

Диэлектрики в электрическом поле.

Лекция 4

© С.А. Курашова, 2015

Диэлектрики в электрическом поле.

Диэлектриками или изоляторами называют вещества, которые практически не проводят электрического тока.

Смещение в противоположные стороны положительных и отрицательных зарядов диэлектрика под действием внешнего электрического поля называют электрической поляризацией.

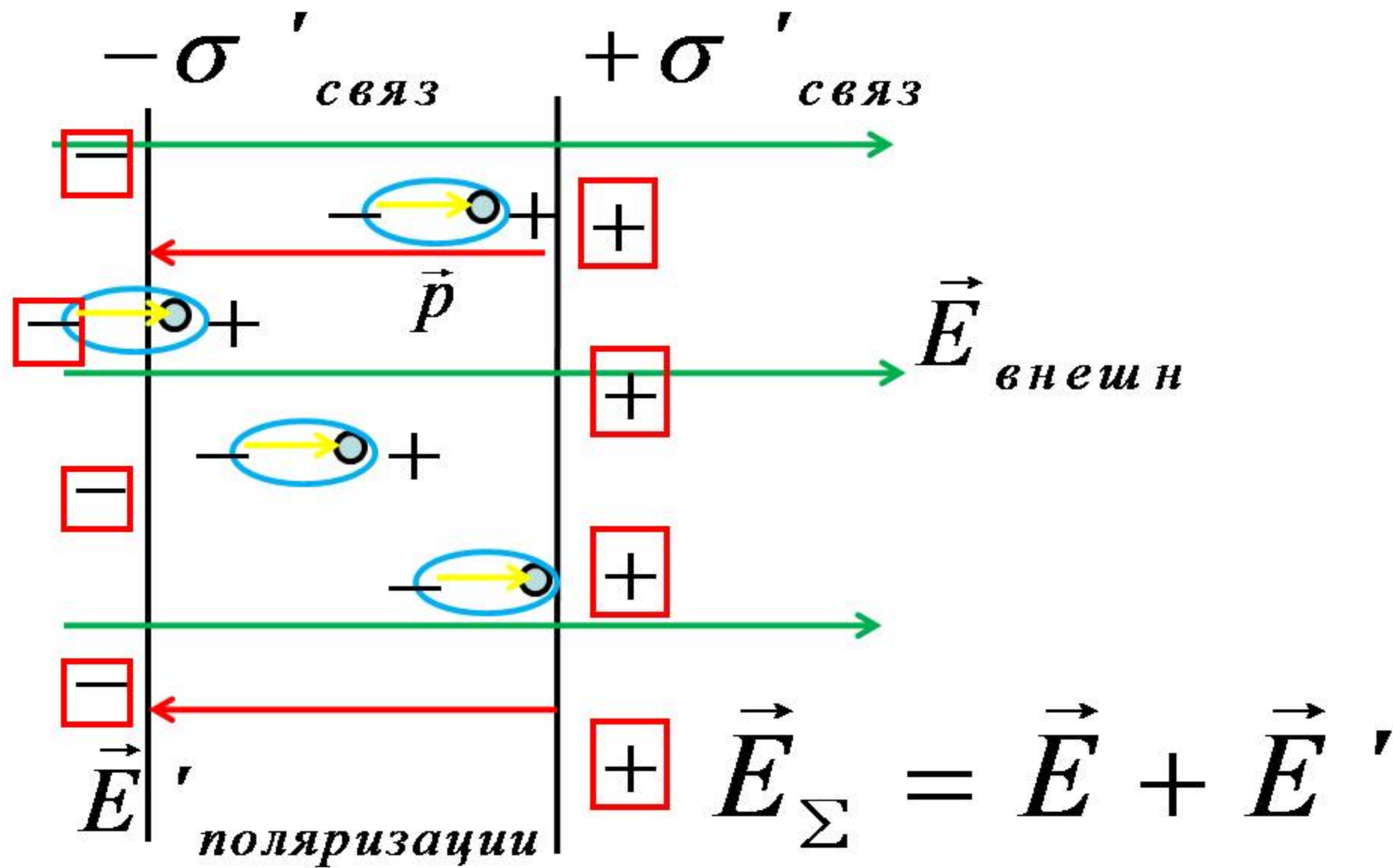
Поляризация неполярных диэлектриков.

Молекулы неполярные. Заряды в таких диэлектриках могут смещаться от своего начального положения лишь на расстояния меньше атомных

$$r_{1 \text{ Бор орбиты}} = 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ см} \quad \frac{e}{r^2} = 5 \cdot 10^9 \text{ В / см}$$

Но пробой воздуха наступает при напряжённости $E = 3 \cdot 10^4 \text{ В / см}$

Понятно, что смещение зарядов происходит на расстояние $\ll r$ атома



Поле внутри диэлектрика равно сумме внешнего поля и поля поляризации

Поверхностные индуцированные заряды, появляющиеся при поляризации диэлектрика называют **поляризационными или связанными.**

При поляризации плоскопараллельной пластины из однородного изотропного диэлектрика значительных изменений внутри него не происходит.

Нескомпенсированные заряды выступают только на поверхности этой пластины.

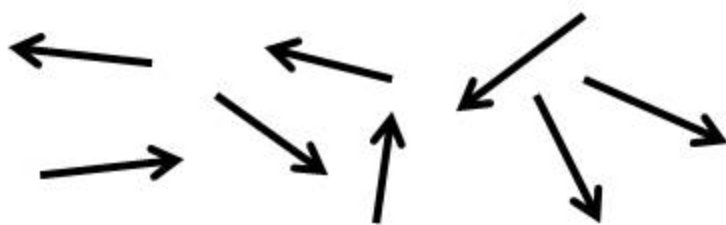
Свободные заряды – заряды, которые под действием внешнего электрического поля могут перемещаться по всему объёму вещества (в металлах, растворах и расплавах электролитов)

Сторонние заряды - заряды, которые не входят в состав рассматриваемого диэлектрика.

Например, если в конденсатор поместили две пластины из диэлектрика и одну из них мы описываем, то это и свободные заряды на обкладках конденсатора, и связанные заряды на соседнем диэлектрике. Часто в учебниках вместо "сторонние" заряды пишут "свободные", имея в виду самую простую задачу, когда в конденсаторе находится только один диэлектрик.

Поляризация полярных диэлектриков.

Молекулы полярных диэлектриков обладают собственным дипольным моментом уже в отсутствие внешнего электрического поля. Если внешнего поля нет, то они ориентированы совершенно беспорядочно и совершают хаотические тепловые движения.



*Под действием внешнего поля молекулы
выстраиваются дипольными моментами
вдоль поля*

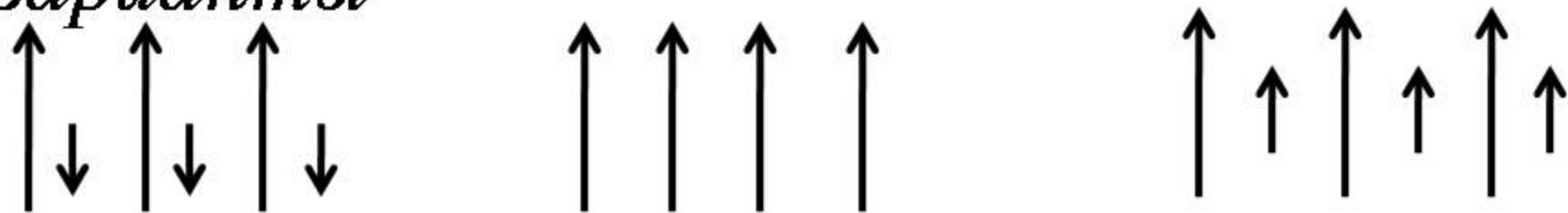


*Но, чем выше температура вещества, тем
суммарный дипольный момент меньше из-за
тепловых колебаний молекул.*

Поляризация ионных кристаллов.

Ионные кристаллы состоят из двух (или более) кристаллических решёток, вдвинутых одна в другую. При наложении внешнего поля эти решётки сдвигаются в противоположных направлениях.

Существуют ионные кристаллы поляризованные уже в отсутствие внешнего электрического поля. См варианты



Дипольный момент, который приобретает одна молекула под действием электрического поля.

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{микро}}$$

α - поляризуемость молекулы.

$$Kл \cdot м = \frac{\Phi}{м} м^3 \frac{В}{м} \quad [\alpha] = м^3$$

$\vec{E}_{\text{микро}}$ - напряженность электрического поля в той точке, где находится молекула.

В слабом поле

$$\vec{E}_{\text{микро}} \simeq \vec{E}_{\Sigma \text{ макр}}$$

Поляризованность или вектор поляризации.

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i$$

$$[\vec{P}] = \frac{Кл}{м^2}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \wp \vec{E}_{\Sigma \text{ макроск}}$$

Линейная связь для большинства диэлектриков

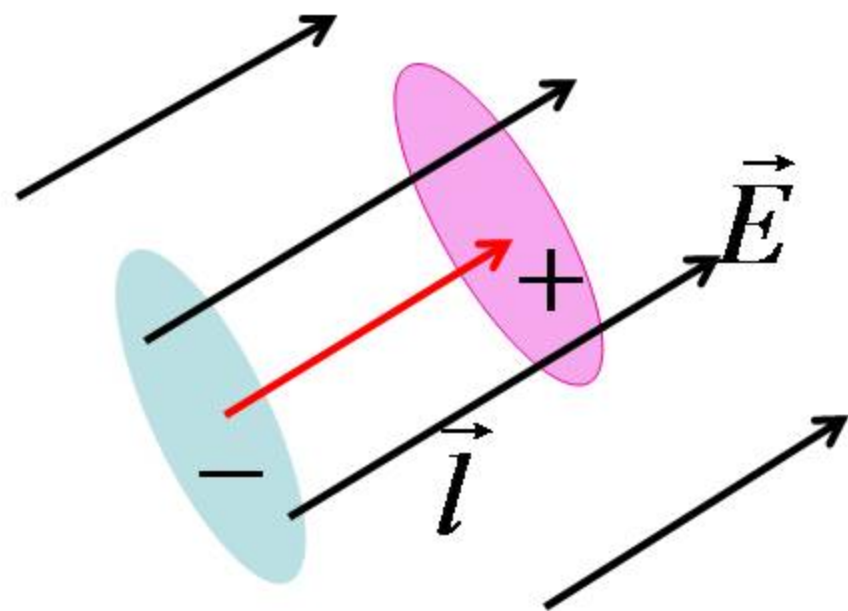
$\wp$ - **диэлектрическая восприимчивость**
(безразмерная величина)

Обратите внимание, **вектор поляризации** сонаправлен с вектором суммарного поля в диэлектрике и с вектором внешнего электрического поля.

Можно выразить вектор поляризации через средний дипольный момент одной молекулы

$$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle$$

Другое выражение для $\vec{P}$ соответствует модели “положительной” и “отрицательной” жидкостей. Положительные заряды внутри диэлектрика при поляризации сместятся относительно отрицательных на $\vec{l}$, дипольный момент единицы объёма



$$\vec{P} = \rho_+ \vec{l}$$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{P}$.

$$\oint_S \vec{P} dS = -q'_{\text{связ}}$$

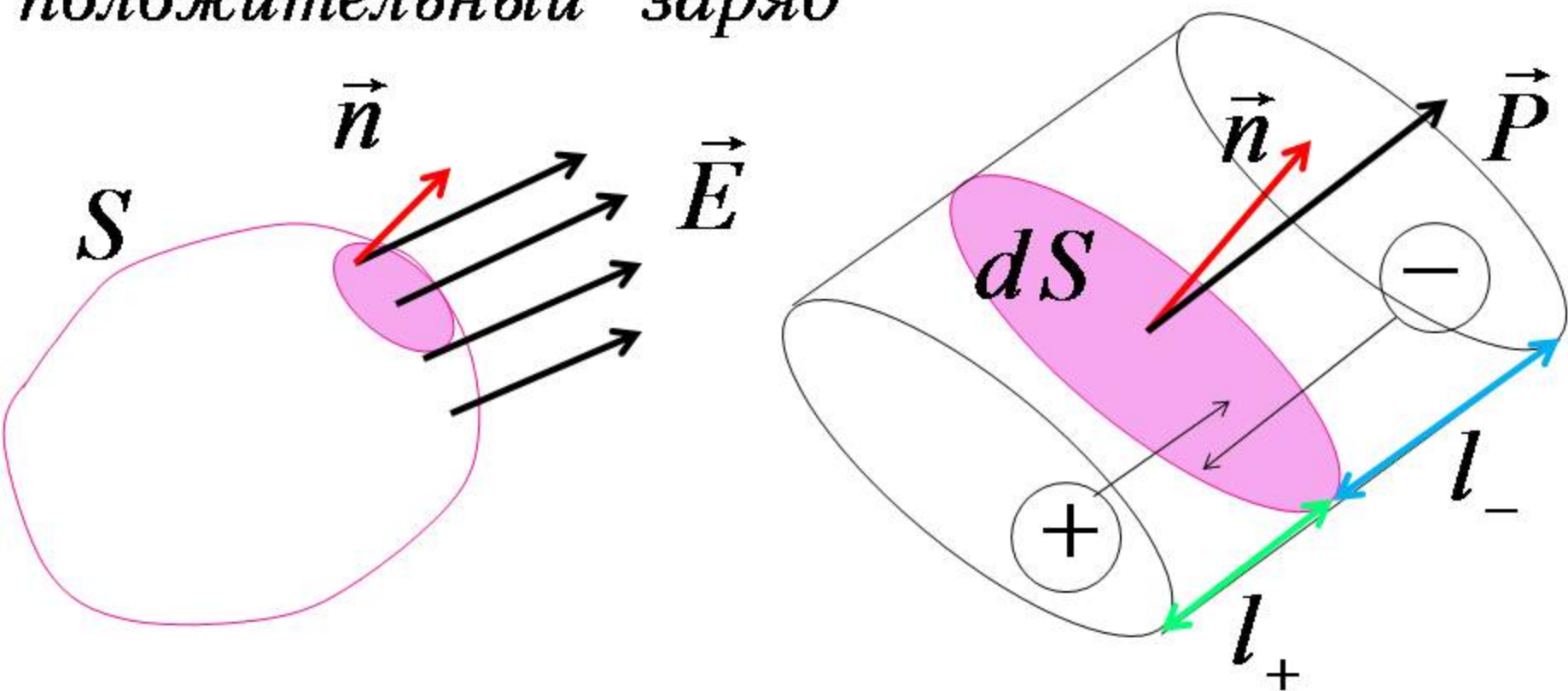
*В интегральной
форме*

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'_{\text{связ}}$$

*В дифференциальной
форме*

Обратите внимание, поляризованность зависит как от сторонних так и от связанных зарядов, а поток только от связанных.

Д-во. При поляризации диэлектрика через поверхность dS наружу пройдёт положительный заряд



$$dq'_{\text{связ}} = \rho'_+ l_+ dS \cos \alpha + |\rho'_-| l_- dS \cos \alpha$$

$$\rho'_+ = |\rho'_-|$$

$$dq'_{\text{связ}} = \rho'_+ (l_+ + l_-) dS \cos \alpha = \rho'_+ l dS \cos \alpha$$

$$dq'_{\text{связ}} = P dS \cos \alpha = \vec{P} d\vec{S}$$

Проинтегрируем по всей поверхности -
получим связанный заряд, который вышел
наружу через поверхность S ,

$$q'_{\text{связ вышел}} = -q'_{\text{связ остался}} = \oint_S \vec{P} d\vec{S}$$

**Как связаны между собой
свободные и связанные заряды в
однородном диэлектрике.**

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = \underbrace{\oint_S \varepsilon_0 \vec{E}_\Sigma d\vec{S}} = -q'_{\text{связ}}$$

По теореме Гаусса для вектора напряжённости это сумма всех зарядов, охваченных поверхностью.

$$\underbrace{\oint_S (\vec{E}_{\text{своб}} + \vec{E}_{\text{связ}}) d\vec{S}} = -q'_{\text{связ}}$$

Если заряды распределены дискретно

$$q'_{\text{связ}} = - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} q_{\text{своб}}$$

Если заряды распределены непрерывно

$$\rho'_{\text{связ}} = - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \rho_{\text{своб}}$$

В диэлектрике объёмная плотность заряда равна нулю, только если диэлектрик однородный и в нём нет свободных зарядов.

Вектор электрической индукции.

Запишем теорему Гаусса для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E}_\Sigma d\vec{S} = q'_{\text{связ}} + q_{\text{своб}}$$

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q'_{\text{связ}}$$

Трудно вычислить $q'_{\text{связ}}$

Исключим эти заряды из уравнений

$$\oint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E}_\Sigma + \vec{P} \right) d\vec{S} = q_{своб}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{своб}$$

*Теорема Гаусса для
вектора **D***

D – вектор электрической индукции

$$[\vec{D}] = \frac{Kл}{м^2}$$

Теорема Гаусса для вектора $\mathbf{D}$ в дифференциальной форме.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Источниками и стоками линий вектора $\mathbf{D}$ являются только свободные заряды.

Задачи по определению поля в диэлектрике нужно решать именно по теореме Гаусса для вектора $\mathbf{D}$, тогда не придётся вычислять величину связанных зарядов

Найдём связь между вектором электрической индукции и вектором напряжённости электрического поля.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_\Sigma + \vec{P}$$

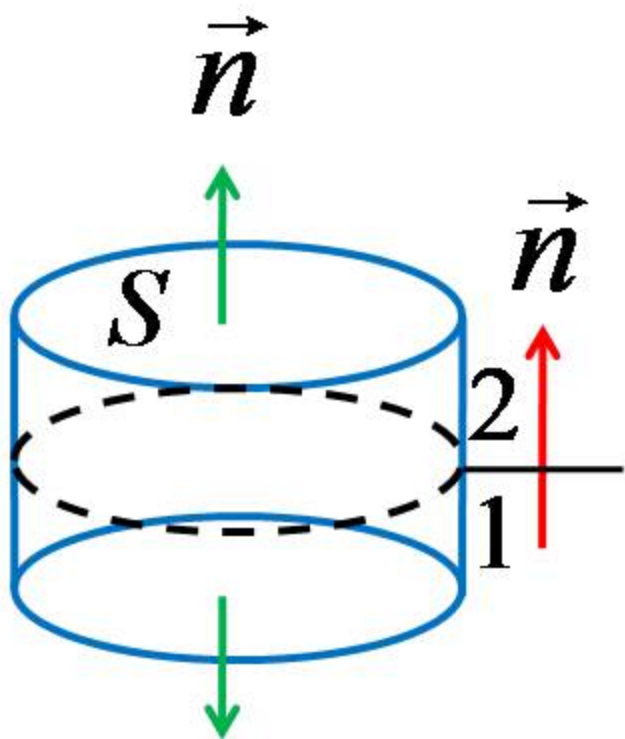
В однородном изотропном диэлектрике

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \wp \vec{E}_{\Sigma \text{ макроск}}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \wp) \vec{E}_\Sigma = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}_\Sigma$$

ε - диэлектрическая проницаемость среды (безразмерная величина)

Граничные условия для вектора $\mathbf{P}$.



$$\vec{n}' = -\vec{n}$$

На границе диэлектрик-
вакуум

$$\oint_S P_n dS = -q'_{\text{связ}}$$

$$P_{2n}S + P_{1n}'S = -\sigma'S$$

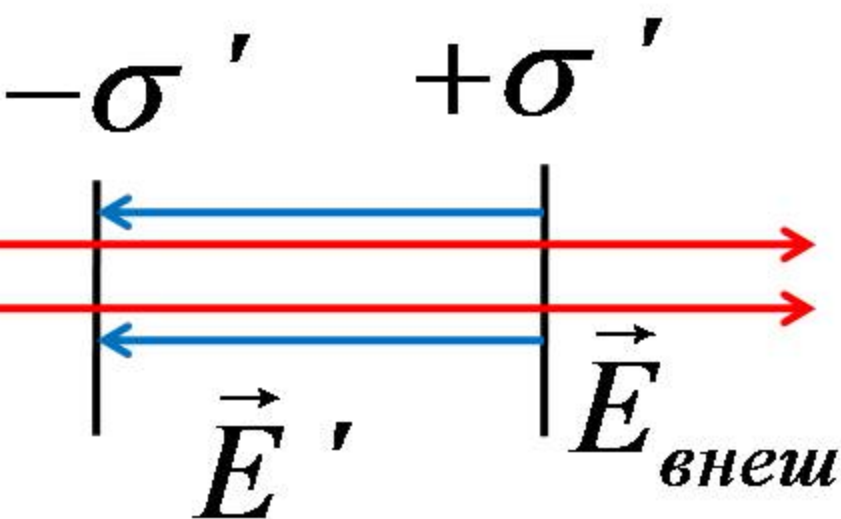
На границе диэлектрик-
диэлектрик

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$$

$$P_{1n} = \sigma'$$

**Докажем, что напряжённость
электрического поля в однородном
изотропном диэлектрике ослабевает
в ϵ раз.**

$$E' = \frac{\sigma'}{2\epsilon_0} 2$$



Граничное условие

$$\sigma' = P$$

*P и E_Σ связаны
соотношением*

$$P = \epsilon_0 \epsilon E_\Sigma$$

Суммарное поле в диэлектрике

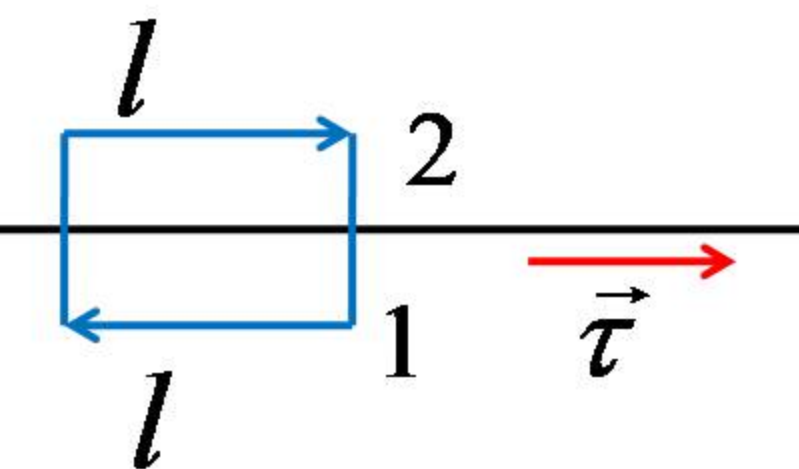
$$E_{\Sigma} = E_0 - E'$$

$$E_{\Sigma}(1 + \varepsilon) = E_0$$

$$E_{\Sigma} = \frac{E_0}{(1 + \varepsilon)} = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

Граничные условия для вектора $\mathbf{E}$ на границе диэлектрик-диэлектрик.

Запишем теорему о циркуляции вектора $\mathbf{E}$



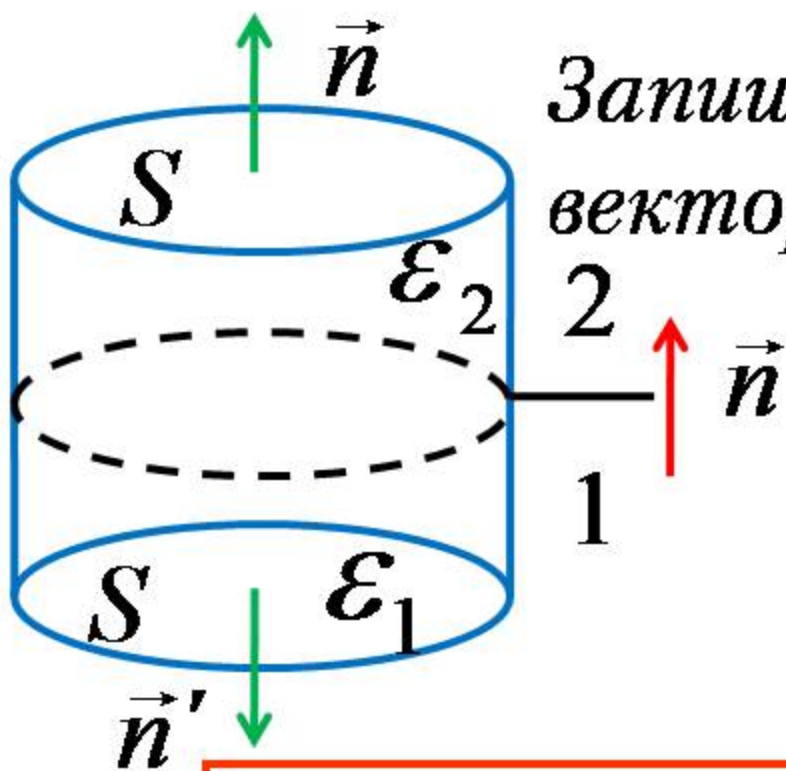
$$\oint_l \mathbf{E}_l d\mathbf{l} = 0$$

Выберем направление касательной τ

$$E_{2\tau} l - E_{1\tau} l = 0$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

Граничные условия для вектора $\mathbf{D}$ на границе диэлектрик-диэлектрик.



Запишем теорему Гаусса для вектора $\mathbf{D}$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{своб}}$$

$$D_{2n}S - D_{1n}S = \sigma S$$

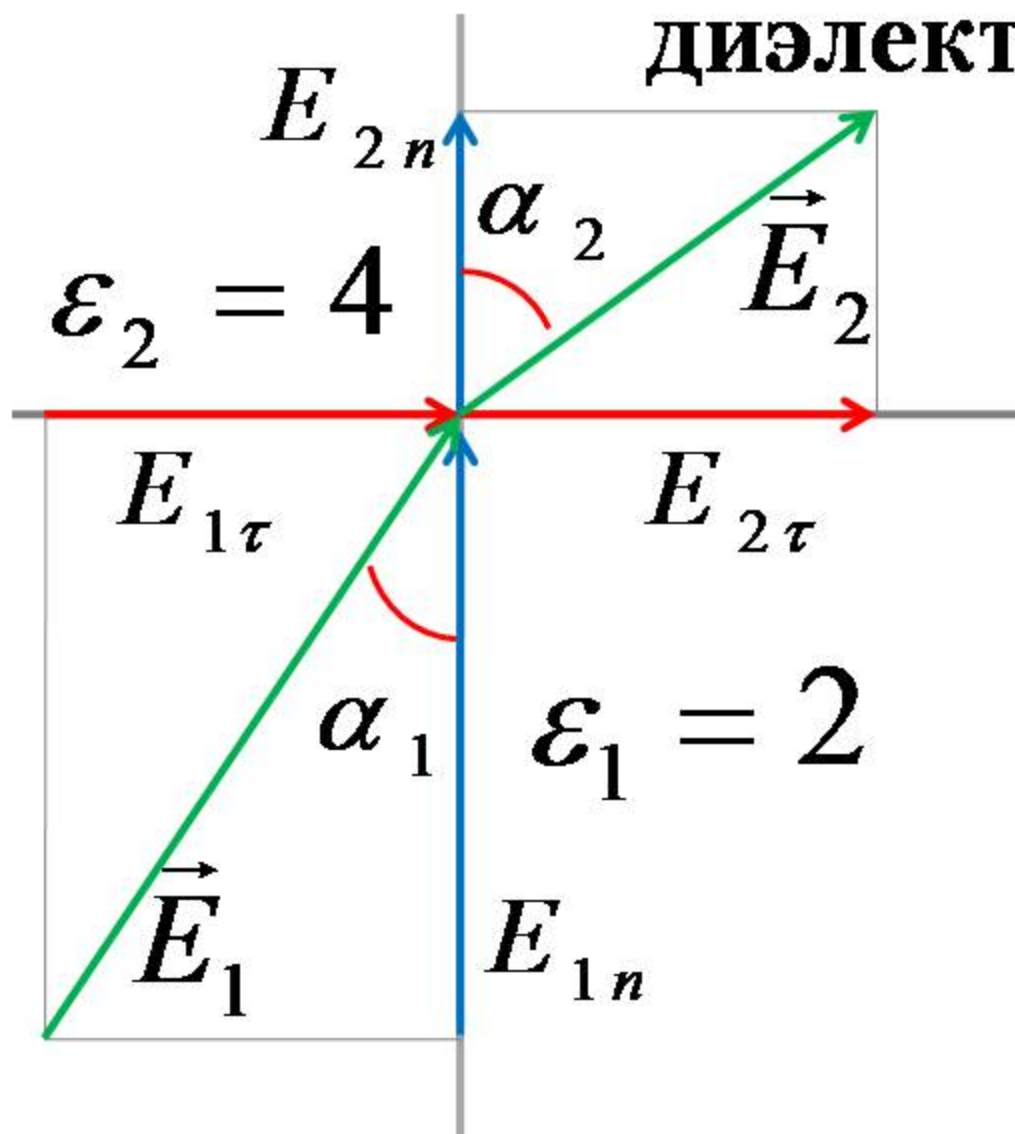
$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

D -Электрическое смещение

Если на границе нет свободных зарядов,

$$D_{1n} = D_{2n}$$

Преломление линий вектора $\vec{E}$ на границе раздела диэлектрик-диэлектрик.



$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{2\tau} E_{1n}}{E_{1\tau} E_{2n}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{2\tau} E_{1n}}{E_{1\tau} E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

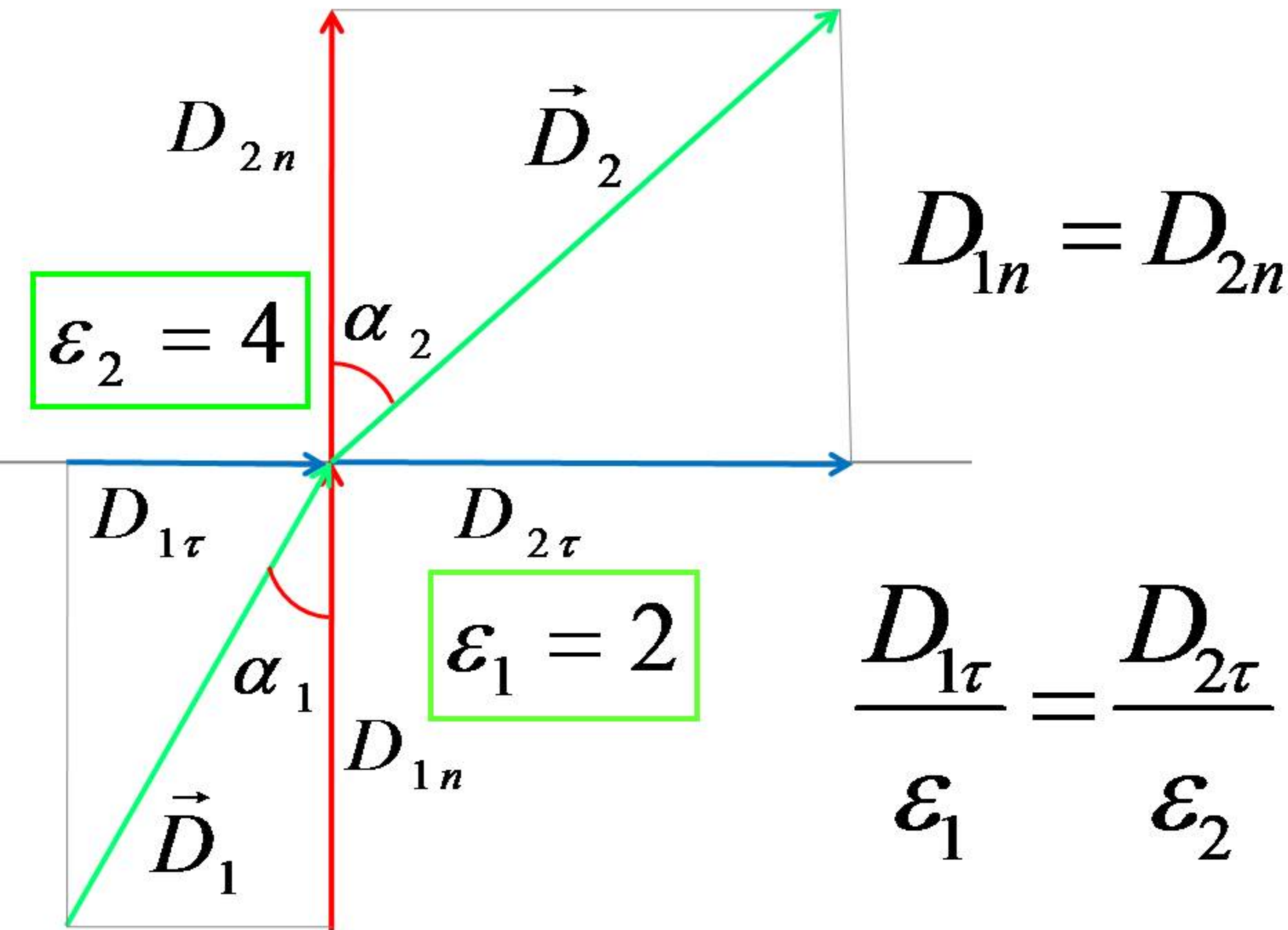
Если

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$$

то

$$\alpha_2 > \alpha_1$$

Преломление линий электрической индукции на границе диэлектрик-диэлектрик



$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{D_{2\tau} D_{1n}}{D_{1\tau} D_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Если

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$$

то

$$\alpha_2 > \alpha_1$$

**Граничные условия для вектора
электрической индукции на
границе проводник- диэлектрик.**

Запишем теорему Гаусса для вектора $\mathbf{D}$

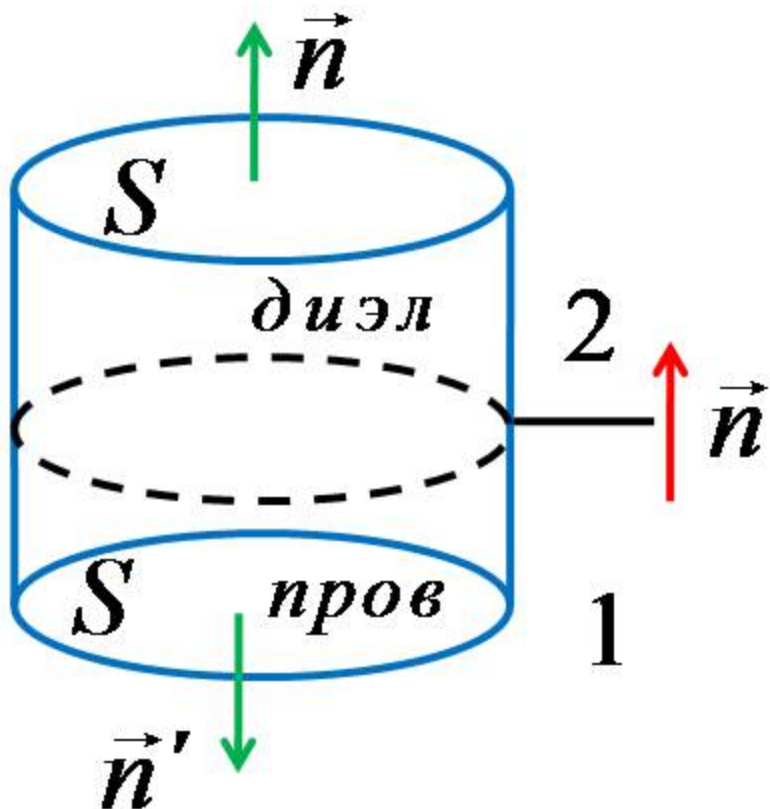
$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{своб}}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

В проводнике

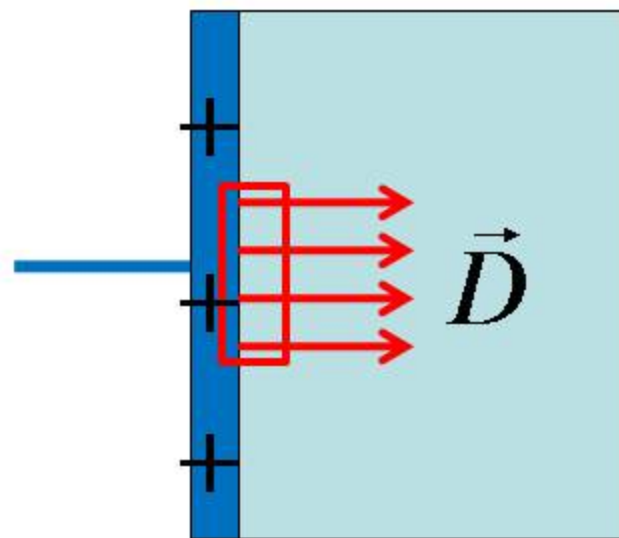
$E_{\Sigma} = 0$, следовательно,

$$P = 0, D_1 = 0$$



В диэлектрике $D_{2n} = \sigma_{\text{своб}}$ На поверхности проводника

Лабораторная работа “с ванночкой”



$$\sigma_{своб} = D_n$$

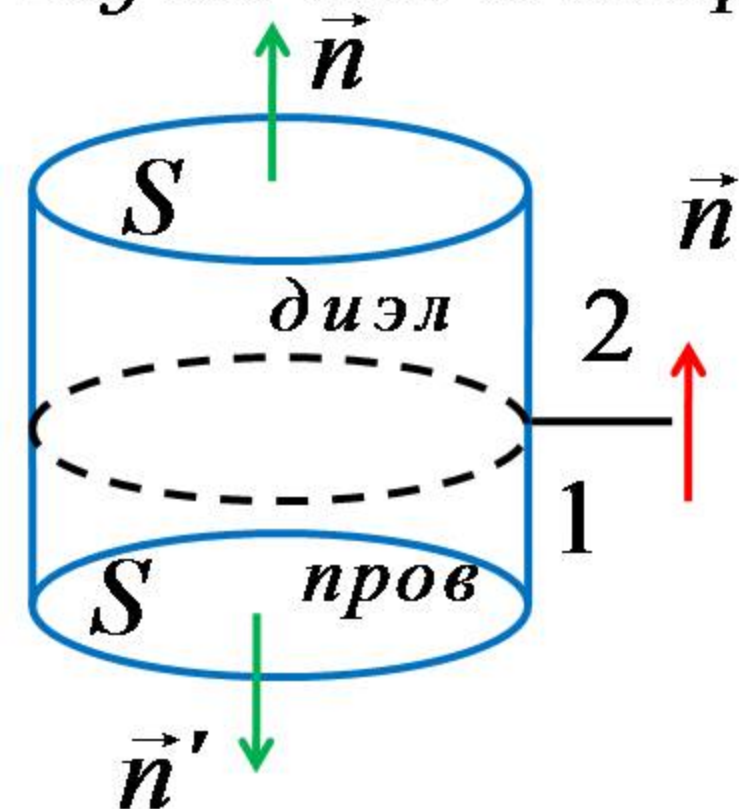
$$\sigma_{своб} = \varepsilon_0 \varepsilon E$$

Вода- полярный диэлектрик. Максимальная $\varepsilon = 81$
В работе по соображениям безопасности используется источник переменного напряжения - молекулы должны успевать переориентироваться, поэтому диэлектрическая проницаемость несколько уменьшается. Влияет на ориентацию молекул и температура воды. С учётом этих двух факторов $\varepsilon = 79$

**Граничные условия для
вектора напряжённости
электрического поля на
границе проводник-
диэлектрик.**

Запишем теорему
Гаусса для вектора $\mathbf{E}$

$$\oint_S \vec{E}_n d\vec{S} = \frac{q_\Sigma}{\epsilon_0} \quad (1)$$



В однородном изотропном диэлектрике объёмная плотность связанных зарядов равна нулю, если объёмная плотность свободных зарядов равна нулю.

$$\rho'_{\text{связ}} = - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \rho_{\text{своб}}$$

В правой части уравнения (1) нужно учесть только свободные заряды на поверхности проводника и связанные заряды на поверхности диэлектрика.

$$E_n = \frac{\sigma' + \sigma}{\epsilon_0}$$

Вычислим, как связаны между собой поверхностная плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрика σ' и поверхностная плотность свободных зарядов на поверхности проводника σ .

Воспользуемся граничным условием для вектора $\mathbf{D}$

$$D_{2n} = \sigma_{своб}$$

и выразим нормальную составляющую вектора напряжённости электрического поля через поверхностную плотность свободных зарядов на поверхности металла.

$$E_{2n} = \frac{D_n}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma_{своб}}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad (1)$$

Согласно граничному условию для вектора E на границе проводник-диэлектрик,

$$E_n = \frac{\sigma' + \sigma}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

Приравниваем левые части уравнений (1) и (2)

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma' + \sigma}{\varepsilon_0}$$

Выразим σ'

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

Пример. Металлическая плоскость заряжена с поверхностной плотностью заряда σ вплотную к ней прилегает плоскопараллельная пластина из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ . Вычислите поверхностную плотность связанных зарядов на поверхностях пластины.

***Решение.** На границе проводник-диэлектрик поверхностная плотность связанных зарядов*

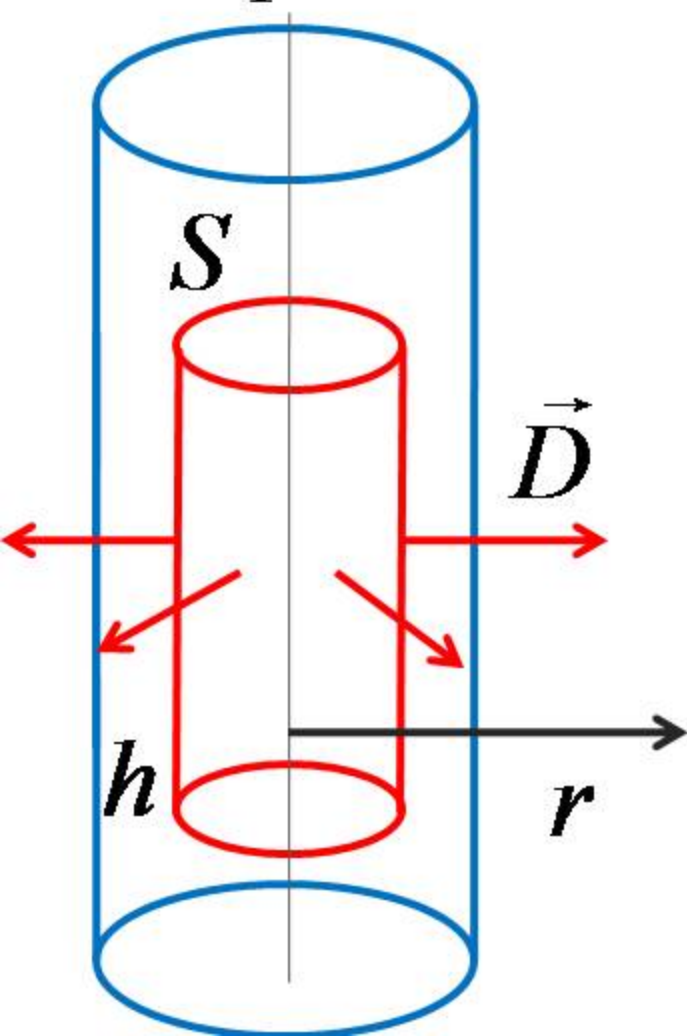
$$\sigma_1' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

На противоположной стороне пластины

$$\sigma_2' = -\sigma_1' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

Пример. Бесконечно длинный сплошной парафиновый цилиндр радиусом R с диэлектрической проницаемостью $\epsilon=3$ заряжен равномерно с объёмной плотностью заряда ρ . Вычислите зависимость напряжённости и индукции электрического поля от расстояния r до оси цилиндра.

Решение. Решаем задачу, используя теорему Гаусса для индукции электрического поля,



$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{своб}}$$

Гауссова поверхность — цилиндр высотой h и радиусом r . Необходимо описать две области — внутри и вне цилиндра.

1) $r < R$.

$$D_{1n} 2\pi r h = \rho \pi r^2 h$$

$$D_{1n} = \frac{\rho r}{2}$$

Напряжённость электрического поля выразим через индукцию.

$$E_{1n} = \frac{D_{1n}}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\rho r}{2 \varepsilon_0 \varepsilon}$$

2) $r > R$.

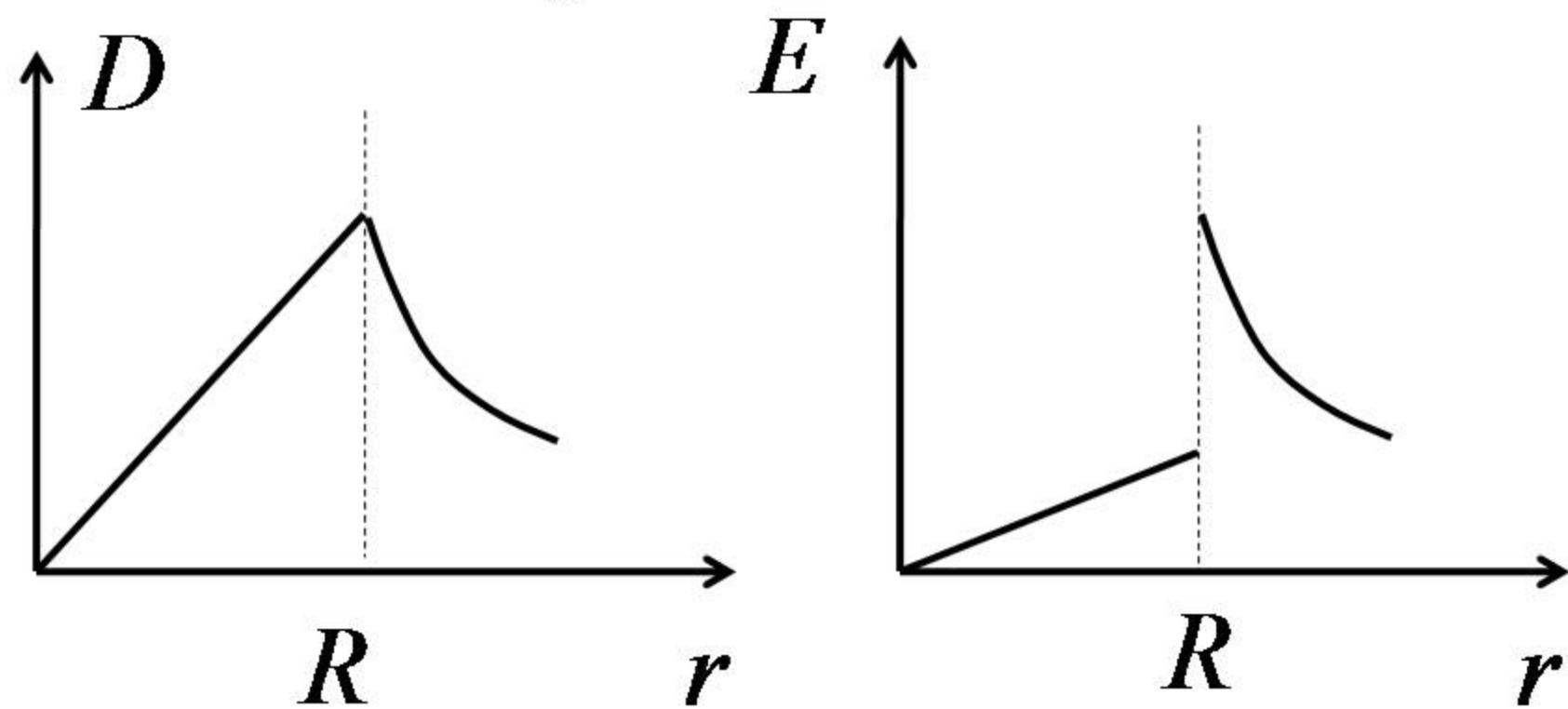
$$D_{2n} 2\pi r h = \rho \pi R^2 h$$

$$D_{2n} = \frac{\rho}{2r} R^2$$

Напряжённость электрического поля выразим через индукцию.

$$E_{2n} = \frac{D_{2n}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

Обратите внимание, при переходе из диэлектрика в вакуум индукция непрерывна, а напряжённость скачком возрастает в ϵ раз. Линии E начинаются на связанных зарядах.



Пример. *Две плоскопараллельные проводящие пластины заряжены с поверхностной плотностью заряда σ и $-\sigma$. Пространство между ними заполнено слоем из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ . Как связаны между собой вектор поляризации и вектор индукции электрического поля в диэлектрике?*

Решение. 1) Индукция электрического поля

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_\Sigma + \vec{P} \quad (1)$$

2) Выразим напряжённость электрического поля через индукцию.

$$\varepsilon_0 \vec{E}_\Sigma = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \vec{D}$$