

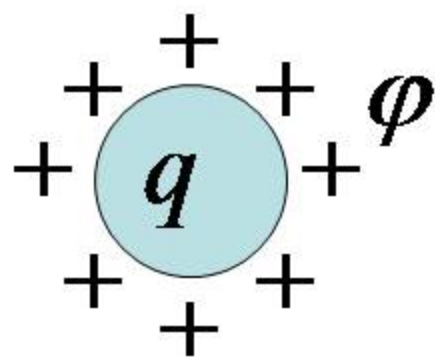
Электрическая ёмкость.

Лекция 6.

© С.А. Курашова, 2015

Электрическая ёмкость уединённого проводника.

Поместим на проводник заряд q , тогда его потенциал относительно бесконечности будет равен φ .



$$\varphi_{\infty} = 0$$

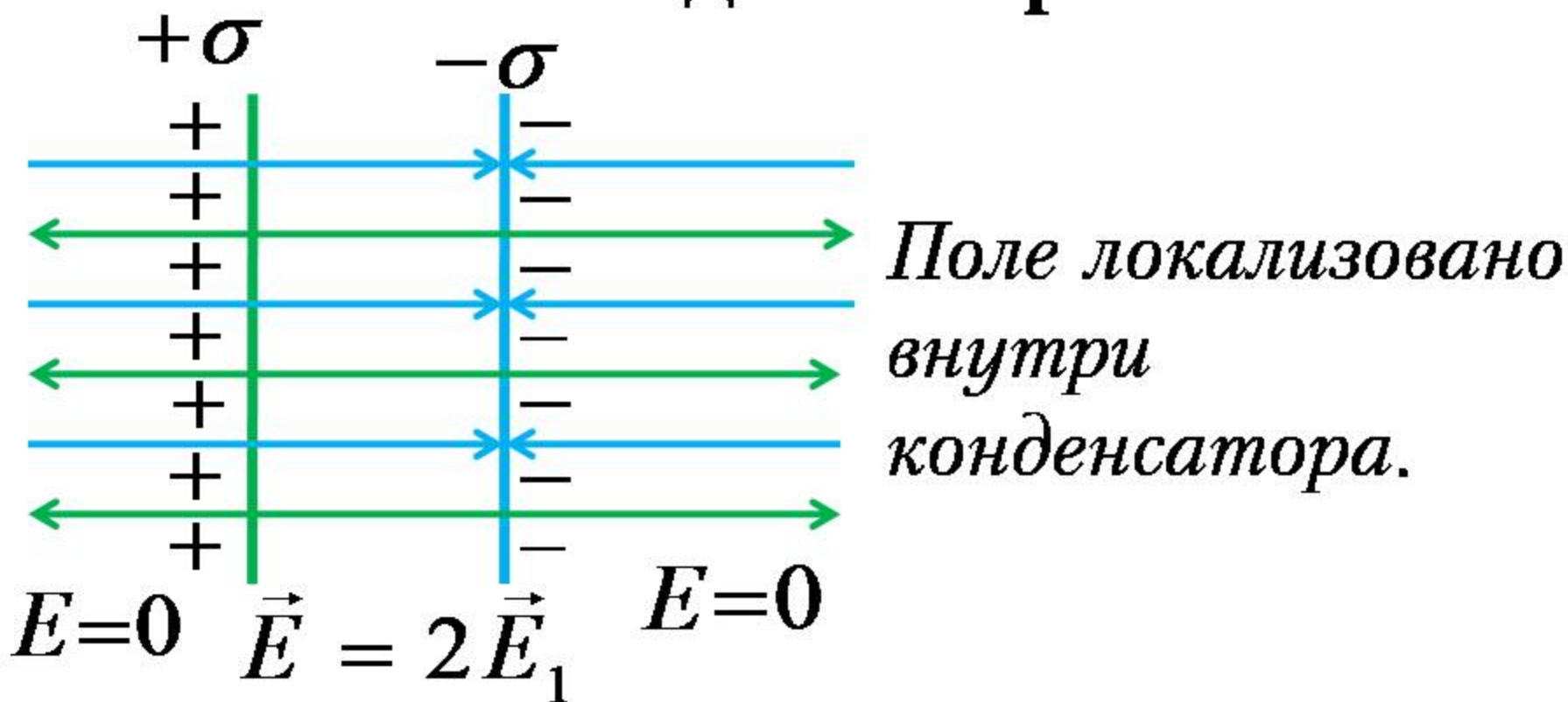
$$C = \frac{q}{\varphi}$$

$$[C] = \text{Фарад}$$

$$C_{\text{Земли}} = 0.7 \text{ мФ}$$

Ёмкость уединённого проводника зависит от окружающих проводников и заряженных тел.

Конденсаторы.



Напряженность поля внутри конденсатора
равна удвоенной напряжённости поля одной
пластины.

Ёмкость конденсатора.

$$[C] = \text{Фарад}$$

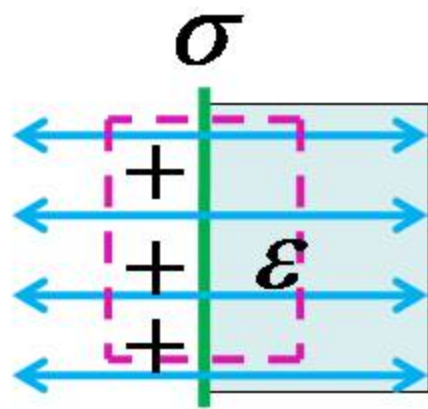
$$C = \frac{q}{U}$$

q - заряд конденсатора.

U - напряжение на конденсаторе
(разность потенциалов между
обкладками конденсатора).

Ёмкость конденсатора велика, окружающие
тела не влияют на её величину.

Вычислим ёмкость плоского конденсатора.



По теореме Гаусса $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
 $\vec{E}_1$ напряжённость поля,
создаваемого одной обкладкой,

Если конденсатор заполнен
диэлектриком,
Напряжённость поля внутри
конденсатора

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$E = 2E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$U = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{qd}{S \epsilon \epsilon_0}$$

Ёмкость плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$$

Пример 1. Вычислите силу притяжения пластин плоского воздушного конденсатора. Поверхностная плотность заряда на обкладках равна σ .

Решение.

По теореме Гаусса напряжённость поля, создаваемого одной обкладкой,

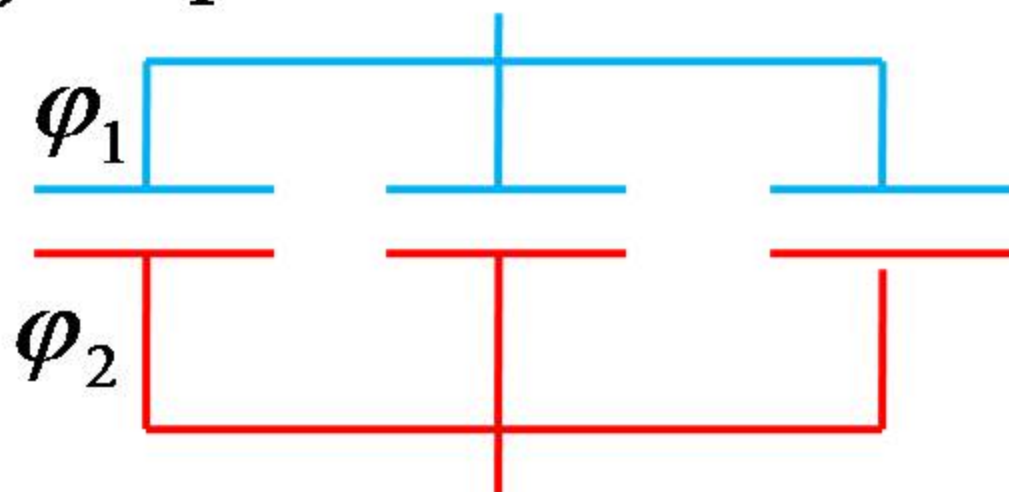
$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Сила притяжения пластин

$$F = \sigma S E_1 = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}$$

Соединение конденсаторов.

1) Параллельное соединение.

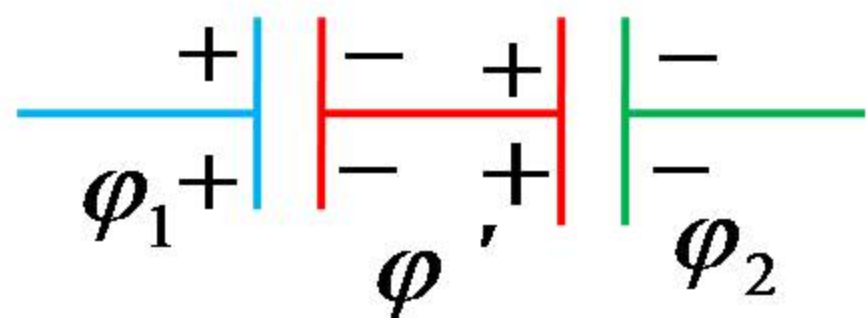


1) Заряды на обкладках складываются.

$$2) U_1 = U_2 = U_3 = U$$

$$C = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{U} = C_1 + C_2 + C_3$$

2) Последовательное соединение.



Незаряженная
средняя часть схемы
электризуется через
влияние, поэтому

$$1) \quad q_1 = q_2 = q$$

$$2) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi') + (\varphi' - \varphi_2) = U$$

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{\varphi_1 - \varphi'}{q_1} + \frac{\varphi' - \varphi_2}{q_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Энергия заряженного конденсатора.

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Это полная энергия взаимодействия не только зарядов на разноимённо заряженных обкладках конденсатора, но и зарядов на каждой обкладке между собой.

Как изменить энергию заряженного конденсатора.

**1) Конденсатор отключён от
источника.**

$$q = \text{const}$$

$$\Delta W = -A_{\text{сил поля}} = A_{\text{внешних сил}}$$

1) Конденсатор подключён к источнику.

$$U = \text{const}$$

$$\begin{aligned} \Delta W &= -A_{\text{сил поля}} + A_{\text{источника}} = \\ &= A_{\text{внешних сил}} + A_{\text{источника}} \end{aligned}$$

$$A_{\text{источника}} = \Delta q U = \Delta C U^2$$

Δq - приращение заряда на одной из обкладок конденсатора.

ΔC - приращение ёмкости конденсатора.

Пример 2. В заряженный плоский конденсатор вносят пластину из однородного диэлектрика. Вычислите работу сил поля и изменение энергии конденсатора, если

- 1) конденсатор отключён от источника,
- 2) конденсатор подключён к источнику.

Решение. 1) Если конденсатор отключён от источника, $q = \text{const}$

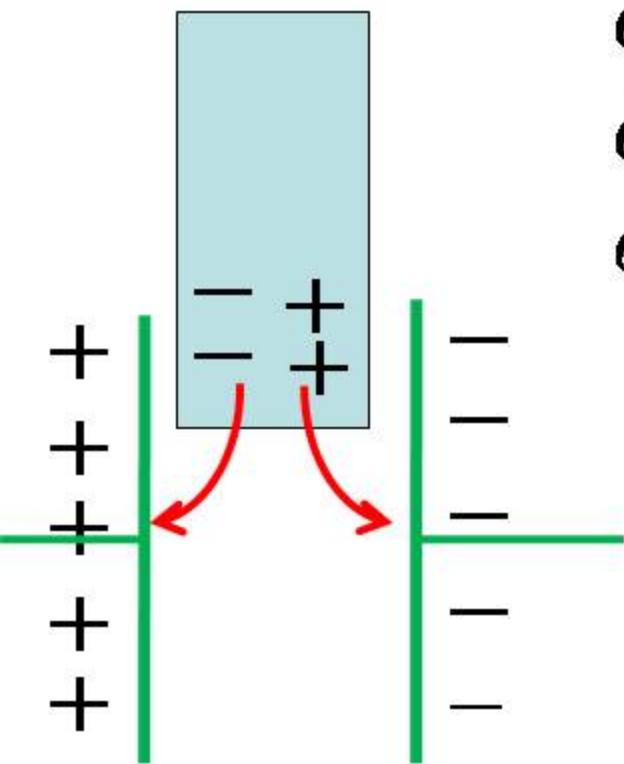
Начальная и конечная ёмкости конденсатора.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{q^2}{2C_1 \varepsilon} - \frac{q^2}{2C_1} = \frac{q^2}{2C_1} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = \\ &= \frac{q^2 d (1 - \varepsilon)}{2 \varepsilon_0 \varepsilon S} < 0 \end{aligned}$$

$$A_{\text{сил поля}} = W_1 - W_2 > 0$$

Это и понятно, под действием поля пластин диэлектрик поляризуется и втягивается в конденсатор.



$$C = \frac{q}{U}$$

*Ёмкость увеличивается, заряд не
изменяется , следовательно, напряжение
уменьшается.*

2) Если конденсатор подключён к источнику.

$$U = \text{const}$$

$$\Delta W = \frac{C_1 \varepsilon U^2}{2} - \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{(\varepsilon - 1) C_1 U^2}{2} =$$
$$= \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) S U^2}{2d} > 0$$

$$A_{\text{источника}} = \Delta q U = \Delta C U^2 =$$
$$= \underline{(\varepsilon - 1) C_1 U^2} > 0$$

$$\Delta W = A_{\text{внешних сил}} + A_{\text{источника}}$$

$$A_{\text{внешних сил}} < 0$$

$$A_{\text{сил поля}} = -A_{\text{внешних сил}} > 0$$

Причина та же, под действием поля пластин диэлектрик поляризуется и втягивается в конденсатор.

$$C = \frac{q}{U}$$

Ёмкость увеличивается, напряжение не изменяется, следовательно, заряд увеличивается.

$$A_{\text{источника}} > 0$$

Пример 3. Расстояние между пластинами заряженного плоского конденсатора увеличивают с d_1 до d_2 . Вычислите работу сил поля и изменение энергии конденсатора, если

- 1) конденсатор отключён от источника,
- 2) конденсатор подключён к источнику.

Решение. 1) Если конденсатор отключён от источника, $q = \text{const}$

Начальная и конечная ёмкости конденсатора. $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}$ $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}$

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1} = \frac{q^2(d_2 - d_1)}{2\varepsilon_0 S} > 0$$

$$A_{\text{сил поля}} = W_1 - W_2 < 0$$

Это и понятно, пластины конденсатора притягиваются, а внешние силы их раздвигают.

$$C = \frac{q}{U}$$

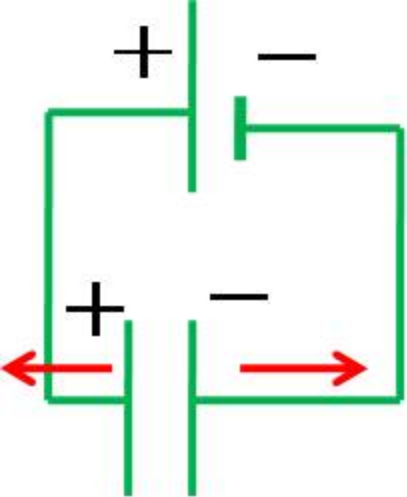
Ёмкость уменьшается, заряд не изменяется, следовательно, напряжение увеличивается.

$$\Delta W = \frac{\Delta q U}{2} > 0$$

2) Если конденсатор подключён к источнику.

$$U = \text{const}$$

$$\begin{aligned}\Delta W &= \frac{C_2 U^2}{2} - \frac{C_1 U^2}{2} = \\ &= - \frac{(d_2 - d_1) \varepsilon_0 S U^2}{2 d_2 d_1} = < 0\end{aligned}$$



$$A_{\text{источника}} = \Delta q U = \Delta C U^2 =$$

$$= - \frac{(d_2 - d_1) \varepsilon_0 S}{d_2 d_1} U^2 < 0$$

Заряд конденсатора уменьшается.

$$\Delta W = A_{\text{внешних сил}} + A_{\text{источника}}$$

$$< 0 \qquad \qquad \qquad < 0$$

$$A_{\text{внешних сил}} > 0$$

Причина та же, пластины конденсатора притягиваются, а внешние силы их раздвигают.

$$C = \frac{q}{U}$$

Ёмкость уменьшается, напряжение не изменяется, следовательно, заряд уменьшается.

$$A_{\text{источника}} < 0$$

$$\Delta W = \frac{\Delta q U}{2} < 0$$

Энергия системы точечных зарядов.

Вычислим работу, которую должны совершить внешние силы, чтобы разнести их на бесконечно большое расстояние.

На примере трёх зарядов

$$W_{123} = \frac{q_1(\varphi_{12} + \varphi_{13}) + q_2(\varphi_{21} + \varphi_{23}) + q_3(\varphi_{31} + \varphi_{32})}{2}$$

φ_{12} - потенциал, который создаёт второй заряд в точке, где находится первый

Двойку в знаменателе поставили для того, чтобы не учитывать взаимодействие каждой пары зарядов дважды.

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \varphi_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$

φ_i - потенциал, который создают в точке, где находится заряд с номером i все остальные заряды, кроме i -го.

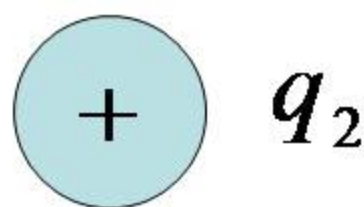
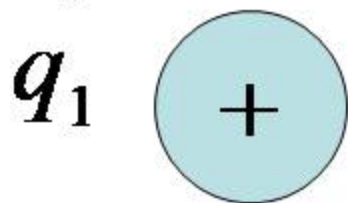
Полная энергия взаимодействия заряженных тел.

Если заряды распределены непрерывно

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV = \underbrace{W_1 + W_2}_{\text{Собственная энергия зарядов 1 и 2.}} + \underbrace{W_{12}}_{\text{Энергия взаимодействия зарядов 1 и 2.}}$$

Собственная энергия зарядов 1 и 2.

Энергия взаимодействия зарядов 1 и 2.



Энергия заряженного уединённого проводника.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \frac{q \varphi}{2} = \frac{C \varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Здесь мы вынесли φ за знак интеграла, так как он одинаков для всего проводника.

Энергия заряженного конденсатора.

$$W = \frac{q_+ \varphi_+ + q_- \varphi_-}{2} = \frac{q_+ (\varphi_+ - \varphi_-)}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

Это полная энергия взаимодействия не только зарядов на разноимённо заряженных обкладках конденсатора, но и зарядов на каждой обкладке между собой.

Энергия электрического поля.

Получим выражение для энергии электрического поля, рассматривая плоский конденсатор.

$$\left. \begin{array}{l} W = \frac{CU^2}{2} \\ C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} \end{array} \right\} W = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \left(\frac{U}{d} \right)^2 Sd =$$
$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2 V}{2}$$

Если диэлектрик изотропный

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$W = \int_V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV = \int_V \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} dV$$

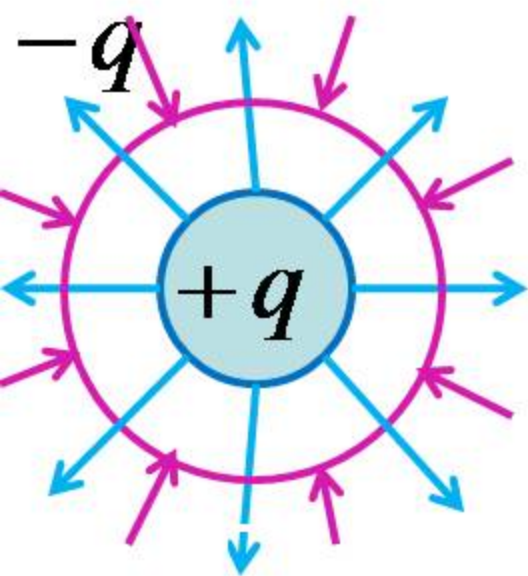
Электрическая энергия распределена в пространстве с объёмной плотностью заряда

$$\omega = \frac{\vec{E} \vec{D}}{2}$$

$$[\omega] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$$

Пример 3. Вычислите энергию, запасённую внутри сферического конденсатора с зарядом q и радиусами обкладок R_1 и R_2 .

Решение. Индукцию и напряжённость поля внутри конденсатора вычислим по теореме Гаусса



$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = q$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon}$$

$$W = \int_{R_1}^{R_2} \underbrace{\frac{q^2}{32\pi^2 r^4 \varepsilon_0 \varepsilon}}_{\omega} \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dV} =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

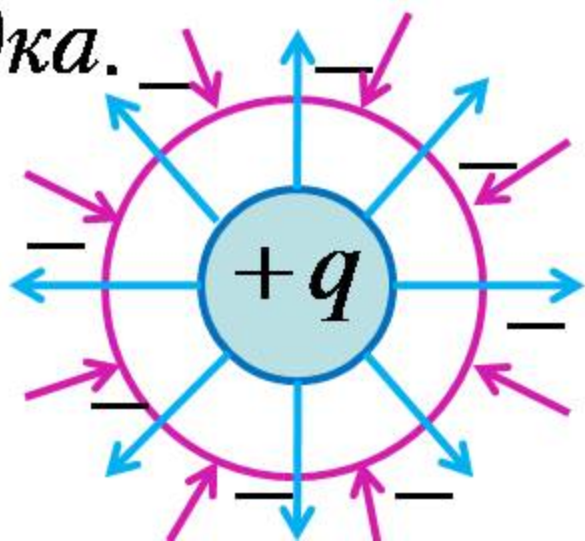
Понятно, что эта энергия равна

$$W = \frac{q^2}{2C}$$

Материал для дополнительного изучения.

Пример 1. Вычислите ёмкость сферического воздушного конденсатора, с радиусами обкладок R_1 и R_2 .

Решение. Обратите внимание, поле внутри конденсатора создаёт только внутренняя обкладка.



Индукцию и напряжённость поля внутри конденсатора вычислим по теореме Гаусса

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = q$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon}$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$\Delta \varphi = - \int_{R_1}^{R_2} E dr = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon} dr =$$
$$= \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Ёмкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Пример 2. Вычислите ёмкость на единицу длины бесконечного цилиндрического воздушного конденсатора, с радиусами обкладок R_1 и R_2 .

Ответ

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

l - длина

Пример 3. Вычислите силу притяжения пластин плоского воздушного конденсатора, Энергия которого равна W , а расстояние между обкладками составляет d .

Решение. напряжённость поля в конденсаторе $E = \frac{U}{d}$

Поле, создаваемое одной обкладкой,

$$E_1 = \frac{E}{2} = \frac{U}{2d}$$

*Сила притяжения
пластин*

$$F = qE_1 = \frac{qU}{2d}$$

*Воспользуемся тем, что
энергия конденсатора*

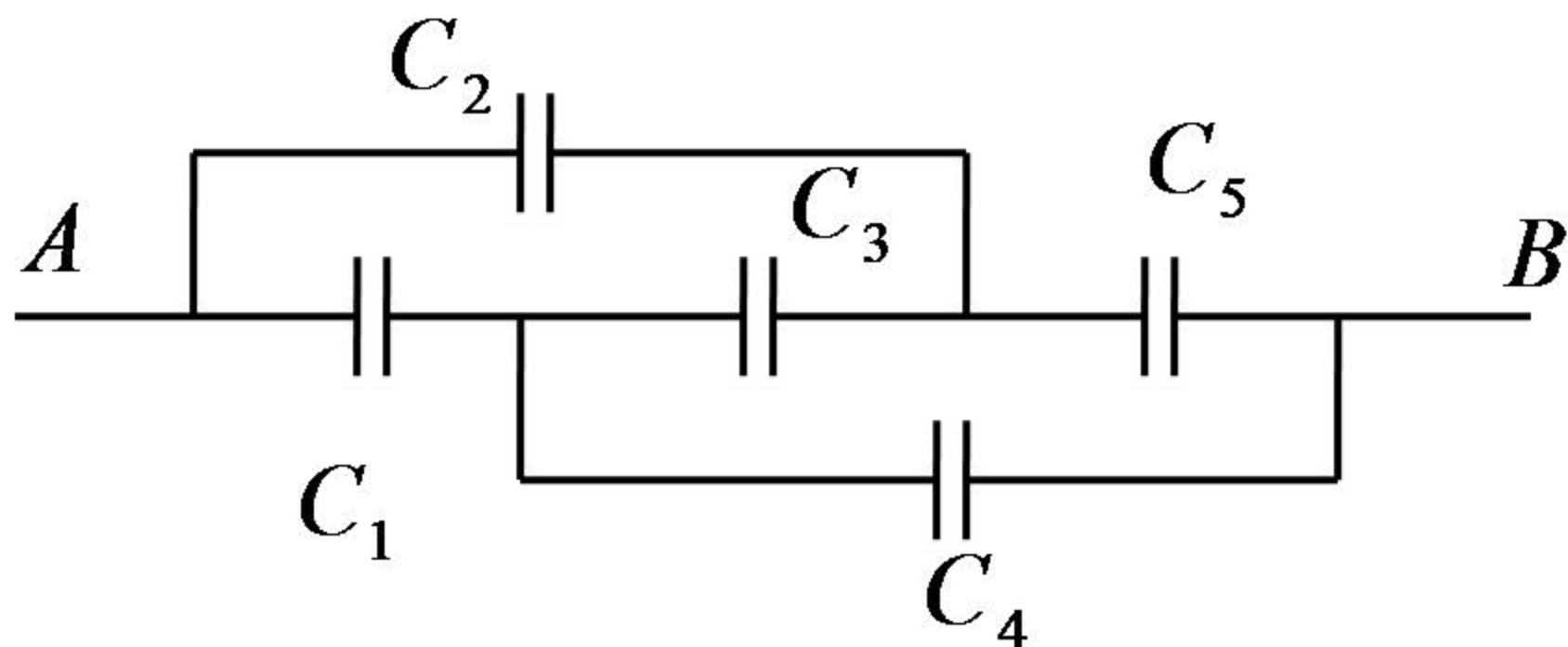
$$W = \frac{qU}{2}$$

*И выразим силу притяжения пластин
через энергию конденсатора*

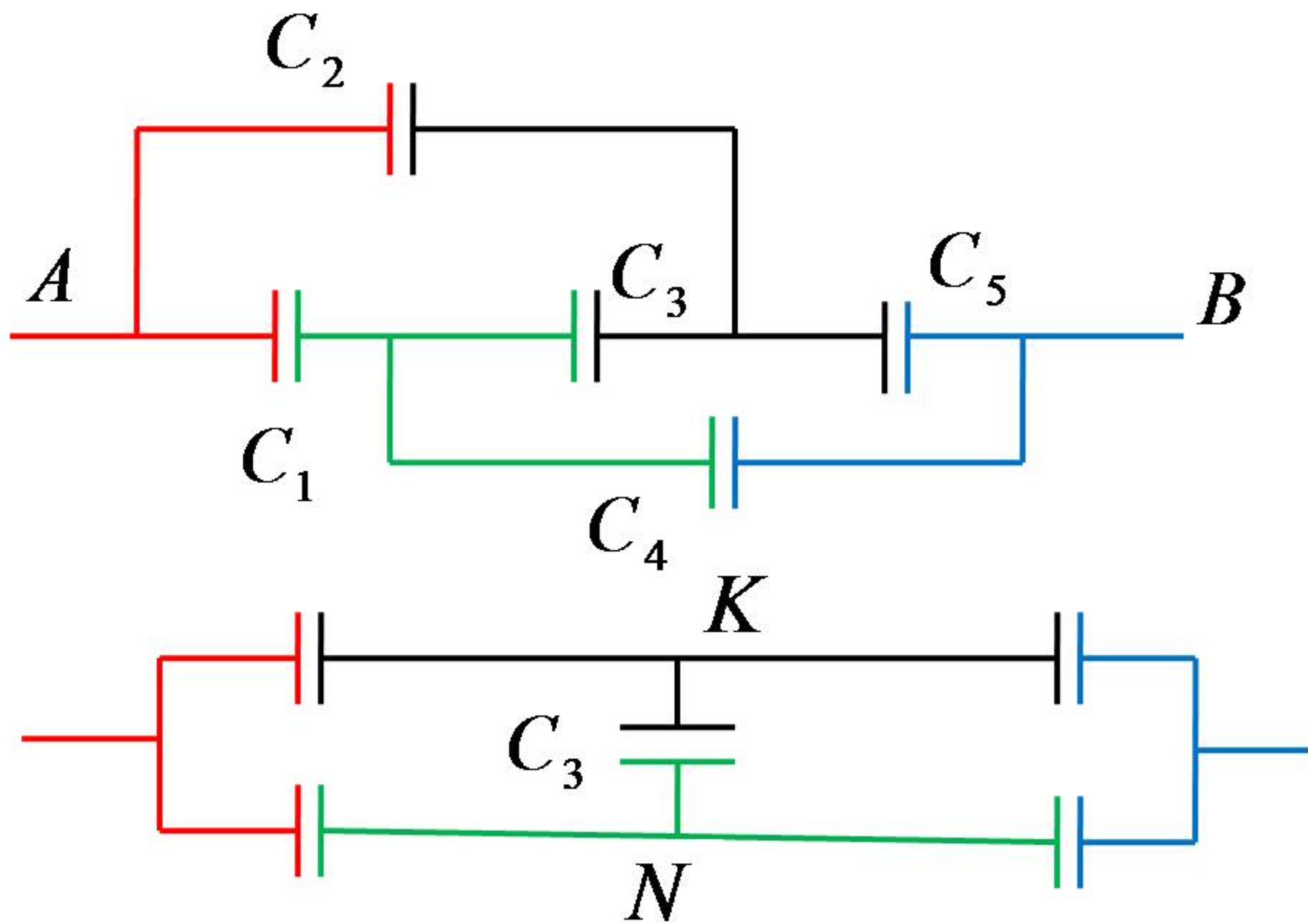
$$F = \frac{W}{d}$$

Пример 4. Вычислите взаимную ёмкость на единицу длины двух параллельных бесконечно длинных проводников, радиусами R_1 и R_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга.

Пример 5. Вычислите ёмкость схемы между точками A и B .

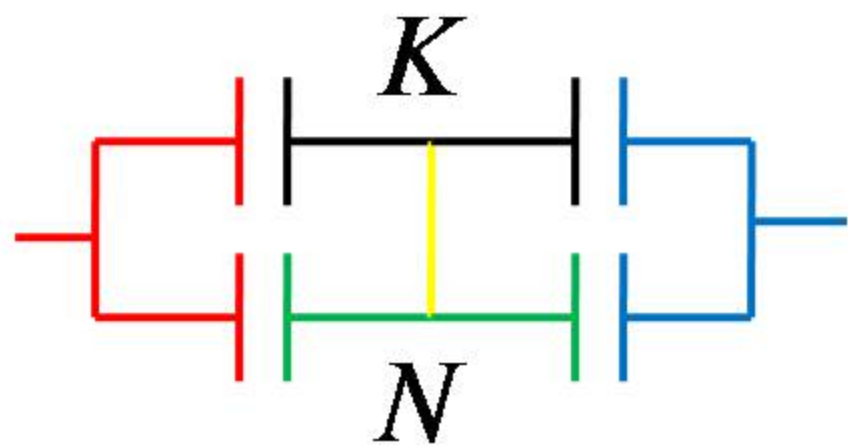


Ёмкости всех конденсаторов одинаковы и равны C



Точки схемы, имеющие одинаковый потенциал, можно соединять или разъединять между собой, распределение потенциалов в схеме при этом не нарушится.

1) Соединили точки K и N

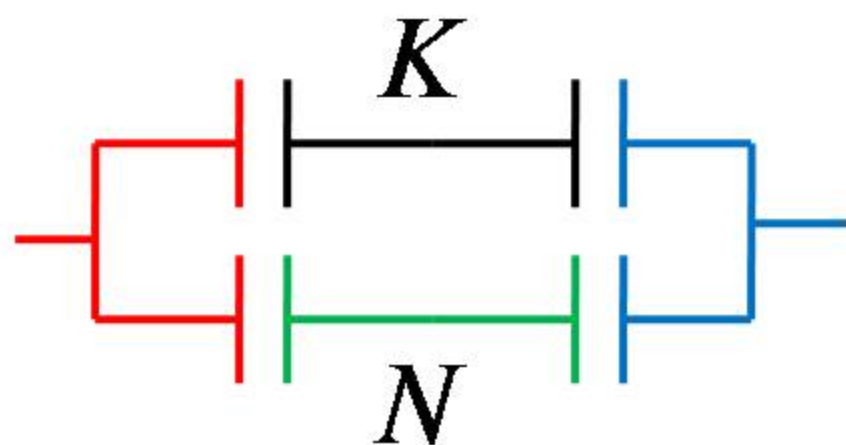


$$\frac{1}{C_{\Sigma}} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{2C}$$

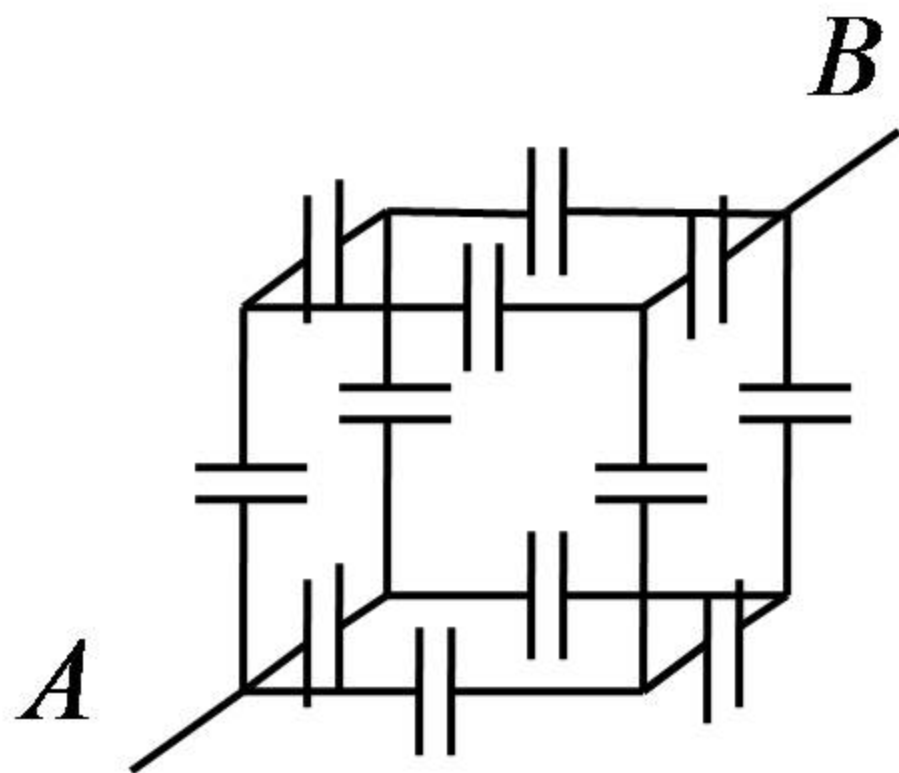
$$C_{\Sigma} = C$$

2) Разъединили точки K и N

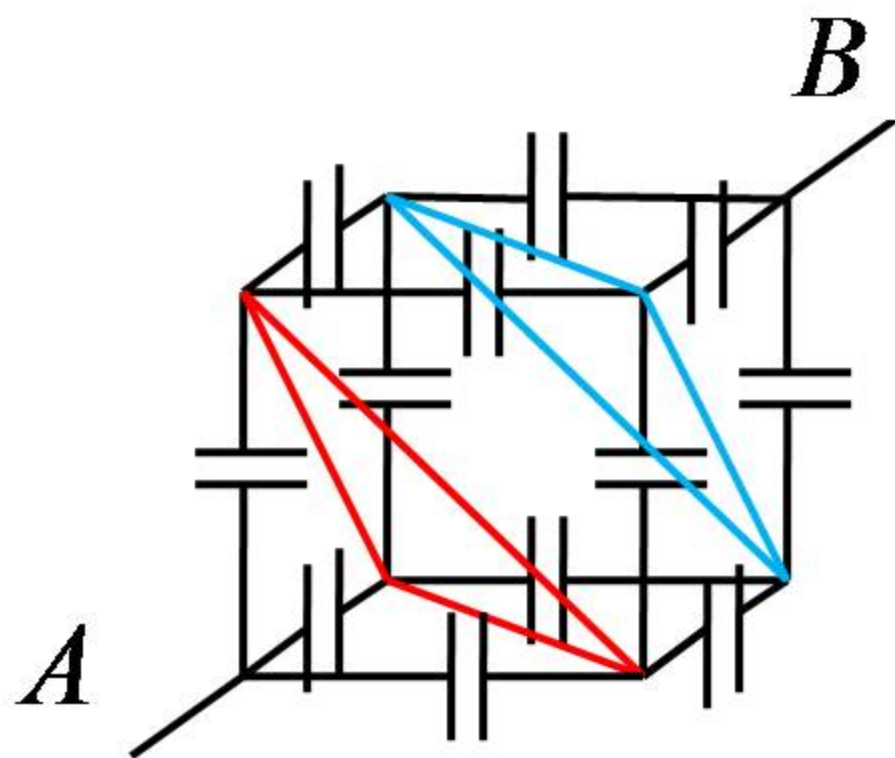
$$C_{\Sigma} = 2 \frac{C}{2} = C$$



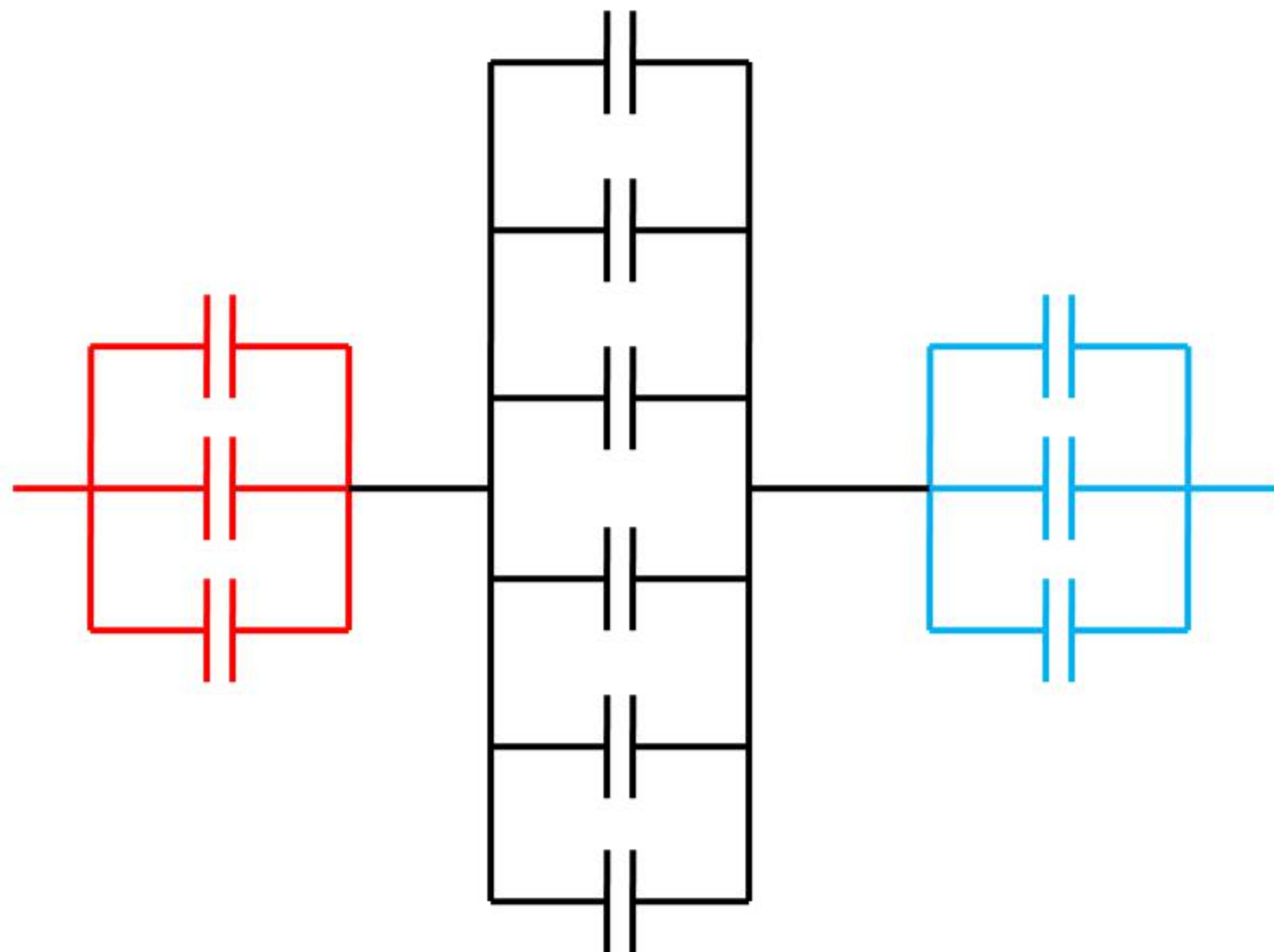
Пример 6. Из проволоки сделан куб, в каждое ребро которого включено по конденсатору, вычислите ёмкость схемы между точками A и B .



Соединим точки, имеющие одинаковый потенциал.



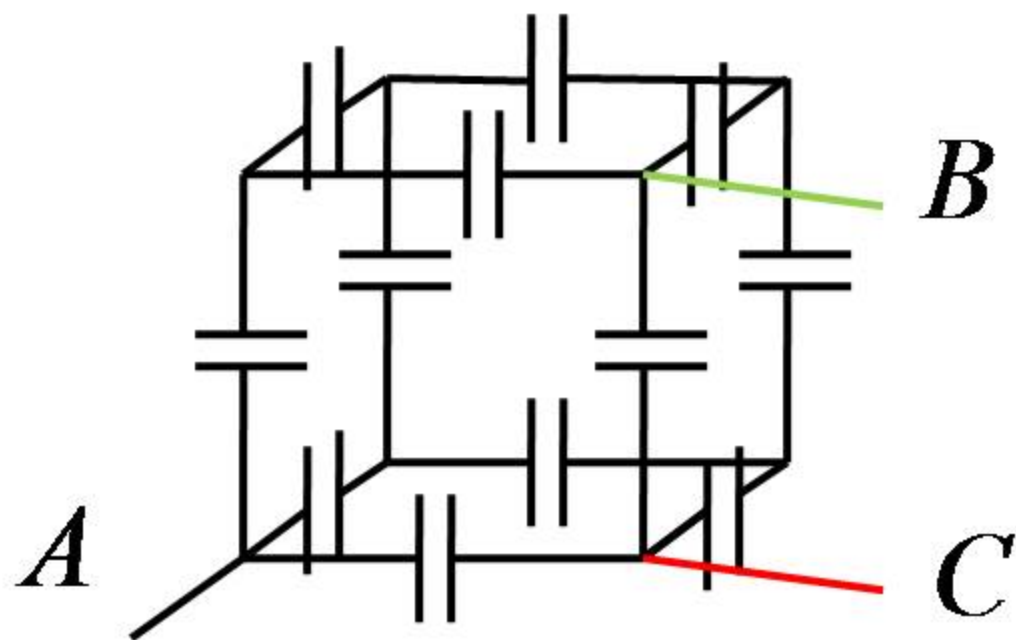
Новая схема имеет вид.



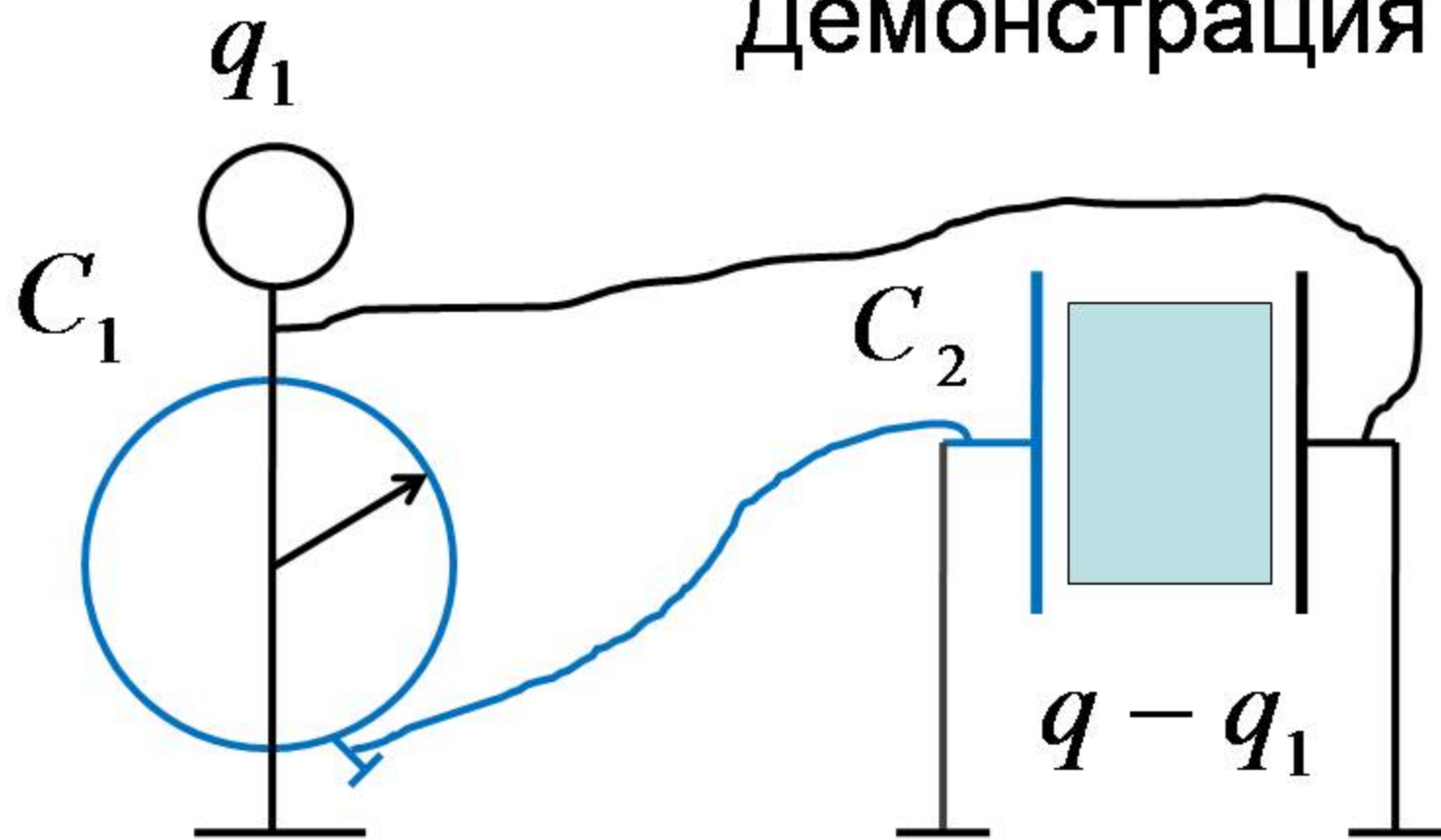
Ёмкость системы.

$$\frac{1}{C_{\Sigma}} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C}$$

Пример 7. Из проволоки сделан куб, в каждое ребро которого включено по конденсатору, вычислите ёмкость схемы между точками A и B , A и C .



Демонстрация



Сдвигаем пластины или вносим диэлектрик - показания электрометра уменьшаются

При параллельном соединении.

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q}{C_1 + C_2}$$

$$U_1' = \frac{q_1'}{C_1} = \frac{q}{C_1 + C_2'}$$

$$C_2' > C_2 \quad , \text{ поэтому } \quad U_1' < U_1$$

Показания электрометра уменьшаются.

II способ. При параллельном соединении.

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q - q_1}{C_2} \qquad q_1 = \frac{qC_1}{(C_1 + C_2)}$$

$$\frac{q_1'}{C_1} = \frac{q - q_1'}{C_2} \qquad q_1' = \frac{qC_1}{(C_1 + C_2')}$$

C_2' увеличивается,

q_1' уменьшается

II способ. При параллельном соединении.

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q - q_1}{C_2} \qquad q_1 = \frac{qC_1}{(C_1 + C_2)}$$

$$\frac{q_1'}{C_1} = \frac{q - q_1'}{C_2} \qquad q_1' = \frac{qC_1}{(C_1 + C_2')}$$

C_2' увеличивается,

q_1' уменьшается