Система состоит из равномерно заряженной нити, изогнутой в форме полуокружности радиуса  $R$  с зарядом  $q > 0$ , и отрицательного заряда  $-q$ , расположенного в её центре. Найти:

- Модуль электрического дипольного момента этой системы;
- Модуль напряжённости электрического поля в точке, расположенной на оси диполя на расстоянии  $r \gg R$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $p = \frac{2Rq}{\pi}$ ;  $E(r) = \frac{Rq}{\epsilon_0 \pi^2 r^3}$ .

### №7

**Условие:** Система состоит из бесконечной равномерно заряженной тонкой нити и диполя, расположенного на расстоянии  $r$  от нити.  $\vec{p}$  – дипольный момент,  $\lambda$  – линейная плотность заряда нити. Найти силу, действующую на диполь, если  $\vec{p}$  ориентирован:

- вдоль нити;
- по вектору  $\vec{r}$ , перпендикулярному к нити;
- перпендикулярно нити и вектору  $\vec{r}$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $\vec{F} = \vec{0}$ ;  $\vec{F} = -\frac{\vec{p}\lambda}{\epsilon_0 \pi r^2}$ .

### №8

**Условие:** Диполь  $\vec{p}$  расположен во внешнем однородном поле  $\vec{E}_0$ , так что  $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}_0$ . При таком расположении одна из эквипотенциальных поверхностей представляет из себя сферу. Рассчитать радиус этой сферы.

**Решение:**

**Ответ:** хз.

## Электростатическое поле при наличии диэлектриков.

### №1

**Условие:** В центре шара, состоящего из однородного диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon$  расположен точечный заряд  $q$ . Найти поляризованность  $\vec{P}$ , как функцию радиус-вектора  $\vec{r}$  относительно центра шара, а также связанный заряд  $q'$  внутри сферы, радиус которой меньше радиуса шара.

**Решение:**

**Ответ:**  $\vec{P} = \frac{q}{4\pi r^3 \varepsilon}(\varepsilon - 1)\vec{r}; \quad q' = -\frac{q}{\varepsilon}(\varepsilon - 1).$

### №2

**Условие:** Рассчитать поверхностные плотности связанных зарядов, модули векторов поляризованности и напряжённости поля, индуцированного точечным зарядом  $q$ , помещённым в центр двух концентрических сфер радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , если сферический слой заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $E(r < R_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad P(r < R_1) = 0; \quad E(R_1 < r < R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}, P(R_1 < r < R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}(\varepsilon - 1); \quad E(r > R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, P(r > R_2) = 0; \sigma(r = R_1) = -\frac{q}{4\pi R_1^2 \varepsilon}(\varepsilon - 1), \sigma(r = R_2) = \frac{q}{4\pi R_1^2 \varepsilon}(\varepsilon - 1).$

### №3

**Условие:** Показать, что на границе однородного диэлектрика с проводником поверхностная плотность связанных зарядов  $\sigma_{\text{св}} = -\frac{\sigma(\varepsilon-1)}{\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость, а  $\sigma$  - поверхностная плотность зарядов на проводнике.

**Решение:**

**Ответ:** хз.

#### №4

**Условие:** Система состоит из диэлектрического тела имеющего форму сферического слоя с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , расположенного в вакууме. Найти модуль напряжённости, как функцию расстояния  $r$  от центра тела, если:

- внутренняя поверхность тела несёт свободный поверхностный заряд  $q$ ;
- свободный заряд  $q$  равномерно распределён по объёму тела.

**Решение:**

**Ответ:**

$$E_a(r < R_1) = 0; E_b(r < R_1) = 0; E_a(R_1 < r < R_2) = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon \varepsilon_0 r^2}; E_b(R_1 < r < R_2) = \frac{\rho r}{3\varepsilon \varepsilon_0} \left(1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right); E_a(r > R_2) = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}; E_b(r > R_2) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{\varepsilon_0 r^2}.$$

#### №5

**Условие:** Вблизи некоторой точки лежащей на границе между стеклом и вакуумом модуль напряжённости электрического поля в вакууме –  $E_0$ , а угол между вектором  $\vec{E}_0$  и вектором нормали к стеклу –  $\alpha_0$ . Рассчитать модуль вектора напряжённости в стекле, угол между вектором напряжённости в стекле и нормалью, а также поверхностную плотность связанных зарядов.

**Решение:**

**Ответ:**

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} \sqrt{\cos^2 \alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha_0}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_0}{\varepsilon}; \sigma = \frac{E_0(\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{\varepsilon} \cos \alpha_0.$$

**Электростатическое поле при наличии проводников.**

#### №1

**Условие:** Над проводящей горизонтальной плоскостью на изолирующей нити, коэффициент жёсткости которой  $\mu$  висит небольшой шарик. Когда шарик зарядили, он опустился на  $x$ , а расстояние до проводящей плоскости стало равно  $l$ . Рассчитайте заряд шарика.

**Решение:**

**Ответ:**  $q = 4l\sqrt{\mu x \pi \varepsilon_0}$ .

## №2

**Условие:** Система состоит из точечного диполя  $\vec{p}$  и проводящей плоскости. Расстояние от диполя до плоскости  $l$ . Рассчитать силу действующую на диполь, если дипольный момент перпендикулярен плоскости.

**Решение:**

**Ответ:**  $\vec{F} = \frac{3p^2}{32\varepsilon_0 l^4} \vec{j}$ .

## №3

**Условие:** С одной стороны проводящей плоскости расположены 2 заряда  $q$  и  $-q$ . Расстояние между зарядами равно  $l$ , расстояние от каждого заряда до плоскости равно  $\frac{l}{2}$ . Рассчитать модуль силы, действующей на каждый заряд.

**Решение:**

**Ответ:**  $F = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} (2\sqrt{2} - 1)$ .

## №4

**Условие:** Система состоит из точечного заряда  $q$  расположенного на расстоянии  $y$  от проводящей плоскости. Рассчитать поверхностную плотность зарядов, индуцированных на плоскости, как функцию расстояния  $x$  от основания перпендикуляра, опущенного из точки расположения заряда на плоскость.

**Решение:**

**Ответ:**  $\sigma = -\frac{qy}{2\pi(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

## №5

**Условие:** Система состоит из нити и проводящей плоскости. Нить заряжена равномерно, с линейной плотностью  $\lambda$ , и ориентирована перпендикулярно плоскости. Расстояние от ближайшего конца нити, ближайшего к плоскости, до плоскости  $l$ . Рассчитать поверхностную плотность индуцированного на плоскости заряда:

- в точке  $O$ , являющейся следом нити на плоскости;
- как функцию расстояния  $x$  до точки  $O$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $\sigma(O) = -\frac{\lambda}{2\pi l}; \sigma(x) = -\frac{\lambda}{2\pi(x^2+l^2)^{\frac{1}{2}}}.$

### №6

**Условие:** Рассчитать потенциал незаряженной проводящей сферы радиуса  $R$ , вне которой на расстоянии  $d$  расположен заряд  $q$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $\varphi = \frac{kq}{d}.$

## Энергия электростатического поля.

### №1

**Условие:** В вершинах прямоугольника со сторонами  $a = 40$  см и  $b = 20$  см расположены четыре одинаковых заряда  $q = 2$  мкКл. Рассчитать энергию взаимодействия этой системы.

**Решение:**

**Ответ:**  $W = 2q^2k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \approx 0.7$  Дж.

### №2

**Условие:** Система состоит из 4-х одинаковых зарядов  $q = 500$  нКл, расположенных в вершинах квадрата сторона которого  $a = 20$  см. Рассчитать потенциальную энергию взаимодействия данной системы.

**Решение:**

**Ответ:**  $W = \frac{\sqrt{2}q^2k}{a}(2\sqrt{2} + 1) \approx 61$  мДж.

### №3

**Условие:** Во внешнем электростатическом поле, модуль напряжённости которого  $E = 300$  кВ/м, расположен точечный диполь, модуль дипольного момента которого  $p = 12$  пКл/м. Под действием этого поля диполь начинает вращаться вокруг оси, проходящей через его

центр. Рассчитать модуль угловой скорости вращения диполя в момент установления равновесия, если в начальный момент времени диполь был ориентирован перпендикулярно полю. Момент инерции диполя относительно оси вращения -  $I = 2 \cdot 10^{-9}$  кг/м<sup>2</sup>.

**Решение:**

**Ответ:**  $\omega = \sqrt{\frac{2pE}{I}} = 60$  рад/с.

#### №4

**Условие:** Система состоит из двух концентрических равномерно заряженных сфер, радиусами  $R_1 = 1$  м и  $R_2 = 1.5$  м, с поверхностными плотностями зарядов  $\sigma_1 = 4$  мкКл/м<sup>2</sup> и  $\sigma_2 = 10$  мкКл/м<sup>2</sup>, расположенных в вакууме. Рассчитать энергию электрического поля заключённую между сферами.

**Решение:**

**Ответ:**  $W = \frac{2\pi\sigma_1^2 R_1^4}{\varepsilon_0} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \approx 3.8$  Дж.

#### №5 (done)

**Условие:** Система состоит из двух концентрических проводящих сфер радиусами  $R_1 = 10$  см и  $R_2 = 40$  см, имеющими одинаковый заряд  $q = 200$  нКл. Рассчитать энергию электрического поля заключённого между двумя этими сферами.

**Решение:**

**Ответ:**  $W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \right) \approx 1.35$  мДж.

### Конденсаторы.

#### №1 (done)

**Условие:** Получить формулы для расчёта ёмкости следующих конденсаторов ( $\varepsilon$  среды между обкладками принять равной 1):

- Сферического, если известно что радиус внутренней обкладки  $R_1$ , а внешней  $R_2$ ;
- Цилиндрического, если известно, что радиус внутренней обкладки  $R_1$ , внешней  $R_2$ , а высота равна  $d$ ;

- Плоского, если известно, что площадь обкладок равна  $S$ , а расстояние между обкладками  $d$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $C_{\text{сф}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, C_{\text{цил}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 d}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, C_{\text{пл}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$

## №2 (done)

**Условие:** Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого  $d$ , расположен вертикально. Конденсатор заряжен до разности потенциалов  $U$ . На расстоянии  $b$  от отрицательно заряженной пластины находится положительно заряженная пылинка массой  $m$  и зарядом  $q$ . Рассчитать время за которое пылинка достигнет пластины конденсатора.

**Решение:**

**Ответ:**  $t = \sqrt{\frac{2bmd}{qU}}.$

## №3 (done)

**Условие:** К одной из пластин плоского заряженного конденсатора прилегает диэлектрическая пластинка толщиной  $d_1$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Расстояние между пластинами конденсатора  $d$ , а разность потенциалов  $U$ . Рассчитать модули напряжённости  $E_1$  и  $E_2$  в диэлектрике и воздухе.

**Решение:**

**Ответ:**  $E_1 = \frac{U}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}, E_2 = \frac{U\varepsilon}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}.$

## №4

**Условие:** К одной из пластин плоского конденсатора прилегает пластина диэлектрика толщиной  $d_1$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Расстояние между пластинами конденсатора  $d$ . После отключения конденсатора от источника питания пластину вынули. Рассчитать во сколько раз выросла разность потенциалов между пластинами конденсатора.

**Решение:**

Ответ:  $n = \frac{\varepsilon d}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}$ .

## Постоянное магнитное поле

### Индукция магнитного поля. Закон Био-Савара

#### №1

**Условие:** Заряженная элементарная частица движется со скоростью, модуль которой  $v = 900$  м/с. В некоторый момент в точке наблюдения  $P$  модуль напряжённости электрического поля этой частицы  $E = 600$  В/м, а угол между векторами скорости и напряжённости  $\alpha = 30^\circ$ . Рассчитать индукцию магнитного поля данной частицы.

**Решение:**

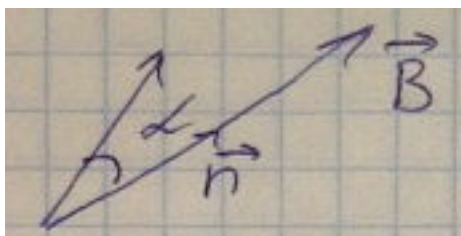


Рис. 10. Пояснительный рисунок.

$$B = \frac{\mu_0 v \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad (18)$$

$$E = k \frac{1}{r^2} \quad (19)$$

Умножим и разделим 18 на  $\varepsilon_0$  чтобы сделать замену на  $E$ :

$$B = \mu_0 v \sin \alpha \varepsilon_0 E \quad (20)$$

Подставив числа, получим:

$$\begin{aligned} B &= 900 \cdot 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12.75 \cdot 10^{-7} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \\ &= 3 \cdot 10^{-12} = 3 \text{ пТл.} \end{aligned} \quad (21)$$

Ответ:  $B = 3$  пТл.

## №2

**Условие:** Используя закон Био-Савара, получить формулу для расчёта модуля вектора индукции магнитного поля, создаваемого током  $I$ , протекающим в линейном бесконечном проводнике в точке, расположенной на расстоянии  $r_0$  от проводника.

**Решение:**

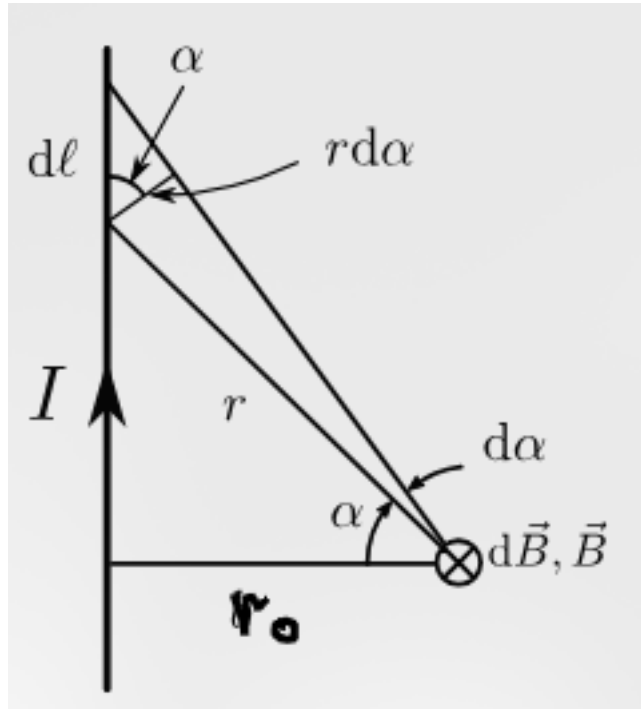


Рис. 11. Поясняющий рисунок.

Магнитное поле прямого тока, т.е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины. По свойству векторного произведения следует, что в произвольной точке  $A$  векторы  $d\vec{B}$  от всех элементов токов имеют одно направление – за плоскость рисунка.

Поэтому можно складывать просто модули  $d\vec{B}$ . В нашем случае  $d\vec{B}$  удобней выразить не через угол между  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ , а через  $\alpha$ , тогда

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \cos \alpha}{r^3}. \quad (22)$$

Как видно из Рис. 11  $dl \cos \alpha = r d\alpha$  и  $r = \frac{r_0}{\cos \alpha}$ . Значит  $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cos \alpha d\alpha}{r_0}$ . Интегрируя последнее выражение по углу, получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1). \quad (23)$$

Это выражение позволяет находить магнитную индукцию от конечного проводника. В случае бесконечного проводника ( $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ ):

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r_0} \quad (24)$$

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$ .

---

### №3

**Условие:** Рассчитать модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого конечным прямолинейным участком проводника, длины  $l$ , по которому протекает ток  $I$ , в точке отстоящей на произвольном расстоянии  $r_0$  от оси проводника.

**Решение:**

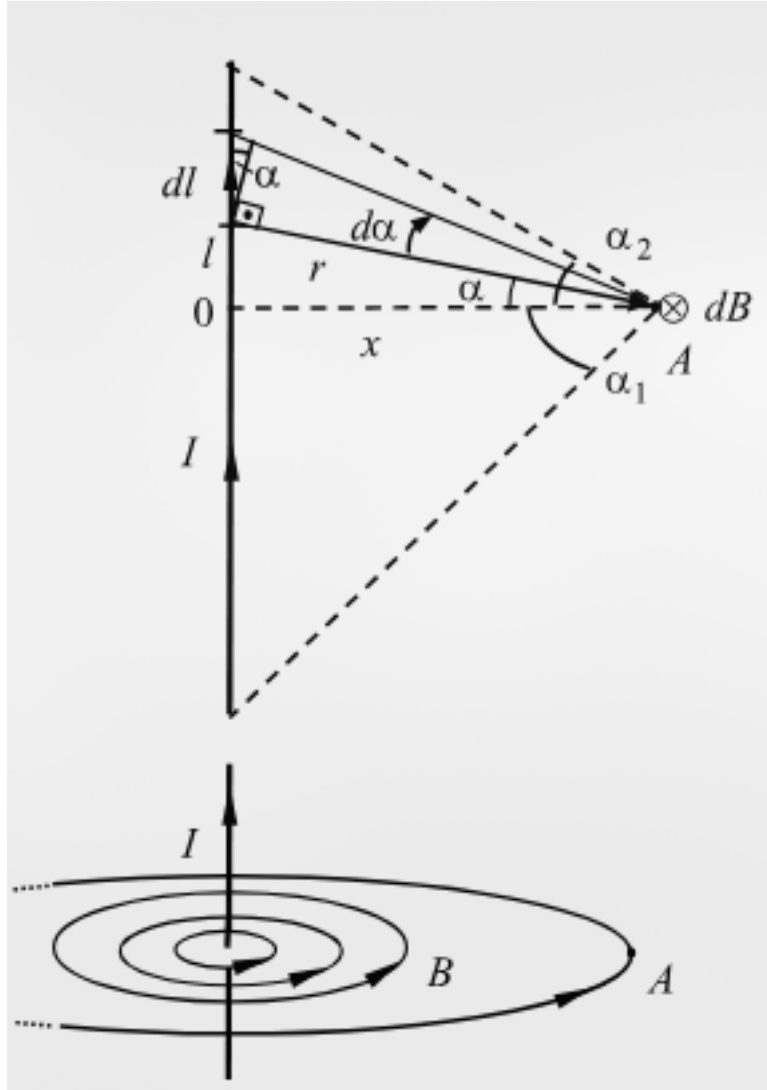


Рис. 12. Поясняющий рисунок.

Для решения задачи воспользуемся принципом суперпозиции. Разобьем проводник на элементарные участки  $d\vec{l}$ , по которым течет ток  $I$  (Рис. 12). Согласно закону Био-Савара, вектор магнитной индукции, создаваемого в точке  $A$  каждым элементом тока  $I \cdot d\vec{l}$  равен

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (25)$$

Векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  для всех участков проводника лежат в плоскости чертежа, поэтому в точке  $A$  векторы  $d\vec{B}$  имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа (от нас  $\otimes$ ), что продемонстрировано на нижнем рисунке. Сложение векторов  $d\vec{B}$  сводится к сложению

их модулей. В качестве переменной интегрирования выберем угол  $\alpha$  (угол между  $x$  и  $r$ ). Выразим через угол  $\alpha$  все остальные величины. Из Рис. 12 видно, что  $r = \frac{x}{\cos \alpha}$ ,  $l = x \operatorname{tg} \alpha$ , поэтому длина элемента тока связана с приращением  $\alpha$  соотношением

$$dl = x \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}. \quad (26)$$

Магнитная индукция, создаваемая элементом проводника, равна:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \frac{rd\alpha}{\cos \alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cos \alpha d\alpha. \quad (27)$$

Угол  $\alpha$  для всех элементов прямого тока изменяется в пределах от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$  (Рис. 12), тогда

$$B = \int dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1), \quad (28)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1), \quad (29)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  углы, под которыми мы видим из точки, в которой определяем поле, концы проводника. Эти углы являются алгебраическими величинами и отсчитываются от перпендикуляра, опущенного из точки на проводник. Положительное направление отсчета угла  $\alpha$  соответствует углу, отсчитываемому от перпендикуляра в направлении тока.

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$ .

#### №4

**Условие:** Замкнутый контур с током имеет вид прямоугольника с диагональю  $d = 16$  см, угол между диагоналями  $\alpha = 30^\circ$ . Сила тока, протекающего по контуру  $I = 5$  А. Рассчитать модуль индукции магнитного поля в центре контура.

Решение:

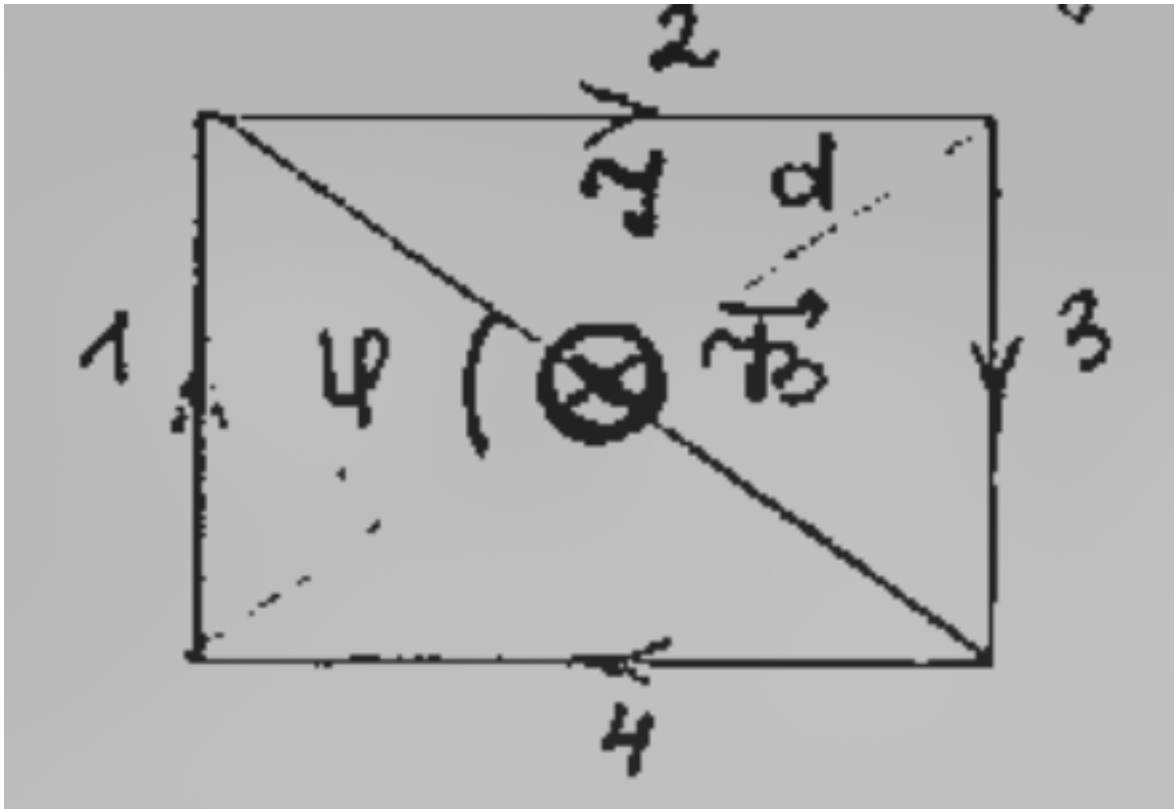


Рис. 13. Поясняющий рисунок.

В системе СИ:  $d = 16 \text{ см} = 0.16 \text{ м}$ .

По принципу суперпозиции для магнитного поля:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4. \quad (30)$$

Так как все  $\vec{B}_i$  сонаправлены, то  $B = 2(B_1 + B_2)$ . По закону Био-Савара-Лапласа:

$$\begin{aligned} B &= 2 \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{\cos \frac{\pi-\varphi}{2}}{\frac{d}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} + \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\frac{d}{2} \sin \frac{\varphi}{2}} \right) \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \left( \frac{1}{\frac{d}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \right) = \frac{4\mu_0 I}{\pi d \sin \varphi} \end{aligned} \quad (31)$$

Подставив числа из условия, получим:

$$B = \frac{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{\pi \cdot 0.16 \cdot \sin 30^\circ} \approx 0.1 \quad (32)$$

Ответ:  $B = 0.1$  мТл.

### №5

**Условие:** Определить модуль вектора индукции магнитного поля на оси кругового тока  $I$  радиуса  $R$ , как функцию  $B(z)$ , где  $z$  расстояние до центра контура.

**Решение:**

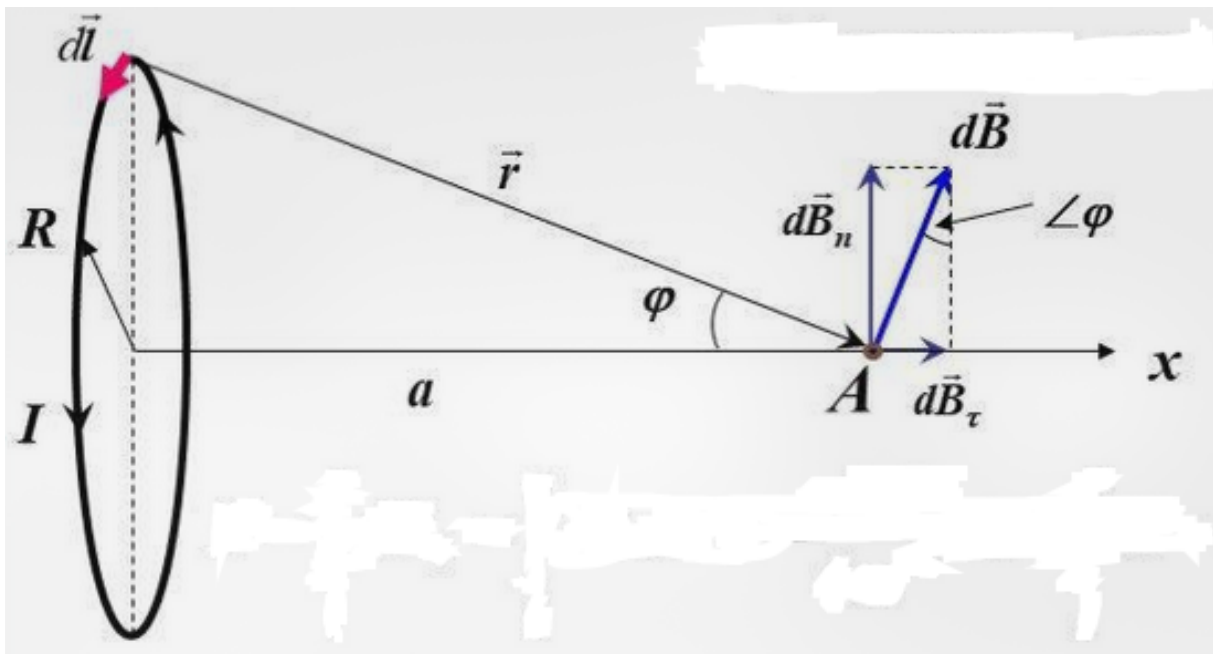


Рис. 14. Поясняющий рисунок.

Магнитное поле на оси кругового тока.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} B &= \int_l dB_\tau = \int_l dB \sin \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi \int_l dl = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi 2\pi R = \frac{\mu_0 I R}{2\pi r^2} \sin \varphi \end{aligned} \quad (34)$$

Преобразуем полученное выражение, учитывая, что  $\sin \varphi = \frac{R}{r}$ ,  $r^2 = R^2 + a^2$ . После подстановки получим

$$B = \frac{\mu_0 I R}{2r^2} \sin \varphi = \frac{\mu_0 I R}{2(R^2 + a^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (35)$$

**Ответ:**  $B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$

---

### №6

**Условие:** По тонкому замкнутому проводнику (Рис. 15) течёт ток, сила которого  $I = 5$  А. Радиус изогнутой части проводника  $R = 120$  мм, угол  $\varphi = 90^\circ$ . Рассчитать модуль вектора магнитной индукции в точке  $O$ .



Рис. 15. Проводник.

**Решение:**

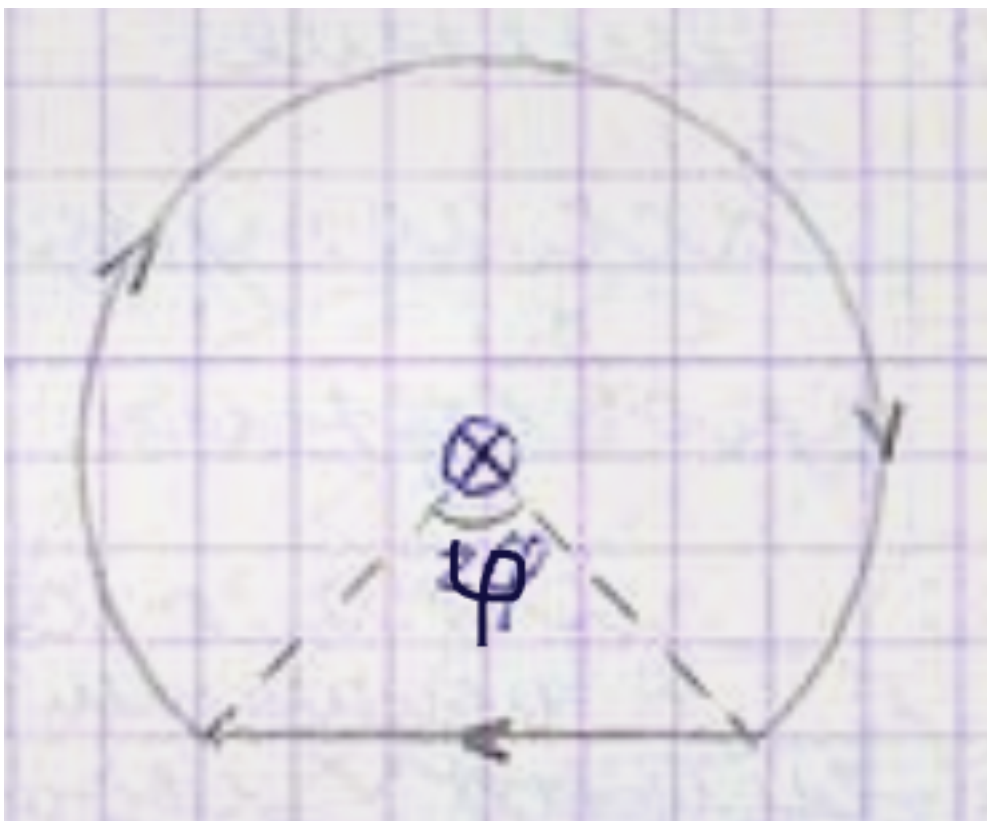


Рис. 16. Поясняющий рисунок.

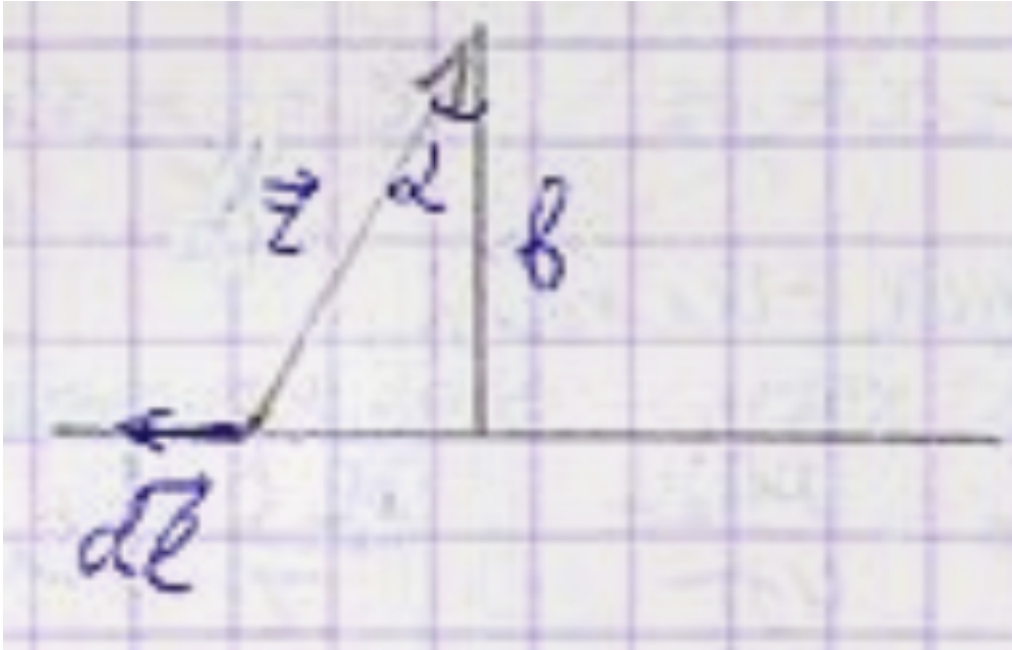
Пусть  $\theta = \frac{\varphi}{2} = 45^\circ$ .

Для части окружности:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi-2\theta} R d\alpha = \frac{\mu_0 I(\pi - \theta)}{2\pi R}. \quad (36)$$

Для отрезка:

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \angle(d\vec{l}; \vec{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} \cos \alpha \quad (37)$$



Поясняющий рисунок. 17. Рис.

$$\cos \alpha dl = z d\alpha \Rightarrow dl = \frac{z d\alpha}{\cos \alpha} \quad (38)$$

$$z = \frac{b}{\cos \alpha}, \quad b = R \cos \theta \quad (39)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{d\alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot b} \cdot \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos \theta} \cdot 2 \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tg} \theta \quad (40)$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \theta + \tan \theta) \quad (41)$$

Подставив числа, получим:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi \cdot 0.12} \left( \pi - \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) \approx 28 \text{ мкТл.} \quad (42)$$

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left( 1 + \frac{3}{4}\pi \right) \approx 28 \text{ мкТл.}$

---

### №7

**Условие:** Замкнутый контур, по которому течёт ток силы  $I$  имеет форму показанную на (Рис. 18). Радиус окружности  $R$ , длина стороны квадрата  $a$ . Найти индукцию магнитного поля в точке  $O$ .

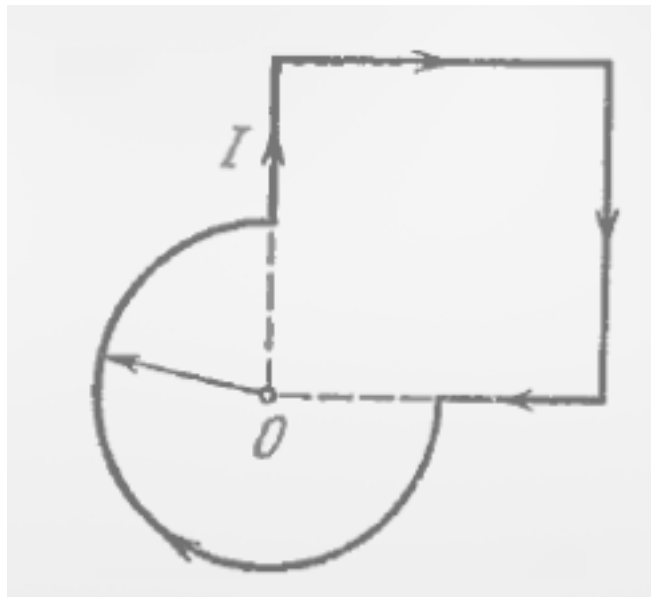


Рис. 18. Контур.

**Решение:**

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{3\pi}{2R} + \frac{\sqrt{2}}{a} \right).$

---

### №8

**Условие:** Тонкий провод с изоляцией образует плоскую спираль из  $N = 200$  плотно прилегающих витков, по которым течёт ток  $I = 5$  мА. Радиус внутреннего витка  $a = 100$  мм, радиус внешнего витка  $b = 200$  мм. Рассчитать индукцию магнитного поля в центре спирали.

**Решение:** Магнитная индукция одного витка (окружности):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2z} \quad (43)$$

$$dN = \frac{N}{b-a} dz \quad (44)$$

Подставим 43 и 44 в

$$B = \int B_1 dN = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \int_a^b \frac{dz}{z} = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln z \Big|_a^b = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a} \quad (45)$$

Подставим числа и получим

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 200}{2(0.2 - 0.1)} \ln \frac{0.2}{0.1} \approx 4.4 \text{ мкТл.} \quad (46)$$

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a} \approx 4.4 \text{ мкТл.}$

### №9

**Условие:** В параллельных плоскостях, расположенных на расстоянии  $d = 8 \text{ см}$  друг от друга на одной оси находятся два круговых витка радиуса  $R = 5 \text{ см}$  каждый. По виткам в одном направлении текут токи  $I_1 = I_2 = 2 \text{ А}$ . Рассчитать напряжённость магнитного поля в центре одного из витков.

**Решение:**

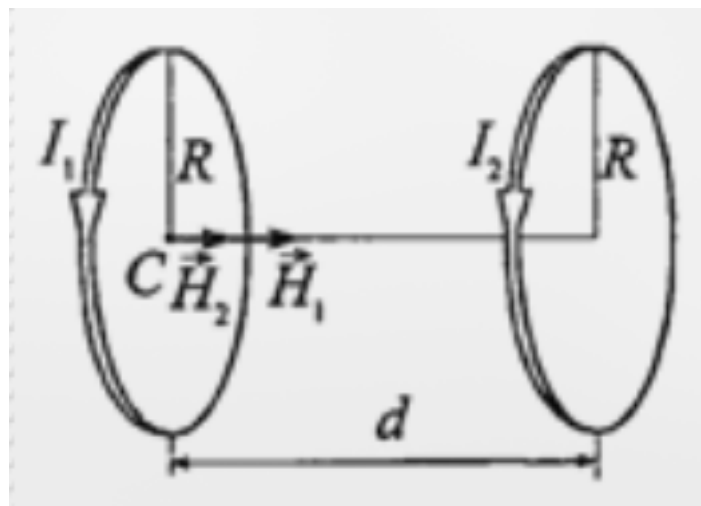


Рис. 19. Поясняющий рисунок.

Согласно принципу суперпозиции напряженность в точке  $C$  равна

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2, \quad \text{где } H = \frac{I_1}{2R}, \quad (47)$$

$$H_2 = \frac{I_2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (48)$$

Если токи текут в одном направлении, то  $H = H_1 + H_2$ . По условию

$$I_1 = I_2 = I \quad (49)$$

Тогда

$$H = \frac{I}{2R} + \frac{IR^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (50)$$

Подставив числа, получим:

$$H = \frac{2}{2 \cdot 0.05} + \frac{2 \cdot 0.05^2}{2(0.05^2 + 0.08^2)^{\frac{3}{2}}} \approx 23 \text{ А/м}. \quad (51)$$

**Ответ:**  $H = \frac{I}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{R^2}{(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \approx 23 \text{ А/м}.$

---

### №10

**Условие:** Рассчитать модуль вектора магнитной индукции на оси соленоида, длина которого  $l$ , количество витков проволоки, плотно прилегающих друг к другу равно  $N$ . Через витки течёт ток  $I$ , радиус витков  $R_0$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $B(z) = \frac{\mu_0 I N}{2l} \left( \frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{R_0^2 + (\frac{l}{2} - z)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{R_0^2 + (\frac{l}{2} + z)^2}} \right).$

## Закон полного тока

### №1

**Условие:** Используя закон полного тока, найти модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого током текущим по коаксиальному кабелю. Ток  $I$  течёт по центральной жиле радиуса  $R_1$ , и возвращается по оболочке, внутренний и внешний радиусы которой  $R_2$  и  $R_3$  соответственно. Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком. Магнитную проницаемость всюду считать равной 1.

**Решение:**

**Ответ:**  $B(r < R_1) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$ ,  $B(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ,  $B(R_2 < r < R_3) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$ ,  $B(r > R_3) = 0$ .

---

### №2

**Условие:** Определить индукцию магнитного поля тока, равномерно распределённого:

- по бесконечной плоскости с линейной плотностью  $j$ ;
- по двум параллельным бесконечным плоскостям с линейными плотностями  $j$  и  $-j$ .

**Решение:**

а)

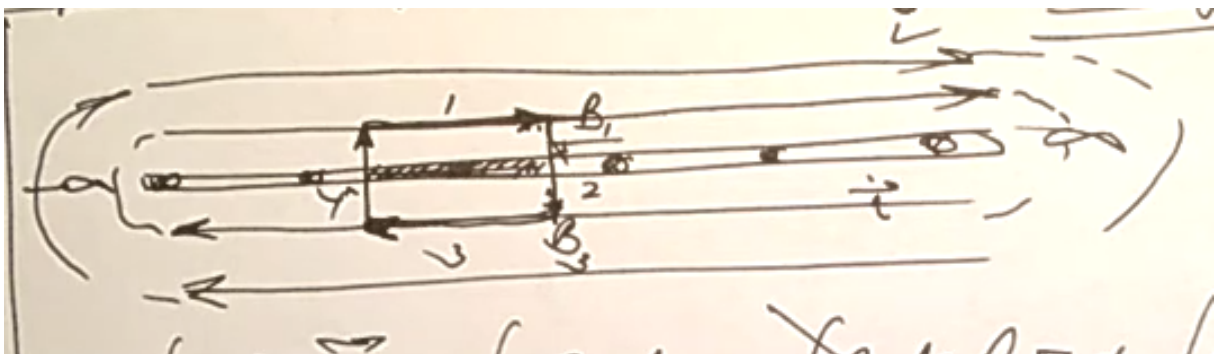


Рис. 20. Поясняющий рисунок.

По закону полного тока:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{полн}} \quad (52)$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} B_1 \cdot dl + \int_{l_2} B_2 \cdot dl \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \int_{l_3} B_3 dl \cos 0 + \int_{l_4} B_4 dl \cos \frac{\pi}{2} = 2Bl \quad (53)$$

$$I_{\text{полн}} = j \cdot l \quad (54)$$

$$2Bl = \mu_0 j l \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 j \quad (55)$$

б)

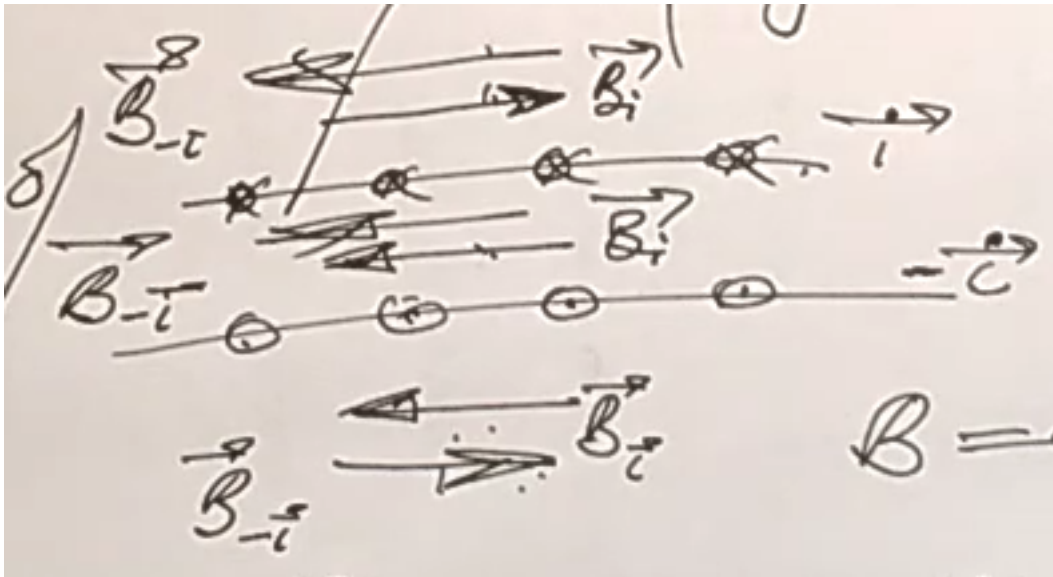


Рис. 21. Поясняющий рисунок.

$$\vec{B} = \vec{B}_j + \vec{B}_{-j} \quad (56)$$

$B = 0$  вне плоскостей.

$$B = 2B_{\text{пл}} = \mu_0 j \text{ между плоскостями.} \quad (57)$$

**Ответ:** а)  $B = \frac{\mu_0 j}{2}$ , б)  $B = \mu_0 j$ .

### №3

**Условие:** Однородный ток, плотность которого  $j$  течёт внутри неограниченной пластины толщины  $2d$  параллельно её поверхности. Найти индукцию магнитного поля этого тока, как функцию расстояния  $x$  от средней плоскости пластины. Магнитную проницаемость всюду считать равной 1.

**Решение:**

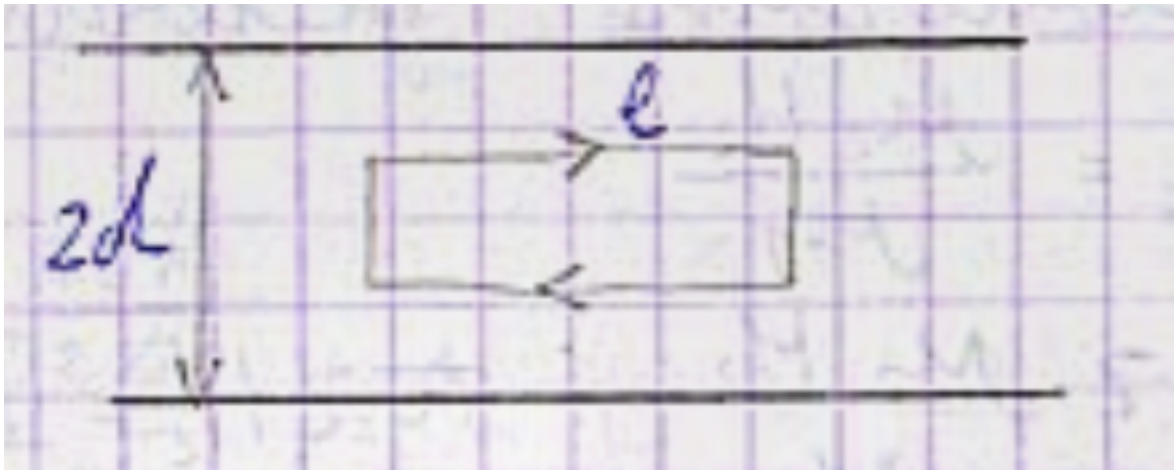


Рис. 22. Поясняющий рисунок.

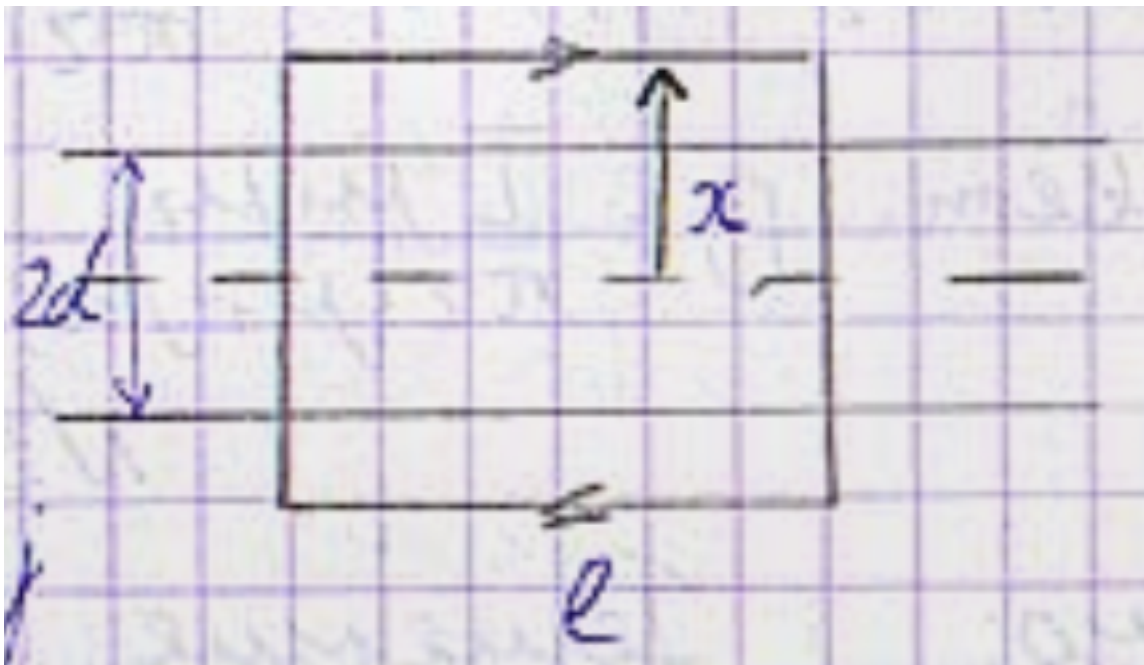


Рис. 23. Поясняющий рисунок.

По теореме о циркуляции

$$\oint B dz = \mu_0 j 2xl \quad (58)$$

$$I = 2xlj \quad (59)$$

Если  $l \gg x$ , то интегралом по  $\perp$  составляющим можно пренебречь, тогда:

$$B \cdot 2l = \mu_0 \cdot 2xlj \quad (60)$$

$$B = \mu_0 xj \quad (61)$$

Возьмем  $x > d$

$$\oint B dz = \mu_0 I = \mu_0 \cdot 2dlj \quad (62)$$

$$B \cdot 2l = \mu_0 \cdot 2dlj, \quad B = \mu_0 dj \quad (63)$$

**Ответ:**  $B(x > d) = \mu_0 dj$ ,  $B(x < d) = \mu_0 xj$ .

---

#### №4

**Условие:** Найти вектор плотности тока, как функцию расстояния  $r$  от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от  $r$  как  $B(r) = \beta r^\alpha$ , где  $\beta$  и  $\alpha$  положительные постоянные.

**Решение:**

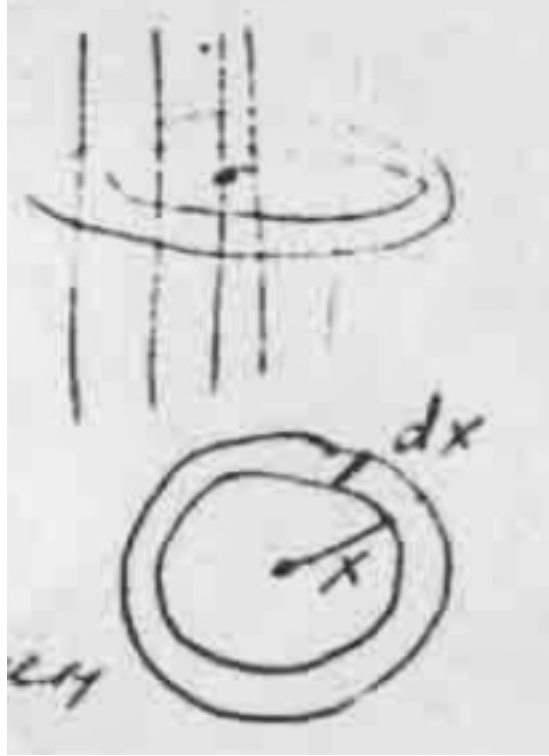


Рис. 24. Пояснительный рисунок.

Возьмем контур,  $\perp$  пучку радиуса  $r$  и центром в центре пучка, тогда

$$\oint Bdr = \beta r^2 \cdot 2\pi r = 2\pi\beta r^{\alpha+1} \quad (64)$$

Пусть  $j = j(r)$ , тогда

$$\int_r j dS = \int_0^r 2\pi x j(x) dx \quad (65)$$

Итого

$$\begin{aligned} 2\pi\beta r^{\alpha+1} &= \int_0^r 2\pi\mu_0 x j(x) dx = \\ &= \beta r^{\alpha+1} = \mu_0 \int_0^r x j(x) dx \end{aligned} \quad (66)$$

Дифференцируем по  $r$

$$\beta(\alpha + 1)r^\alpha = \mu_0 r j(r) \Rightarrow j(r) = \frac{\beta(\alpha + 1)}{\mu_0} r^{\alpha-1} \quad (67)$$

**Ответ:**  $\vec{j}(r) = \frac{\beta(\alpha+1)r^{\alpha-1}}{\mu_0} \vec{e}_z$ .

---

### №5

**Условие:** Используя закон полного тока, рассчитать индукцию магнитного поля внутри соленоида длиной  $L = 0.5$  м, содержащего  $N = 1000$  витков плотной обмотки, если сопротивление обмоток  $R = 120$  Ом, а напряжение на её концах  $U = 60$  В.

**Решение:**

$$\oint_L B dL = \mu_0 \sum_i I_i, \quad BL = \mu_0 IN \quad (68)$$

$$I = \frac{U}{R}, \quad B = \frac{\mu_0 UN}{RL} \quad (69)$$

Подставим числа:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 1000}{120 \cdot 0.5} \approx 1.25 \text{ мТл.} \quad (70)$$

**Ответ:**  $B = 1.25$  мТл.

---

### №6

**Условие:** По бесконечному прямому проводу, радиус сечения которого  $R$ , течёт постоянный ток, плотность которого  $\vec{j}$ . Найти вектор магнитной индукции поля, создаваемого этим током, в точке, положение которой относительно оси провода определяется радиус-вектором  $\vec{r}$ .

**Решение:**



Рис. 25. Поясняющий рисунок.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int B \cdot dl \cdot \cos 0^\circ = B \cdot 2\pi r \quad (71)$$

$$I_{\text{полн}} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int j d\vec{S} = j \cdot \pi r^2 \quad (72)$$

При  $r < R$ :

$$B \cdot 2\pi r = j\pi r^2 \mu_0 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 j r \quad (73)$$

$$\vec{B}_1 = B_1 \cdot \vec{e}_\varphi \quad \vec{B}_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} \times \vec{r} = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j}, \vec{r}] \quad (74)$$

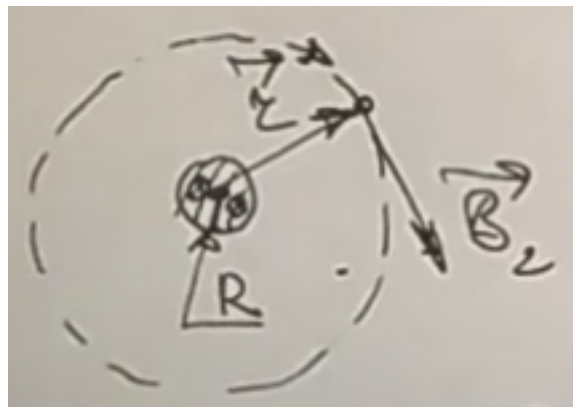


Рис. 26. Поясняющий рисунок.

При  $r > R$ :

$$I_{\text{полн}} = j \cdot \pi R^2 \quad (75)$$

$$B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi R^2 \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 R^2 j}{2r} \vec{e}_\varphi \quad (76)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 R^2}{2} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^2} \quad (77)$$

**Ответ:**  $\vec{B}(r < R) = \frac{\mu_0 [\vec{j}; \vec{r}]}{2}, \vec{B}(r > R) = \frac{\mu_0 R^2 [\vec{j}; \vec{r}]}{2}.$

---

### №7

**Условие:** По длинному цилиндрическому проводу течёт ток, плотность которого  $\vec{j}$ . Внутри провода имеется цилиндрическая полость, идущая параллельно оси провода. Расстояние от оси провода до оси полости задаётся вектором  $\vec{l}$ . Найти вектор индукции магнитного поля внутри полости.

**Решение:**

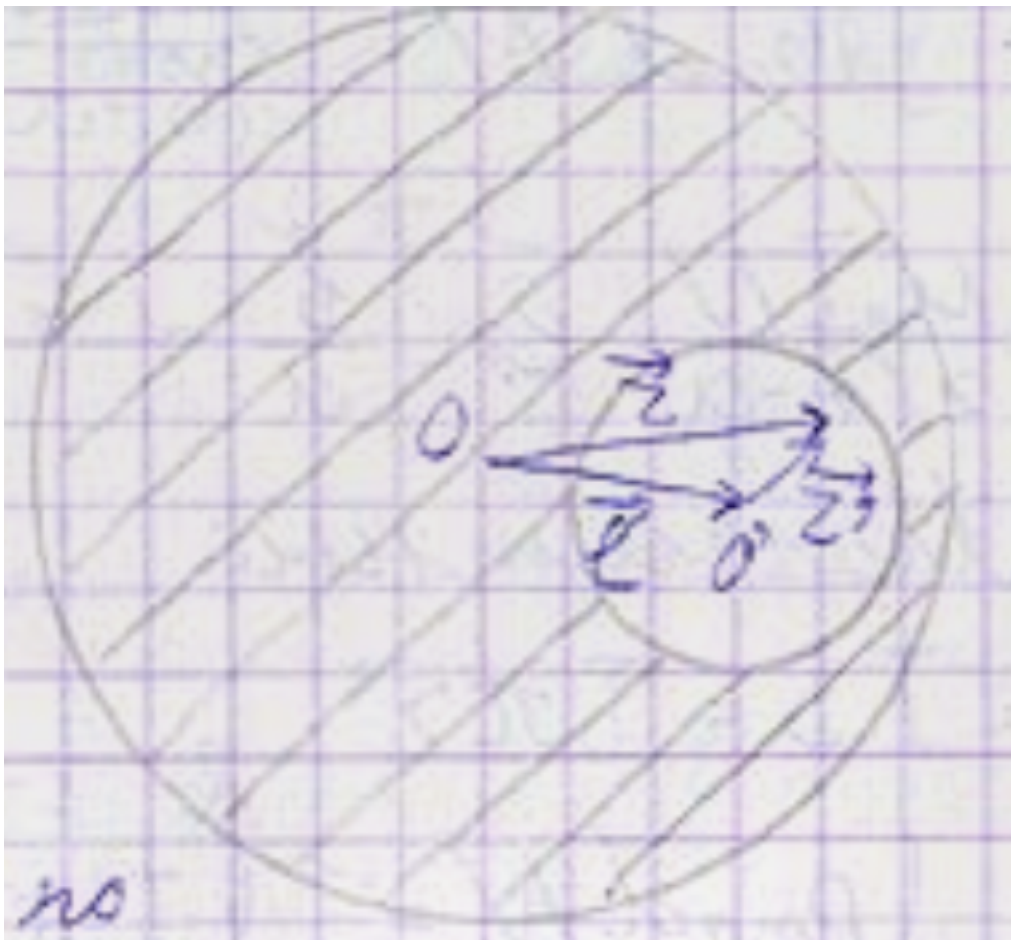


Рис. 27. Поясняющий рисунок.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}', \quad (78)$$

где  $\vec{B}_0$  - если проводник сплошной.

$\vec{B}'$  - от тока, текущего по той части проводника, которую удалили.

По теореме о циркуляции:

$$2\pi z B_0 = \mu_0 \pi z^2 j \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2} \mu_0 z j \quad (79)$$

Или в векторной форме

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{z}] \quad (80)$$

$$\vec{B}' = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{z}'] \quad (81)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{z} - \vec{z}'] = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{l}] \quad (82)$$

**Ответ:**  $\vec{B} = \frac{\mu_0 [\vec{j}; \vec{l}]}{2}$ .

## №8

**Условие:** Ток  $I$  течёт по длинному проводу и затем равномерно растекается по всем направлениям однородной проводящей среды (Рис. 28). Рассчитать индукцию магнитного поля в точке  $A$ , отстоящей от точки  $O$  на расстоянии  $r$  под углом  $\theta$ .

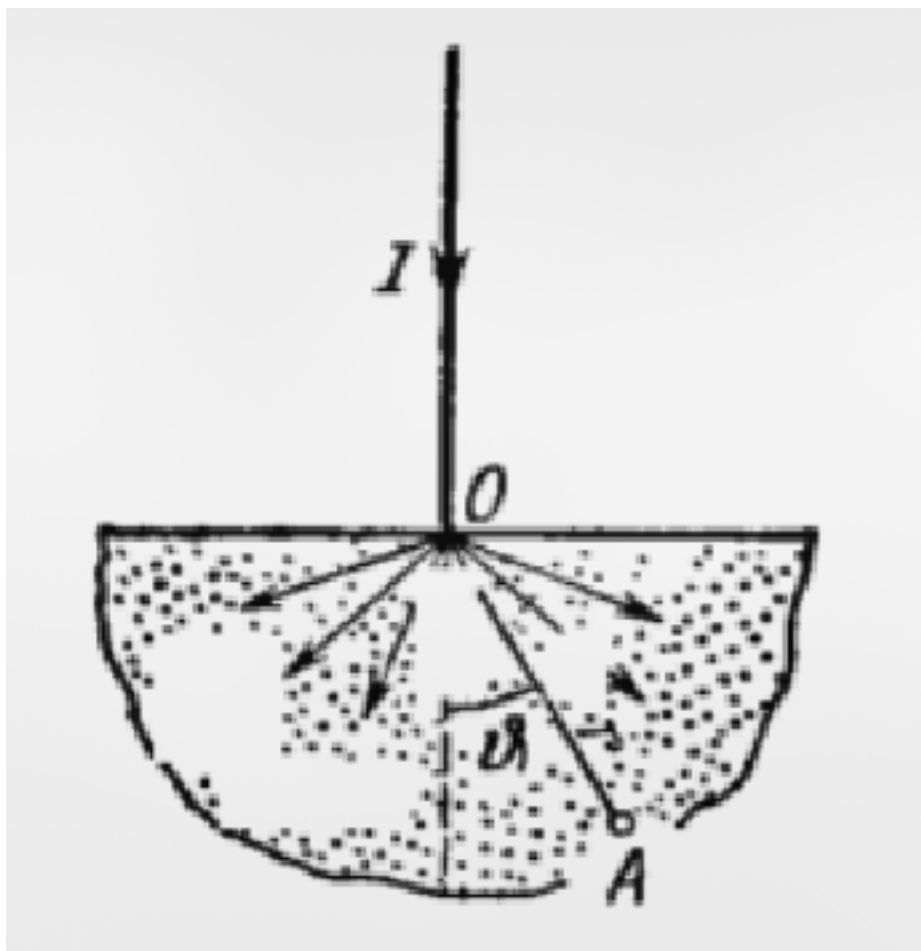


Рис. 28. Проводящая среда.

Решение:

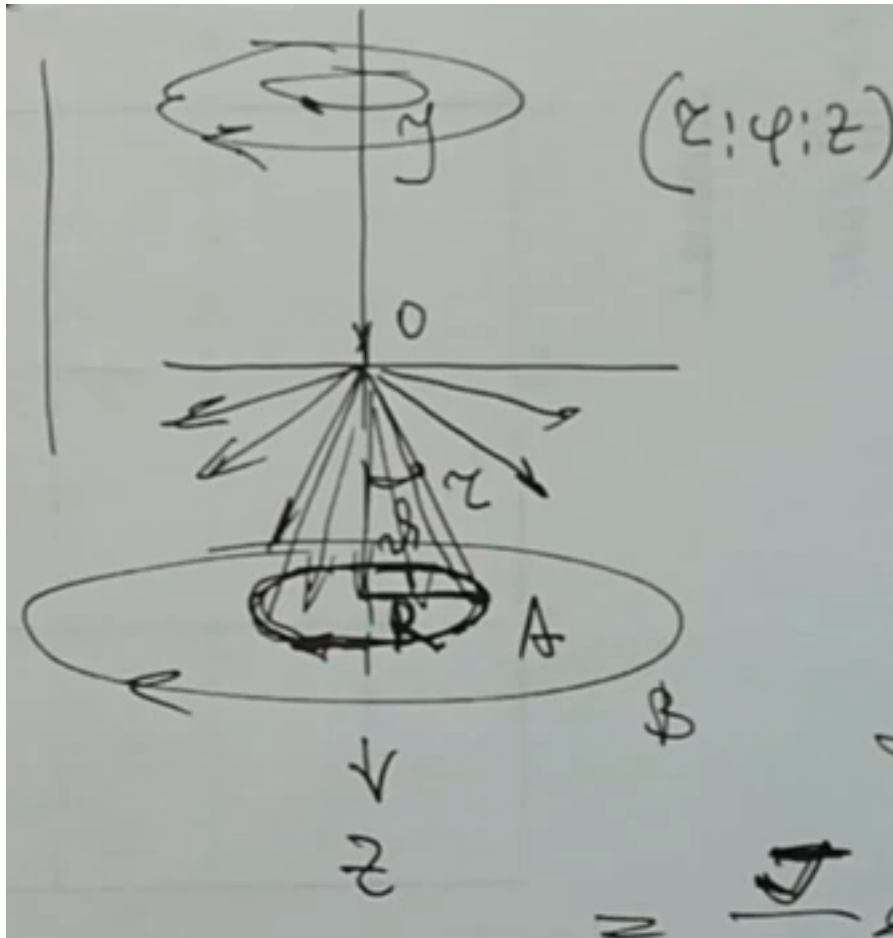


Рис. 29. Поясняющий рисунок.

Система обладает аксиальной симметрией.

$$\vec{B}(0; B_\varphi; z) \Rightarrow \oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{охв}}. \quad (83)$$

$$B = B(R) \quad (84)$$

$$B \cdot 2\pi R = B 2\pi r \sin \theta \quad (85)$$

$$J = \frac{dI}{d\omega} = \frac{I}{2\pi} = \text{const} \quad (86)$$

$$I_{\text{охв}} = \int_0^\theta I \cdot \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2\pi} 2\pi \cos \theta \Big|_\theta^0 = I(1 - \cos \theta) \quad (87)$$

85 и 87 подставляем в 83

$$B \cdot 2\pi r \sin \theta = \mu_0 I (1 - \cos \theta) \quad (88)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \sin \theta} (1 - \cos \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (89)$$

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tan \frac{\theta}{2}$ .

---

### №9

**Условие:** Ток  $I$  течёт по длинному прямому проводу круглого сечения. Рассчитать поток магнитного поля через половину осевого сечения провода приходящейся на один метр его длины.

**Решение:** Считаем, что ток распределен по сечению равномерно с плоскостью

$$j = \frac{I}{\pi R^2} \quad (90)$$

Согласно теореме Стокса:

$$\oint B dr = \mu_0 I \text{ (через сечение)}. \quad (91)$$

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2 \quad (92)$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{r^2}{R^2} \frac{1}{r} \quad (93)$$

Поток через половину сечения на единицу длины

$$\Phi = \int_0^R dr B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^R \frac{r dr}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I. \quad (94)$$

**Ответ:**  $\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$ .

## Магнитное поле при наличии Магнетиков. Магнитный момент.

### №1

**Условие:** Найти магнитный момент тонкого кругового витка с током, если радиус витка  $R = 100$  мм, а индукция магнитного поля в центре  $B = 6$  мкТл.

**Решение:**



Рис. 30. Поясняющий рисунок

$$p_m = I \cdot S; \quad B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{4\pi \cdot R^2} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot 2\pi \cdot R}{4\pi \cdot R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R} \Rightarrow I = \frac{B \cdot 2R}{\mu_0} \quad (95)$$

$$p_m = \frac{B \cdot 2R}{\mu_0} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{2\pi \cdot B \cdot R^3}{\mu_0} \quad (96)$$

Подставим числа и получим

$$p_m = \frac{6.28 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 0.1^3}{1.27 \cdot 10^{-6}} \approx 30 \text{ мА/м}^2 \quad (97)$$

**Ответ:**  $p_m = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} \approx 30 \text{ мА/м}^2$ .

---

### №2

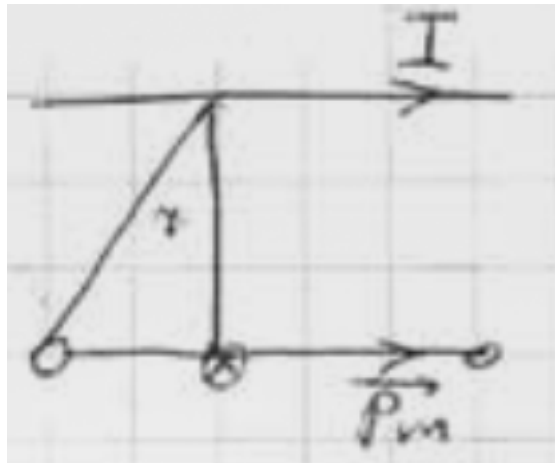
**Условие:** Магнитный диполь, момент которого  $\vec{p}_m$  поместили на расстоянии  $r$  от длинного провода по которому течёт ток  $I$ . Найти вектор силы действующей на диполь со стороны магнитного поля, создаваемого током  $I$  если вектор магнитного момента:

- параллелен проводнику;
- направлен по вектору  $\vec{r}$ ;

- совпадает по направлению с магнитным полем тока  $I$ .

**Решение:**

а)

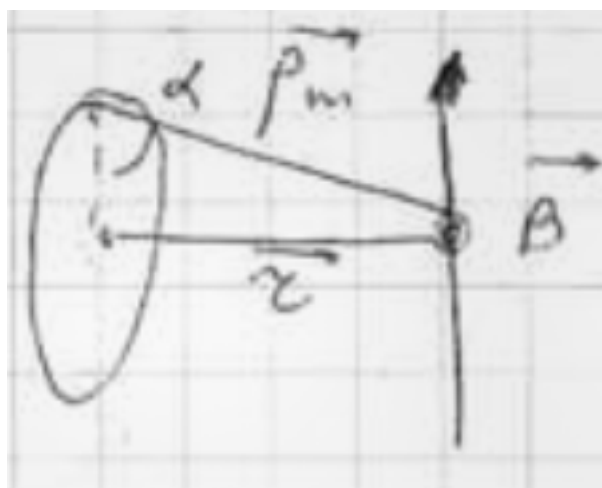


31.

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha \quad (98)$$

$$\cos \alpha = 0 \Rightarrow F = 0 \quad (99)$$

б)



32.

$$W_{\text{II}} = -p_m B \cos \varphi \quad (100)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \cos \varphi} \quad (101)$$

$$r' = r \cos \varphi \quad (102)$$

$$F_x = -p_m \frac{\partial B}{\partial r} \cos \varphi = - \left( p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi \cos \varphi} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \right) \cos \varphi = \frac{p_m \mu_0 I}{2\pi r^2} \quad (103)$$

в)

$$F_x = -p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha = \frac{p_m \mu_0 I}{2\pi r^2}. \quad (104)$$

**Ответ:** а)  $\vec{F} = \vec{0}$ , б)  $\vec{F} = -\frac{\mu_0 p_m I}{2\pi r^2} \vec{e}_\varphi$ , в)  $\vec{F} = -\frac{\mu_0 p_m I}{2\pi r^2} \vec{e}_r$ .

### №3

**Условие:** Тонкий диск из диэлектрика, несущий заряд поверхностная плотность которого  $\sigma$  равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Рассчитать:

- индукцию магнитного поля в центре диска;
- магнитный момент диска.

**Решение:**

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad dq = \sigma dS \quad (105)$$

$$I = \frac{\sigma dS \omega}{2\pi} = \frac{\sigma \omega 2\pi r dr}{2\pi} = \sigma \omega r dr \quad (106)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I[dl, r]}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl r \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I \cdot 2\pi \cdot r}{4\pi \cdot r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r} \quad (107)$$

$$\text{а) } B = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr}{2R} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$$

$$\text{б) } p_m = \int I dS = \int \sigma \omega \pi r^3 dr = \frac{\sigma \omega \pi R^4}{4}$$

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega R$ ,  $p_m = \frac{\pi \sigma R^4}{4}$ .

---

#### №4

**Условие:** Сферическая поверхность радиуса  $R$ , состоящая из диэлектрика вращается равномерно вокруг своего диаметра с угловой скоростью  $\omega$ . Рассчитать магнитную индукцию в центре сферы если поверхностная плотность зарядов равна  $\sigma$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $B = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R$ .

---

#### №5

**Условие:** Вдоль оси бесконечного прямого цилиндра радиуса  $R_0$  течёт линейный ток силой  $I$ . Магнитная проницаемость вещества цилиндра  $\mu$ . Вокруг цилиндра вакуум. Найти:

- напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ ;
- индукция магнитного поля  $\vec{B}$ ;
- намагниченность  $\vec{J}$ ;

во всех точках пространства. Рассчитать объёмную и поверхностную плотность молекулярных токов.

**Решение:**

**Ответ:**  $\vec{H}(r < R_0) = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \vec{H}(r > R_0)$ ,  $\vec{B}(r < R_0) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{J}(r < R_0) = \frac{I(\mu-1)}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{B}(r > R_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{J}(r > R_0) = \vec{0}$ ,  $\vec{j}_{\text{мо}} = \vec{0}$ ,  $j_{\text{мп}} = \frac{I(1-\mu)}{2\pi R_0}$ .

---

#### №6

**Условие:** Среда состоит из однородного изотропного магнетика и вакуума. Модуль вектора индукция магнитного поля вблизи поверхности магнетика со стороны вакуума равен  $B$ . Найти модуль индукции магнитного поля  $B'$  в магнетике вблизи его поверхности, если вектор  $B$  составляет угол  $\alpha$  с нормалью к поверхности раздела магнетика и

вакуума (поверхность можно считать плоскостью), а магнитная проницаемость магнетика  $\mu$ .

**Решение:**

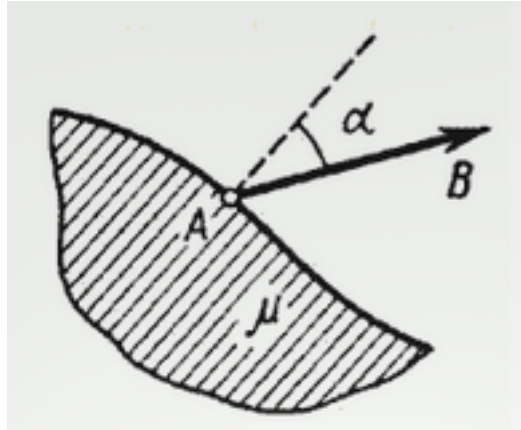


Рис. 33. Поясняющий рисунок.

$$B' = \sqrt{B_n^2 + B_\tau^2} \quad (108)$$

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (109)$$

$$H_{2\tau} = H_{1\tau} \quad (110)$$

$$B_n = B \cos \alpha \quad (111)$$

$$B_\tau = \mu \mu_0 H_\tau = \mu \mu_0 H_{0\tau} = \mu (B)_\tau = \mu B \sin \alpha \quad (112)$$

$$B' = B \sqrt{\cos^2 \alpha + \mu^2 \sin^2 \alpha} \quad (113)$$

**Ответ:**  $B' = B \sqrt{\cos^2 \alpha + \mu^2 \sin^2 \alpha}$ .

## №7

**Условие:** Воспользовавшись условиями предыдущей задачи рассчитать циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по замкнутому квадратному контуру, длина стороны которого  $l$ . Граница раздела сред пересекает контур параллельно двум его противоположным сторонам.

**Решение:**

**Ответ:**  $\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = B \sin \alpha l (1 - \mu)$ .

---

### №8

**Условие:** По длинному цилиндрическому проводу течёт ток перпендикулярно плоскости поперечного сечения. Сила тока  $I$ . Провод изготовлен из парамагнетика с магнитной восприимчивостью  $\chi$ . Найти:

- силу поверхностного молекулярного тока  $I'_{\text{пов}}$ ;
- силу объёмного молекулярного тока  $I'_{\text{об}}$ .

Определить как эти токи направлены друг относительно друга.

**Решение:** Внутри цилиндрического провода имеется внешний ток плотности  $\frac{I}{\pi R^2}$ . Это дает магнитное поле  $H_\phi$  с

$$H_\phi 2\pi r = I \frac{r^2}{R^2} \quad \text{или,} \quad H_\phi = \frac{Ir}{2\pi R^2} \quad (114)$$

Из этого  $B_\phi = \frac{\mu\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$  и  $J_\phi = \frac{\mu-1}{2\pi} \frac{Ir}{R^2} = \frac{\chi I}{2\pi R} dl = \chi I =$  намагниченность.

Следовательно, объёмный молекулярный ток,

$$\oint_{r=R} \vec{J}_\phi \cdot d\vec{r} = \int \frac{\chi I}{2\pi R} dl = \chi I \quad (115)$$

Поверхностный ток получается с использованием эквивалентности плотности поверхностного тока к  $\vec{J} \times \vec{n}$ , это приводит к плотности поверхностного тока в  $z$ -направлении  $-\frac{\chi I}{2\pi R}$

Поверхностный молекулярный ток

$$I'_{\text{пов}} = -\frac{\chi I}{2\pi R} (2\pi R) = -\chi I \quad (116)$$

Оба тока имеют противоположные знаки.

**Ответ:**  $I_{\text{мо}} = I_\chi$ ,  $I_{\text{мп}} = -I_\chi$ .

---

### №9

**Условие:** Длинный соленоид заполнен неоднородным парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого зависит от расстояния до оси как  $\chi = \alpha r^2$ . На оси соленоида магнитная индукция равна  $B_0$ .

Рассчитать, как функцию  $r$ :

- намагниченность магнетика;
- плотности объемного молекулярного тока.

**Решение:**

**Ответ:**  $J(r) = \frac{B_0 \alpha r^2}{\mu_0}$ ,  $j(r) = \frac{2\alpha B_0}{\mu_0} r$ .

## Частица в магнитном поле

### №1

**Условие:** Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью перпендикулярной полю. Напряжённость магнитного поля  $H = 103 \text{ А/м}$ . Ускоряющая разность потенциалов, придавшая электрону скорость  $U = 400 \text{ В}$ . Рассчитать радиус кривизны траектории  $R$  и частоту  $\nu$  обращения электрона в магнитном поле.

**Решение:**

**Ответ:**  $R = \frac{1}{\mu_0 H} \sqrt{\frac{2U}{q_m}} \approx 5.37 \text{ см}, \nu = \frac{\mu_0 H q_m}{2\pi} \approx 35 \text{ МГц}$ .

---

### №2

**Условие:** В однородное магнитное поле с магнитной индукцией  $B = 0.4 \text{ Тл}$  перпендикулярно полю с постоянной скоростью влетает заряженная частица. В течении  $6 \text{ мкс}$  включается постоянное электрическое поле напряжённостью  $E = 300 \text{ В/м}$  сонаправленно магнитному полю. Рассчитать шаг винтовой траектории частицы после выключения электрического поля.

**Решение:** По формуле силы Лоренца:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (117)$$

До включения электрического поля:

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (118)$$

Частица движется по окружности

$$F_{\text{маг}} = qvB. \quad (119)$$

Сила Лоренца равна центростремительной силе:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} \quad (120)$$

Угловая частота:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} \quad (121)$$

Когда включается электрическое поле вдоль магнитного поля, на частицу вдоль  $B$  действует  $F = qE$ . Соответственно вдоль оси  $B$  ускорение  $a = \frac{qE}{m}$ .

За время  $\Delta t$  скорость вдоль оси становится:

$$v = a\Delta t = \frac{qE}{m}\Delta t \quad (122)$$

После выключения электрического поля частица летит в магнитном поле с постоянной перпендикулярной скоростью и параллельной, то есть по винтовой траектории.

Расстояние за один оборот:

$$h = vT, \quad (123)$$

где  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$  - период кругового движения.

Подставим:

$$h = vT = \frac{qE}{m}\Delta t \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi E\Delta t}{B} \quad (124)$$

Подставим числа:

$$h = \frac{2\pi \cdot 300 \text{ В/м} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ с}}{0.4 \text{ Тл}} \approx 0.28 \text{ м.} \quad (125)$$

**Ответ:**  $h = \frac{2\pi E}{B}t \approx 0.028 \text{ м.}$

## Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

### № 1

**Условие:** В однородное магнитное поле, индукция которого  $B = 1$  Тл внесли квадратный контур со стороной  $a = 10$  см, по которому течёт ток  $I = 100$  А, после чего контур свободно устанавливается в магнитном поле под действием механического момента. Рассчитать работу  $A'$ , совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон на угол  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

**Решение:**

**Ответ:**  $A = B I a^2 = 1$  Дж.

---

### № 2

**Условие:** Магнитное поле создаётся длинным прямым проводником, по которому течёт ток  $I_0$ . В одной плоскости с проводником расположена квадратная рамка с током  $I$ , сторона рамки  $a$ . Рассчитать:

- силу ампера действующую на рамку;
- работу, которую необходимо совершить при медленном повороте рамки вокруг оси параллельной проводнику на угол  $180^\circ$ , проходящей через центры противоположных сторон рамки;

если расстояние от этой оси до проводника в  $\eta$  раз больше стороны рамки.

**Решение:**

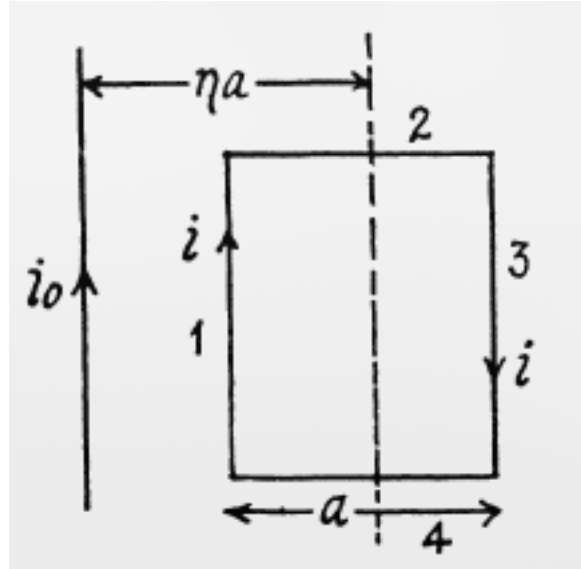


Рис. 34. Поясняющий рисунок.

а) Как видно из условия, силы Ампера на сторонах (2) и (4) равны по величине, но противоположны по направлению. Следовательно, чистая эффективная сила на рамке является результатом сил, испытываемых сторонами (1) и (3).

Теперь сила Ампера на (1),

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II_0}{\left(\eta - \frac{1}{2}\right)} \quad (126)$$

и на (3),

$$F_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 I}{\left(\eta + \frac{1}{2}\right)} \quad (127)$$

Итак, результирующая сила на рамке  $= F_1 - F_3$ , (поскольку они противоположны).

$$= \frac{2\mu_0 II_0}{\pi(4\eta^2 - 1)} \quad (128)$$

б) Выполненная работа при повороте рамки на некоторый угол  $A = \int I d\Phi = I(\Phi_{\text{кон}} - \Phi_{\text{нач}})$ , где  $\Phi_{\text{кон}}$  - поток через рамку в конечном положении, а  $\Phi_{\text{нач}}$  - в исходное положение.

Итак,  $|\Phi_{\text{кон}}| = |\Phi_{\text{нач}}| = \Phi$  и  $\Phi_{\text{нач}} = -\Phi_{\text{кон}}$  значит,

$$\Delta\Phi = 2\Phi \quad \text{и} \quad A = I2\Phi \quad (129)$$

Следовательно

$$A = 2I \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2I \int_{a(\eta-\frac{1}{2})}^{a(\eta+\frac{1}{2})} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 a}{r} dr = \frac{\mu_0 I I_0 a}{\pi} \ln \left( \frac{2\eta+1}{2\eta-1} \right)$$

**Ответ:**  $F_A = \frac{2\mu_0 I I_0}{\pi(4\eta^2-1)}, \quad A = \frac{\mu_0 I_0 I a}{\pi} \ln \left( \frac{2\eta+1}{2\eta-1} \right).$

## Электромагнитная индукция

### Индукция токов. Закон электромагнитной индукции Фарадея

#### №1

**Условие:** В однородном магнитном поле, с индукцией модуль которой  $B$ , расположен замкнутый контур (Рис. 35). Верхнюю часть контура, представляющую с собой полуокружность радиуса  $R_0$  вращают вокруг оси  $OO'$  с постоянной угловой частотой  $\omega$ . Найти э.д.с. индукции возникающую в контуре, как функцию времени, если в момент  $t = 0$  магнитный поток через контур максимальный.

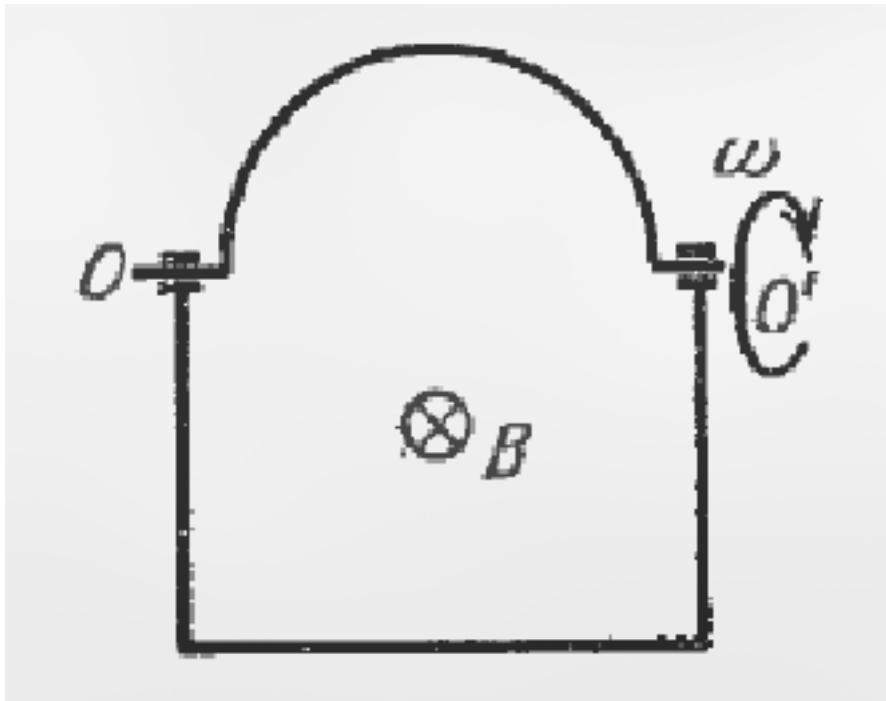


Рис. 35. Контур.

**Решение:**

**Ответ:**  $\mathcal{E}^{\text{инд}} = \frac{\pi}{2} R_0^2 B \omega \sin \omega t$ .

---

#### №2

**Условие:** В однородном магнитном поле, модуль индукции которого  $B = 0.4$  Тл, с постоянной частотой  $\nu = 480$  об/мин вращается замкнутая рамка, состоящая из  $N = 1000$  витков проволоки. Площадь ограниченная контуром рамки  $S = 200$  см<sup>2</sup>. Рассчитать значение эдс

индукции в момент, когда угол между нормалью к рамке и вектором магнитной индукции равен  $30^\circ$ .

**Решение:**

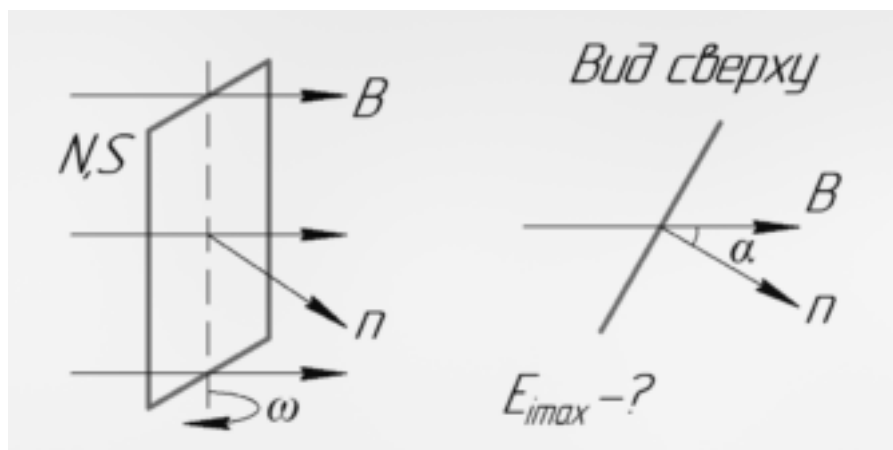


Рис. 36. Поясняющий рисунок

В общем случае магнитный поток  $\Phi$  через некоторую плоскую поверхность, помещенную в однородном магнитном поле, можно определить по такой формуле:

$$\Phi = BS \cos \alpha \quad (131)$$

В этой формуле  $B$  - индукция магнитного поля,  $S$  - площадь поверхности, через которую определяется магнитный поток,  $\alpha$  - угол между нормалью к площадке и вектором магнитной индукции.

Если учесть, что рамка имеет  $N$  витков обмотки, при этом сама рамка вращается в поле с некоторой угловой скоростью  $\omega$ , то формула 131 примет следующий вид:

$$\Phi = NBS \cos \omega t \quad (132)$$

Согласно закону Фарадея для электромагнитной индукции, ЭДС индукции, возникающая в контуре при изменении магнитного потока, пересекающего этот контур, равна по модулю скорости изменения магнитного потока (то есть первой производной функции изменения потока от времени):

$$\varepsilon_i = -\Phi'(t) \quad (133)$$

Тогда

$$\varepsilon_i = -(NBS \cos \omega t)' = NBS\omega \sin \omega t \quad (134)$$

Угловая скорость вращения  $\omega$  связана с частотой вращения  $\nu$  по такой формуле:

$$\omega = 2\pi\nu \quad (135)$$

Получим окончательную формулу:

$$\varepsilon_i = NBS2\pi\nu \sin 2\pi\nu t \quad (136)$$

Мы знаем, что  $\omega t = 30^\circ$ . Тогда:

$$\varepsilon_i = NBS2\pi\nu \sin 30^\circ = NBS2\pi\nu \frac{1}{2} = NBS\pi\nu \quad (137)$$

Подставим числа и получим:

$$\varepsilon_i = 1000 \cdot 0.4 \cdot 0.02 \cdot \pi \cdot \frac{480}{60} \approx 201 \text{ В} \quad (138)$$

**Ответ:**  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = NBS\nu\pi \approx 201 \text{ В}$ .

---

### №3

**Условие:** В однородном магнитном поле, модуль индукции которого  $B = 0.1 \text{ Тл}$  расположен плоский проволочный виток, замкнутый на гальванометр. Площадь ограниченная контуром витка  $S = 10^{-2} \text{ м}^2$ . В начальный момент времени плоскость витка располагалась перпендикулярно магнитному полю. После поворота витка на некоторый угол  $\alpha$ , через гальванометр прошёл заряд  $q = 7.5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$ . Рассчитайте угол  $\alpha$  на который повернули виток если его сопротивление  $R = 2 \text{ Ом}$ .

**Решение:** Проволочный виток (замкнутый контур) в магнитном поле. Магнитный поток, пронизывающий контур, находящийся в магнитном поле:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha. \quad (139)$$

При повороте витка, меняется угол, поэтому меняется магнитный поток, что приводит к возникновению ЭДС индукции. За время поворота  $\Delta t$  по витку пройдет заряд:

$$q = I \cdot \Delta t, \quad (140)$$

здесь  $I$  - сила индукционного тока. Воспользуемся законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R}, \quad (141)$$

ЭДС индукции, согласно закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \quad (142)$$

$\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1$  - изменение магнитного потока.  $\Phi_1 = BS$ , т.к. по условию угол между нормалью к контуру и индукцией поля равен нулю.

$$\Phi_2 = B \cdot S \cdot \cos \alpha, \quad (143)$$

$$q = \frac{\varepsilon_i}{R} \Delta t = \frac{\Delta \Phi}{R} = \frac{B \cdot S \cdot \cos \alpha - B \cdot S}{R} \quad (144)$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{q \cdot R + B \cdot S}{B \cdot S} \right| = 1 - \frac{q \cdot R}{B \cdot S} \quad (145)$$

**Ответ:**  $\alpha = 1 - \frac{Rq}{BS} \approx 120^\circ$ .

#### №4

**Условие:** К источнику сторонних эдс сопротивление которого пренебрежимо мало, а  $\varepsilon_0 = 2$  В подключили соленоид индуктивность которого  $L = 0.1$  Гн, а сопротивление  $R = 0.02$  Ом. Рассчитать заряд, который пройдет через соленоид за первые 5 с.

**Решение:**

**Ответ:**  $q = \frac{\varepsilon}{R} \left( t + \frac{L}{R} \left( \exp \left[ -\frac{R}{L} t \right] - 1 \right) \right) \approx 184$  Кл.

---

**№5**

**Условие:** Квадратная рамка со стороной  $a = 70$  см помещена в магнитное поле так, что нормаль к рамке составляет угол  $\alpha = 45^\circ$  с направлением магнитного поля. Индукция магнитного поля меняется по закону  $B = B_0 \cos \omega t$ , где  $B_0 = 0.2$  Тл,  $\omega = 6\text{с}^{-1}$ . Рассчитать ЭДС индукции, возникающей в рамке в момент времени  $t = 3$  с.

**Решение:**

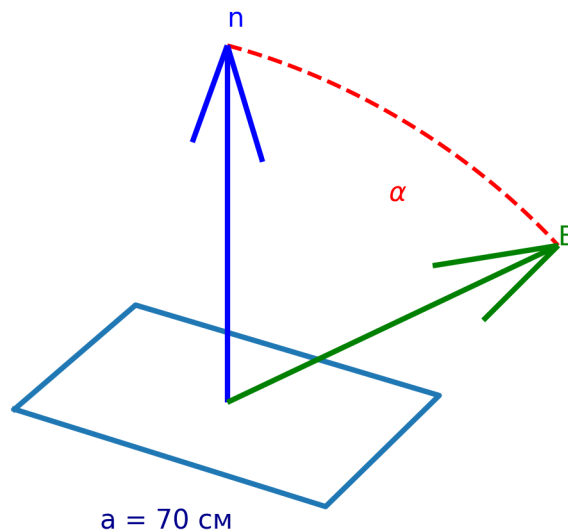


Рис. 37. Квадратная рамка в переменном магнитном поле.

По формуле магнитного потока через плоскость:

$$\Phi = BS \cos \alpha \quad (146)$$

Площадь рамки:

$$S = a^2 \quad (147)$$

Так как  $B = B_0 \cos(\omega t)$ :

$$\Phi = B_0 a^2 \cos \beta \cos(\omega t) \quad (148)$$

По закону Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\Phi'(t) = B_0 a^2 \omega \cos \beta \sin \omega t \quad (149)$$

Подставив числа из условия, получим:

$$\mathcal{E} = 0.2 \cdot 0.7^2 \cdot 6 \cdot \cos(45^\circ) \cdot \sin(6 \cdot 3) \approx -0.31 \text{ В.} \quad (150)$$

**Ответ:**  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0 \omega \sin(\omega t) \approx -0.31 \text{ В.}$

---

### №6

**Условие:** В прямом бесконечном проводнике течёт ток, сила которого меняется по закону  $I = \beta t^3$ , где  $\beta = 2 \text{ А/с}^3$ . В одной плоскости с проводником, параллельно ему, расположена квадратная рамка, сторона которой  $a = 20 \text{ см}$ , а сопротивление материала рамки  $R = 7 \text{ Ом}$ . Расстояние от ближайшей стороны рамки до проводника  $l = 20 \text{ см}$ . Рассчитать силу тока в рамке в момент времени  $t = 10 \text{ с}$ .

**Решение:**

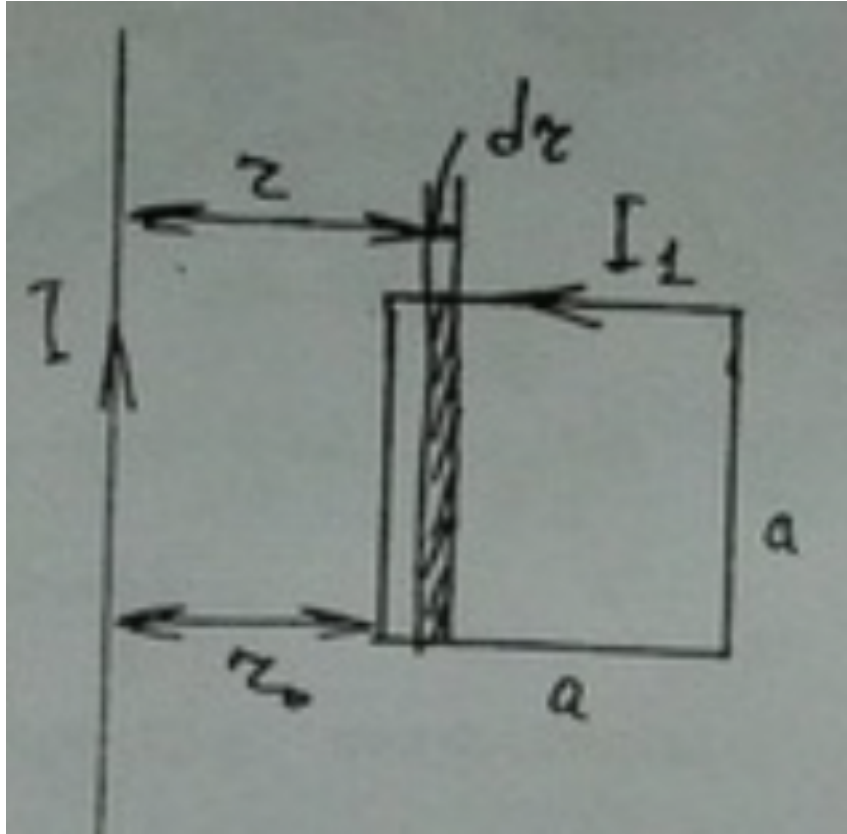


Рис. 38. Поясняющий рисунок.

Магн. индукция поля, создаваемого бесконечным проводником:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (151)$$

Найдем поток этого магнитного поля сквозь контур:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_l^{l+a} B \cdot a \cdot dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \int_l^{l+a} \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \end{aligned} \quad (152)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \frac{dI}{dt} \quad (153)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta t^3) = 3\beta t^2 \quad (154)$$

$$\varepsilon = -\frac{3\mu_0\beta at^2}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \quad (155)$$

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{3\mu_0\beta at^2}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \quad (156)$$

Подставим числа и получим:

$$I = \frac{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 0.2 \cdot 10^2}{2\pi \cdot 7} \ln\left(1 + \frac{0.2}{0.3}\right) \approx 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ А} \quad (157)$$

**Ответ:**  $I = \frac{3\mu_0 a \beta}{2\pi} \log\left(1 + \frac{a}{l}\right) t^2 \approx 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ А}.$

---

## № 7

**Условие:** П-образный проводник расположен в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости проводника. Магнитная индукция поля изменяется с постоянной скоростью  $\beta$ . Вдоль параллельных сторон проводника с постоянным ускорением  $a$  перемещают проводник перемычку, длина которой  $l$ . Рассчитать эдс индукции через время  $t$  после начала перемещения перемычки, если в начальный момент времени и индукция и площадь контура равны 0.

**Решение:** Площадь контура как функция времени:

$$S(t) = l \cdot s(t) = l \cdot \frac{a \cdot t^2}{2} \quad (158)$$

Индукция магнитного поля как функция времени:

$$B(t) = \beta t \quad (159)$$

ЭДС индукции (без учетного знака):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left| \frac{d}{dt} \Phi \right| = \left| \frac{d}{dt} (B(t) \cdot S(t)) \right| = \left| \frac{d}{dt} \left[ \beta t \left( l \cdot \frac{a \cdot t^2}{2} \right) \right] \right| = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \beta \cdot t^2 \cdot l \cdot a. \end{aligned} \quad (160)$$

**Ответ:**  $\varepsilon = -\frac{3l\beta a}{2}t^2$ .

---

### №8

**Условие:** Внутри длинного соленоида расположена катушка состоящая из  $N$  витков. Площадь поперечного сечения катушки  $S$ . Катушку поворачивают с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вдоль оси совпадающей с её диаметром и перпендикулярной к оси соленоида. Рассчитать эдс индукции в катушке если, индукция магнитного поля в соленоиде изменяется со временем как  $B = B_0 \sin(\omega t)$ , а в момент времени  $t = 0$  ось катушки совпадала с осью соленоида.

**Решение:** Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, ЭДС индукции в катушке равна

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}, \quad (161)$$

где

- $\phi = N\Phi$  - полное потокоцепление катушки,
- $N$  - число витков,
- $\Phi$  - магнитный поток через один виток.

Магнитный поток через один виток определяется выражением

$$\Phi = \int_S B_n dS = \int_S B \cos \alpha dS \quad (162)$$

где

$B_n$  - проекция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  на нормаль  $\vec{n}$  к плоскости витка,  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{n}$ .

Поскольку катушка вращается с угловой скоростью  $\omega$ , угол между нормалью к витку и направлением магнитного поля меняется по закону

$$\alpha = \omega t. \quad (163)$$

В момент времени  $t = 0$  ось катушки совпадает с осью соленоида, поэтому  $\alpha(0) = 0$ .

Поле внутри длинного соленоида однородно, следовательно, магнитный поток через один виток равен

$$\Phi = BS \cos \omega t, \quad (164)$$

где  $S$  - площадь витка.

Тогда потокосцепление катушки

$$\phi = N\Phi = NBS \cos \omega t. \quad (165)$$

Если магнитная индукция изменяется со временем по закону

$$B = B_0 \sin \omega t, \quad (166)$$

то

$$\phi = NB_0 S \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} NB_0 S \sin 2\omega t. \quad (167)$$

Теперь найдем ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} NB_0 S \cdot 2\omega \cos 2\omega t = NB_0 S \omega \cos 2\omega t. \quad (168)$$

**Ответ:**  $\varepsilon = B_0 N S \omega \cos(2\omega t)$ .

---

## №9

**Условие:** По длинному прямому соленоиду, радиус сечения которого  $R$  и плотностью намотки  $n$ , течёт ток, скорость изменения которого от времени равна  $\dot{i}$ . Рассчитать вектор напряжённости вихревого электрического поля, как функцию расстояния  $r$  от оси соленоида.

**Решение:**

**Ответ:**