Электростатика 1/3

Электростатика

1. Дайте определение потока векторного поля через площадку. Докажите теорему Остроградского-Гаусса для вектора $\vec{E}$ в вакууме. [Л1]
2. Докажите, что стационарное центральное поле является консервативным. [Л2]
3. Покажите, как связаны потенциальная энергия и сила , напряжённость и потенциал. [Л2]
4. Опишите механизмы поляризации диэлектриков. Дайте определение вектора поляризации, поляризуемости, диэлектрической восприимчивости, диэлектрической проницаемости. Запишите уравнения, связывающие эти величины. [Л4]
5. Дайте определение вектора электрической индукции $\vec{D}$. Пластина из однородного, изотропного диэлектрика размещена перпендикулярно линиям напряжённости однородного электрического поля, напряжённостью $\overrightarrow{E_0}$. Получите выражения для векторов $\vec{E}$, $\vec{D}$ и $\vec{P}$ в диэлектрике. [Л4]
6. Сформулируйте теорему Гаусса для вектора $\vec{D}$. Шар радиусом R из диэлектрика с проницаемостью ε заряжен равномерно с объёмной плотностью заряда ρ. Вычислите $\vec{E}(r)$, $\vec{D}(r)$, $\varphi(r)$. [Л4]
7. Выведите правила преломления линий вектора $\vec{E}$ на границе диэлектрик-диэлектрик. [Л4]
8. Выведите правила преломления линий вектора $\vec{D}$ на границе диэлектрик-диэлектрик. [Л4]
9. Пластина из однородного, изотропного диэлектрика размещена перпендикулярно линиям напряжённости однородного электрического поля. Докажите, что диэлектрическая проницаемость показывает во сколько раз ослабевает однородное электрическое поле, попадая в диэлектрик. [Л4]

Электростатика 2/3

Электростатика

10. В чём заключается метод электрических изображений при определении напряжённости электрического поля вблизи поверхности проводника. [Л5]
11. Дайте определение электрической ёмкости уединённого проводника и конденсатора. Выведите формулу для ёмкости плоского и сферического конденсаторов. [Л6]
12. Получите уравнение непрерывности. Какой закон сохранения оно выражает? [Л7]
13. Получите уравнения Кирхгофа. [Л7]
14. Выведите формулу для энергии системы точечных зарядов. [Л6]
15. Выведите формулу для энергии конденсатора. [Л6]
16. Выведите правило преобразования «треугольник-звезда» [Л7]
17. Выведите формулы для эквивалентной ЭДС и внутреннего сопротивления источника при соединении нескольких одинаковых источников в батарею. [Л7]
18. Получите закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной и дифференциальной формах. [Л7]
19. Получите закон Ома для однородного участка цепи в интегральной и дифференциальной формах. [Л7]
20. Получите закон Джоуля-Ленца для неоднородного участка цепи в интегральной и дифференциальной формах. [Л8]
21. Получите выражение для удельной мощности тока для неоднородного участка цепи. [Л8]
22. Получите выражение для удельной мощности тока для однородного участка цепи. [Л8]

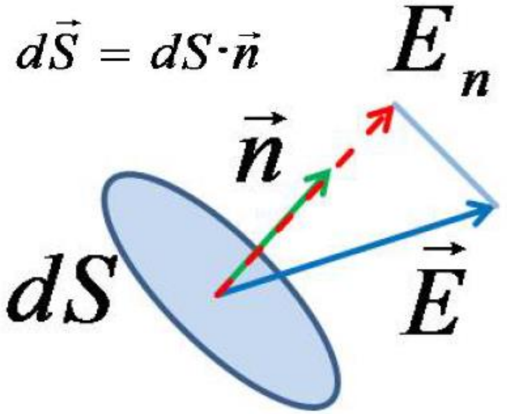
Электростатика 2/3

Электромагнетизм!

23. Запишите систему уравнений Максвелла в интегральной форме. Как выглядит эта система уравнений в стационарном случае? [Л13]
24. Запишите систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме. Что можно сказать об источниках и стоках линий $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$? [Л13]
25. Покажите с помощью системы уравнений Максвелла, как изменяющееся во времени электрическое поле порождает магнитное. [Л13]
26. Покажите с помощью системы уравнений Максвелла, как изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое. [Л13]

1. Дайте определение потока векторного поля через площадку. Докажите теорему Остроградского-Гаусса для вектора $\vec{E}$ в вакууме.

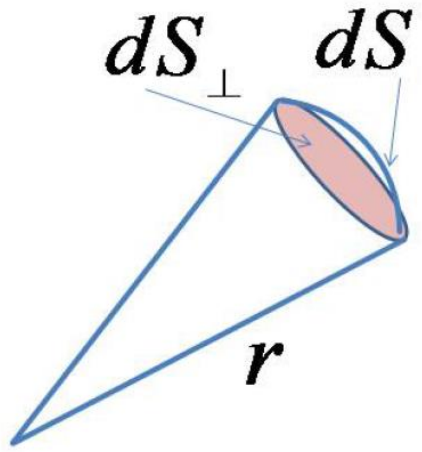
Поток вектора напряжённости поля $\vec{E}$ через поверхность S



$$d\Phi = E_n dS = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_S d\Phi = [\text{В} \cdot \text{м}]$$

Телесный угол



$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{dS_\perp}{r^2}, \qquad [\text{ср} = \text{стерадиан}]$$

$$\Phi = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ ср}$$

1. Дайте определение потока векторного поля через площадку. Докажите теорему Остроградского-Гаусса для вектора $\vec{E}$ в вакууме.

Теорема Остроградского-Гаусса

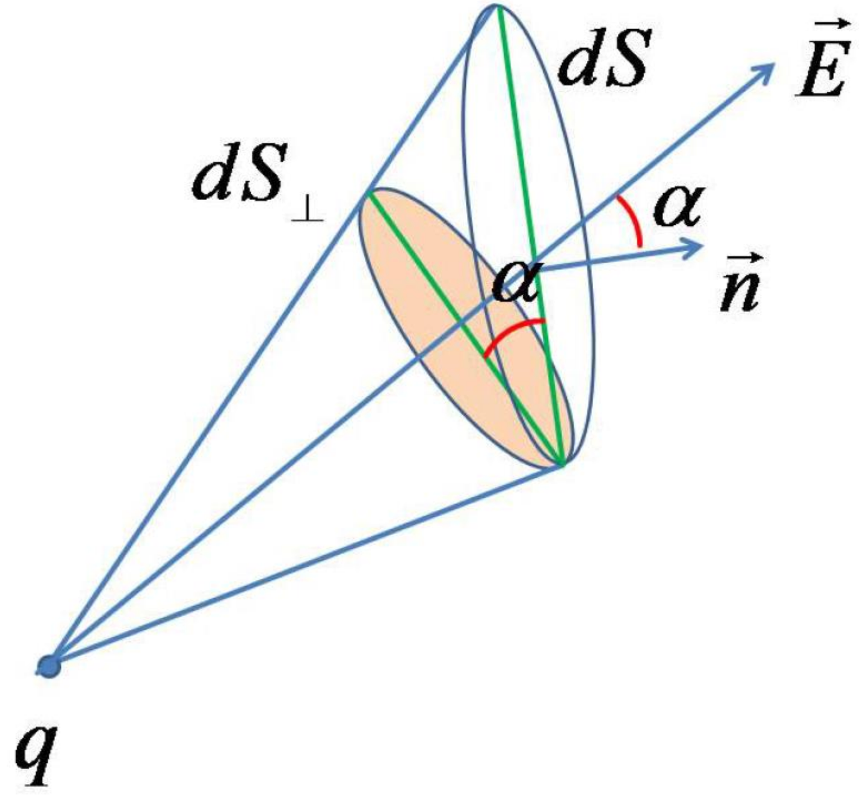
$\oint E_n dS = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$ или $\oint E_n dS = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}$, где ρ – объёмная плотность заряда

Доказательство

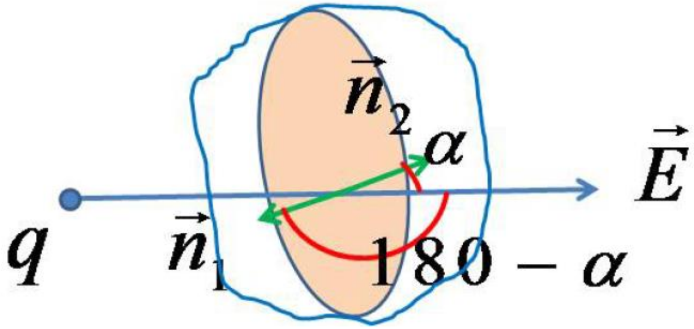
$$\mathrm{d}\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2} = \frac{dS \cdot \cos\alpha}{r^2}$$

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dS \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q\, d\Omega$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \int_S d\Omega = \frac{4\pi q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



Для зарядов, которые не охвачены поверхностью S



$$d\Phi_1 = -d\Phi_2$$

$$\Phi = 0$$

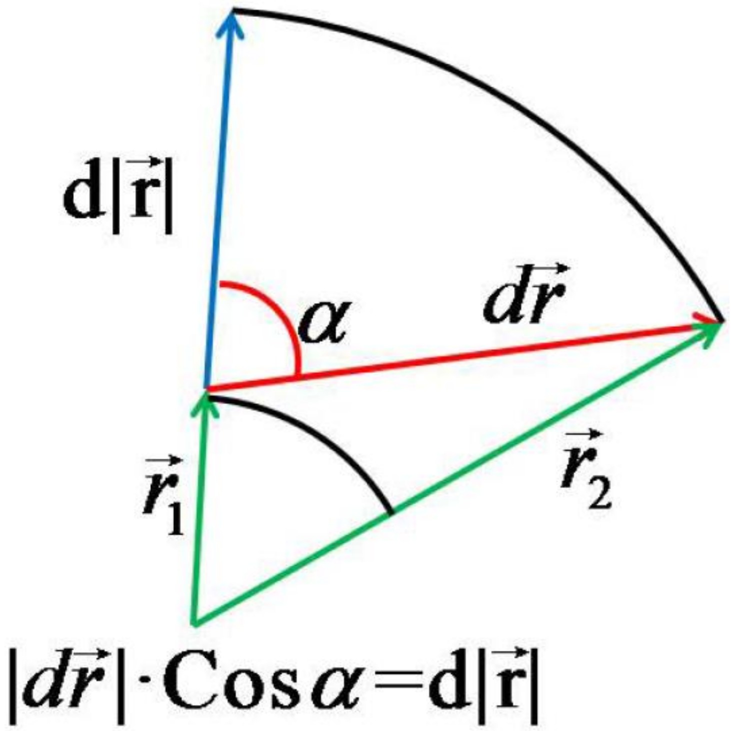
2. Докажите, что стационарное центральное поле является консервативным.

Представим центральную силу как $\vec{F} = \pm F_r \frac{\vec{r}}{r}$

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_r d|\vec{r}| = F_r dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_{\text{пробн}}}{|\vec{r}|^2} dr$$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \delta A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot q_{\text{пробн}} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = W_1 - W_2$$

Работа зависит только от $r \Longrightarrow$ поле консервативное.



Так как $\vec{\mathrm{F}} = q\vec{E}$, то верно ∀ поля.

Доп. док-во: в центральном поле $rot\,\vec{E} = 0$.

3. Покажите, как связаны потенциальная энергия и сила, напряжённость и потенциал.

Возьмём $\delta A = F_r dr = -dW$, значит $F_r = \frac{-dW}{dr}$.

Аналогично, в декартовых, где $F_r dr = \left(F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}\right)\left(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}\right)$:

$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dW$, значит $\vec{F} = -\left(\frac{dW}{dx}\vec{\imath} + \frac{dW}{dy}\vec{\jmath} + \frac{dW}{dz}\vec{k}\right) = -grad\, W$.

$$\boldsymbol{\vec{F} = -grad\, W}$$

По опр. $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ и W $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_{\text{пробн}}}{r}$, значит $W = q_{\text{пробн}}\varphi$.

$$\boldsymbol{\vec{E} = -grad\, \varphi}$$

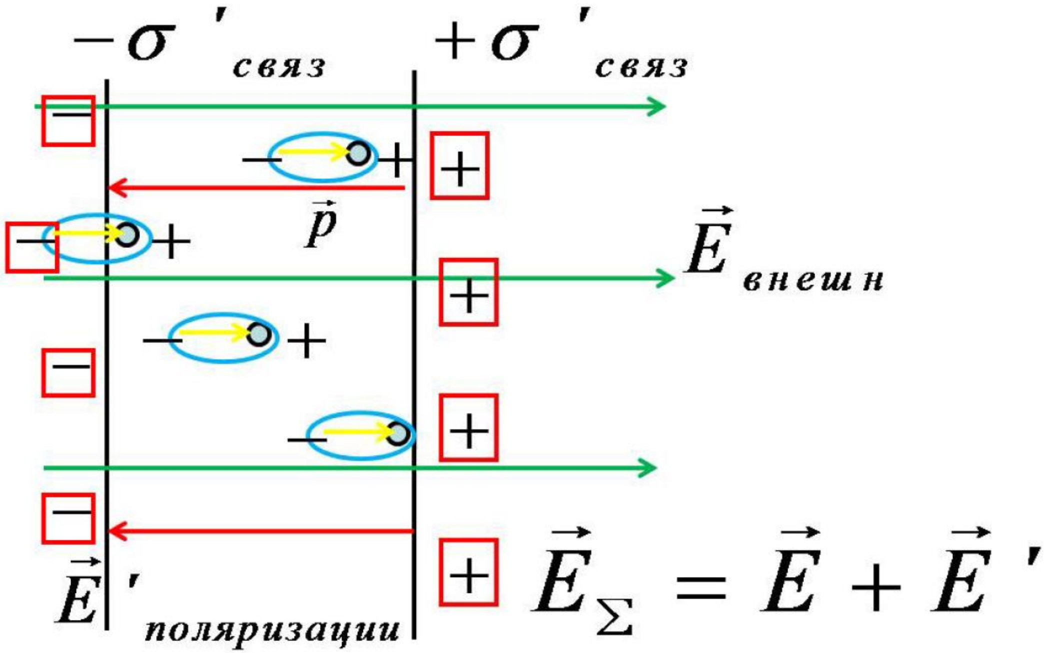
$$\boldsymbol{\varphi = -\int E_r dr}$$

4. Опишите механизмы поляризации диэлектриков. Дайте определение вектора поляризации, поляризуемости, диэлектрической восприимчивости, диэлектрической проницаемости. Запишите уравнения, связывающие эти величины.

Электрическая поляризация – смещение в противоположные стороны + и – зарядов диэлектрика (*вещества, практически не проводящего ток*) под действием внешнего электрического поля.

Поляризация неполярных диэлектриков

Под действием внешнего поля электронное облако смещается относительно ядра атома.
Центры положительных и отрицательных зарядов перестают совпадать, и у атома/молекулы появляется индуцированный дипольный момент.

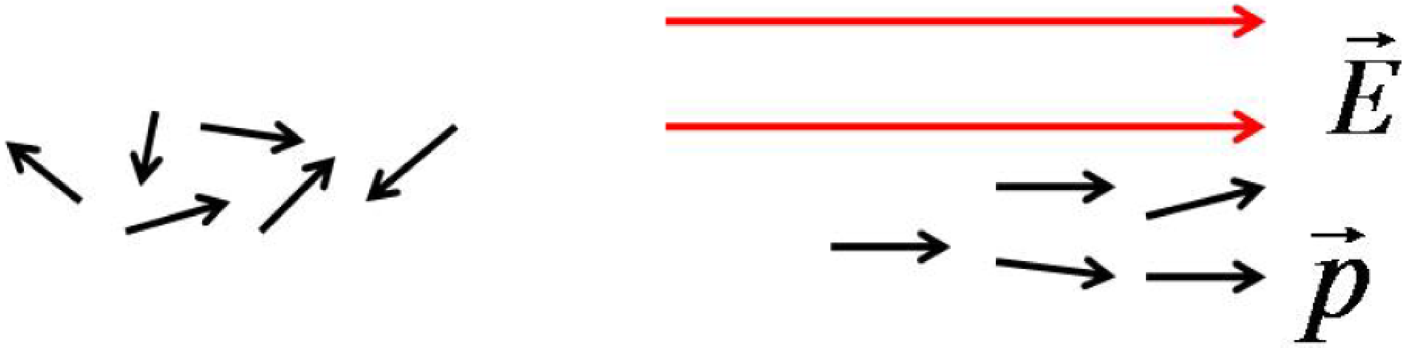


Поле внутри диэлектрика равно сумме внешнего поля и поля поляризации

4. Опишите механизмы поляризации диэлектриков. Дайте определение вектора поляризации, поляризуемости, диэлектрической восприимчивости, диэлектрической проницаемости. Запишите уравнения, связывающие эти величины.

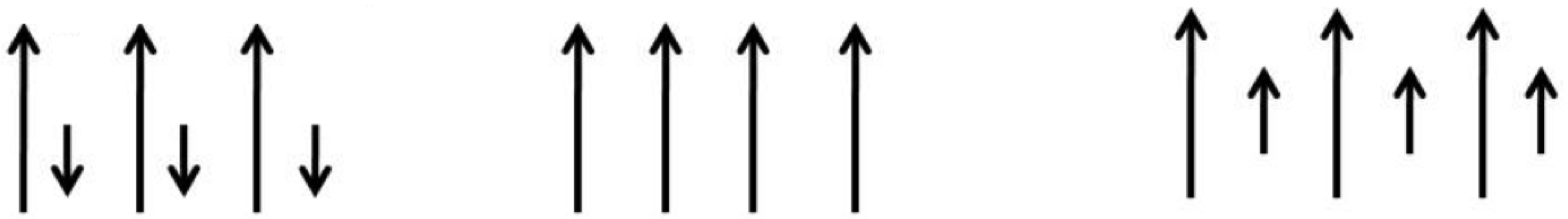
Поляризация полярных диэлектриков

В отсутствие поля молекулы ориентированы хаотично из-за теплового движения. При наложении поля они стремятся выстроиться вдоль силовых линий. Чем выше температура, тем слабее эта поляризация из-за мешающих тепловых колебаний.



Поляризация ионных кристаллов

Происходит относительное смещение подрешеток положительных и отрицательных ионов в противоположных направлениях.



4. Опишите механизмы поляризации диэлектриков. Дайте определение вектора поляризации, поляризуемости, диэлектрической восприимчивости, диэлектрической проницаемости. Запишите уравнения, связывающие эти величины.

Дипольный момент одной молекулы в поле

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E} = [\text{Кл} \cdot \text{м}] = [\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot \text{м}^3 \cdot \frac{\text{В}}{\text{м}}]$$

Поляризуемость молекулы $\alpha = [\text{м}^3]$ – коэффициент пропорциональности между дипольным моментом частицы и напряженностью поля.

Вектор поляризации (поляризованность) $\vec{P}$ – макроскопическая характеристика степени поляризации диэлектрика.

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \overrightarrow{p_i} = \varepsilon_0 æ \vec{E} = n\langle\vec{p}\rangle = [\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}]$$

Диэлектрическая восприимчивость $æ$ (безразмерная величина) – способность данного диэлектрика поляризоваться под действием электрического поля.

Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1 + æ$ (безразмерная величина) – способность данного диэлектрика поляризоваться под действием электрического поля.

5. Дайте определение вектора электрической индукции $\vec{D}$. Пластина из однородного, изотропного диэлектрика размещена перпендикулярно линиям напряжённости однородного электрического поля, напряжённостью $\overrightarrow{E_0}$. Получите выражения для векторов $\vec{E}$, $\vec{D}$ и $\vec{P}$ в диэлектрике.

Вектор электрической индукции $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ – описывает электрическое поле, создаваемое только *свободными (сторонними)* зарядами.

Знаем, что $\vec{P} = \varepsilon_0 æ\vec{E}$ и $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$.

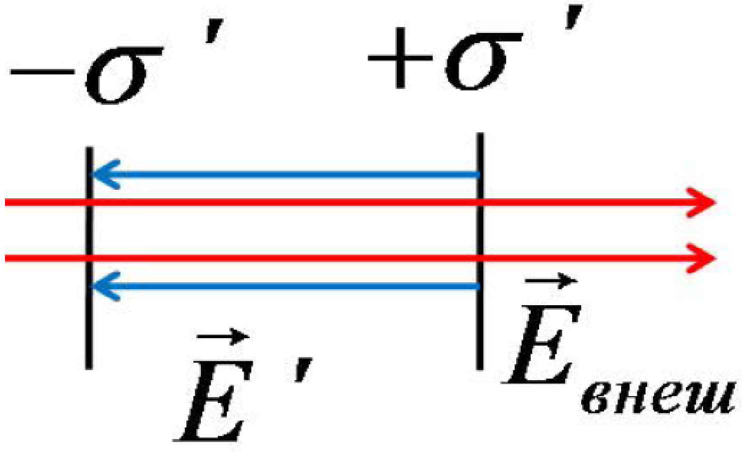
Для бесконечной пластины в изотропной среде поле $\vec{E}$ ослабляется в ε раз (**билет 9**):

По граничному условию: $\sigma' = P$.

По рисунку: $\vec{E}' = 2\frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 æE}{\varepsilon_0} = æ\vec{E}$.

Суммарное поле: $E = E_0 - E' \Rightarrow E + E' = E(1 + æ) = E_0$

Отсюда $E = \frac{E_0}{1+æ} = \frac{E_0}{\varepsilon}$.



$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}, \qquad P = \varepsilon_0 æ\frac{E_0}{\varepsilon}, \qquad D = \varepsilon_0 E_0$$

6. Сформулируйте теорему Гаусса для вектора $\vec{D}$. Шар радиусом R из диэлектрика с проницаемостью ε заряжен равномерно с объёмной плотностью заряда ρ. Вычислите $\vec{E}(r)$, $\vec{D}(r)$, $\varphi(r)$.

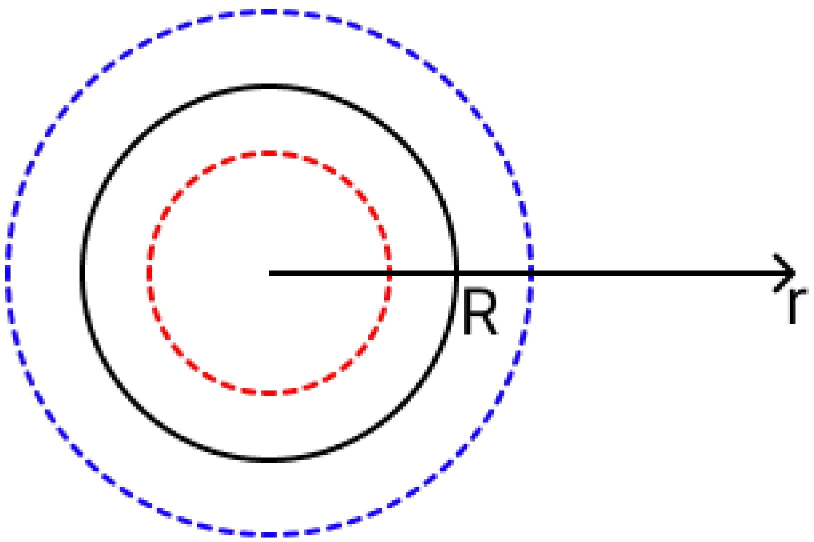
Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$

$$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = q_{своб}, \qquad div\, D = \rho$$

Доказательство. Возьмём теоремы Гаусса для $\vec{E}$ и $\vec{P}$

$$\begin{cases} \oint\limits_S \varepsilon_0 \vec{E}d\vec{S} = q'_{связ} + q_{своб} \\ \oint\limits_S \vec{P}d\vec{S} = -q'_{связ} \end{cases} \Rightarrow \oint\limits_S (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})d\vec{S} = q_{своб} \Rightarrow \oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = q_{своб}$$

6. Сформулируйте теорему Гаусса для вектора $\vec{D}$. Шар радиусом R из диэлектрика с проницаемостью ε заряжен равномерно с объёмной плотностью заряда ρ. Вычислите $\vec{E}(r)$, $\vec{D}(r)$, $\varphi(r)$.



1) внутри $r < R$: $\oint D_n dS = \int_0^r 4\pi r^2 dr$

По т. Гаусса $D_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho$

Отсюда, $D_1 = \frac{\rho r}{3}$ и $E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0 \varepsilon}$.

2) снаружи $r > R$: $\oint D_n dS = \int_0^R 4\pi r^2 dr$

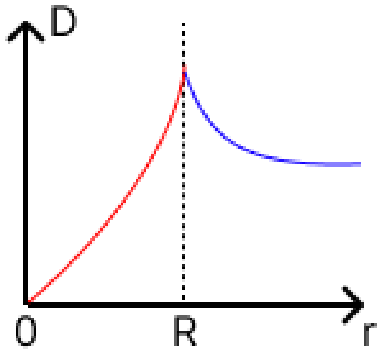
По т. Гаусса $D_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$

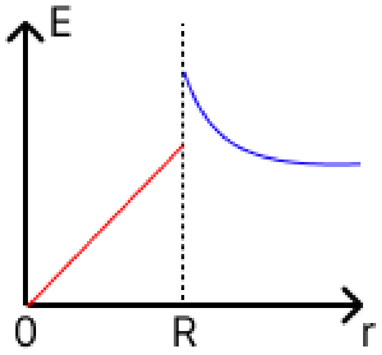
Отсюда, $D_1 = \frac{\rho R^3}{3r^2}$ и $E_1 = \frac{\rho R^3}{3r^2 \varepsilon_0}$.

Найдём потенциал

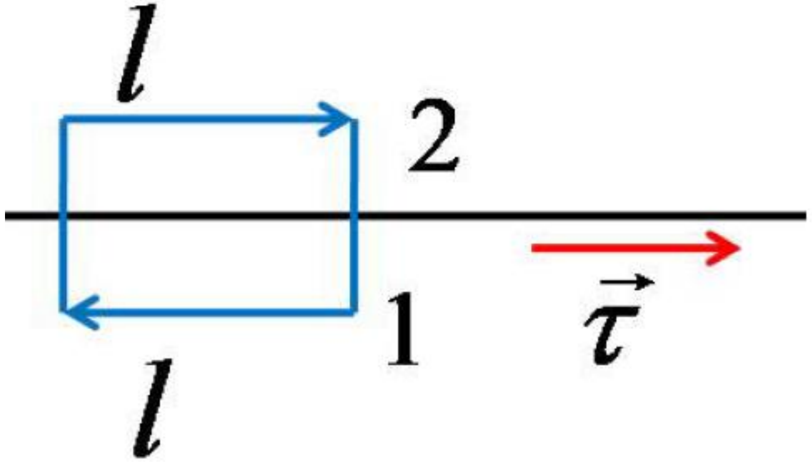
$\varphi_2 = -\int E_2 dr = -\int \frac{\rho R^3}{3r^2\varepsilon_0} dr = \frac{\rho R^3}{3r\varepsilon_0} + 0$, т.к. $\varphi(r = \infty) = 0$

$\varphi_1 = -\int E_1 dr = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon_0 \varepsilon} dr = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{\rho R^3 (2\varepsilon + 1)}{6\varepsilon_0}$, т.к. $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$





7. Выведите правила преломления линий вектора $\vec{E}$ на границе диэлектрик-диэлектрик.



Запишем теорему о циркуляции вектора **E**

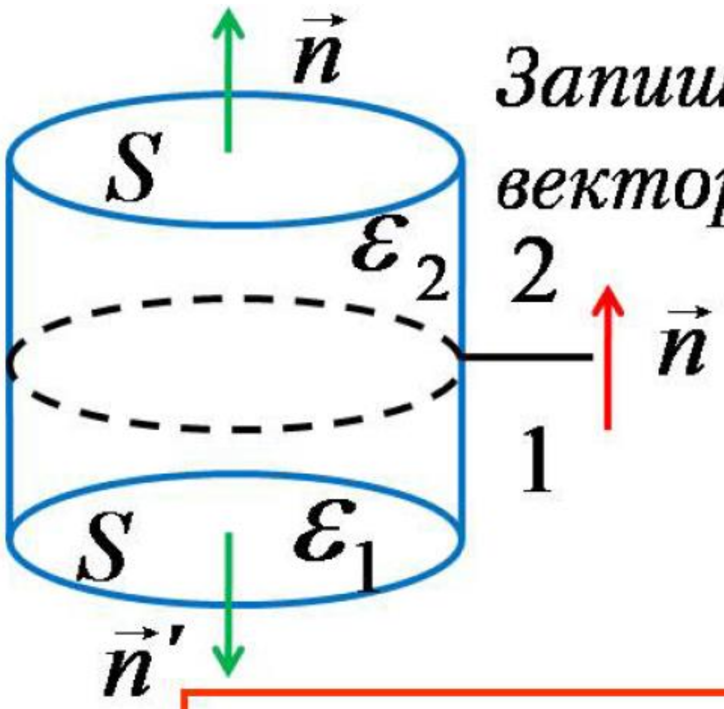
$$\oint_l E_l \, dl = 0$$

Выберем направление касательной τ

$$E_{2\tau} l - E_{1\tau} l = 0$$

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$$

7. Выведите правила преломления линий вектора $\vec{E}$ на границе диэлектрик-диэлектрик.



Запишем теорему Гаусса для вектора $\boldsymbol{D}$

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{своб}$$

$$D_{2n}S - D_{1n}S = \sigma S$$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

D-Электрическое смещение

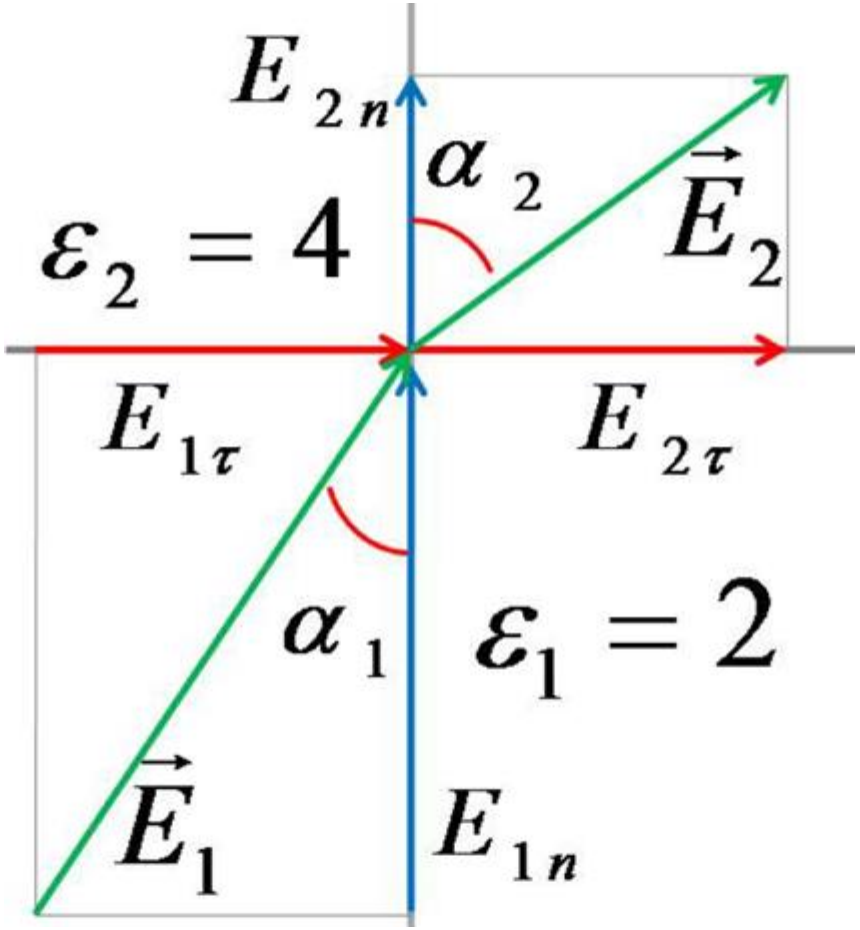
Если на границе нет свободных зарядов,

$$\boxed{D_{1n} = D_{2n}}$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E$$

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}}$$

7. Выведите правила преломления линий вектора $\vec{E}$ на границе диэлектрик-диэлектрик.

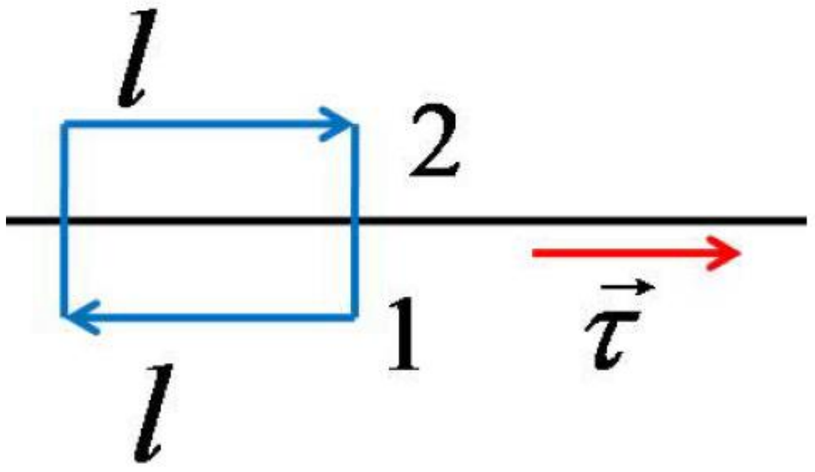


$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{E_{2\tau}E_{1n}}{E_{1\tau}E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

8. Выведите правила преломления линий вектора $\vec{D}$ на границе диэлектрик-диэлектрик.



Запишем теорему о циркуляции вектора **E**

$$\oint_l E_l \, dl = 0$$

Выберем направление касательной τ

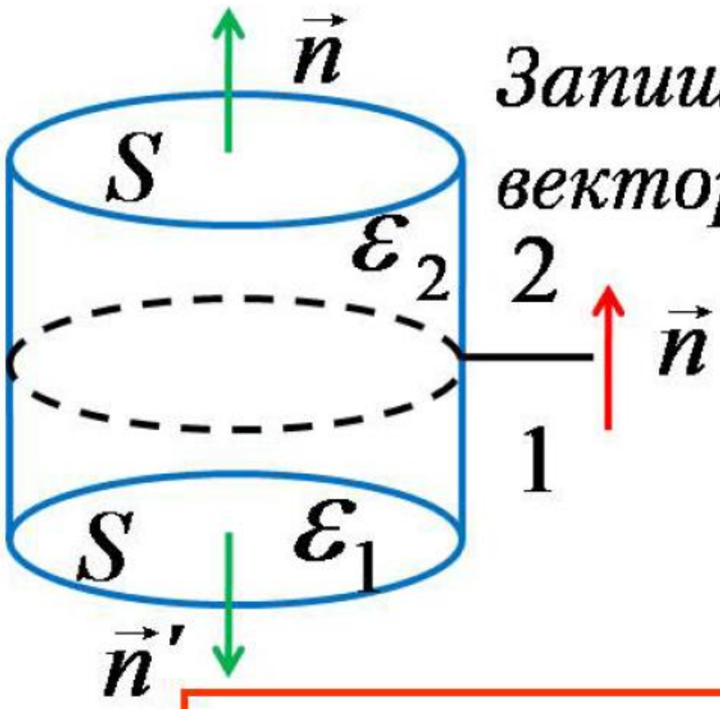
$$E_{2\tau} l - E_{1\tau} l = 0$$

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E$$

$$\boxed{\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}}$$

8. Выведите правила преломления линий вектора $\vec{D}$ на границе диэлектрик-диэлектрик.



Запишем теорему Гаусса для вектора **D**

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{своб}$$

$$D_{2n}S - D_{1n}S = \sigma S$$

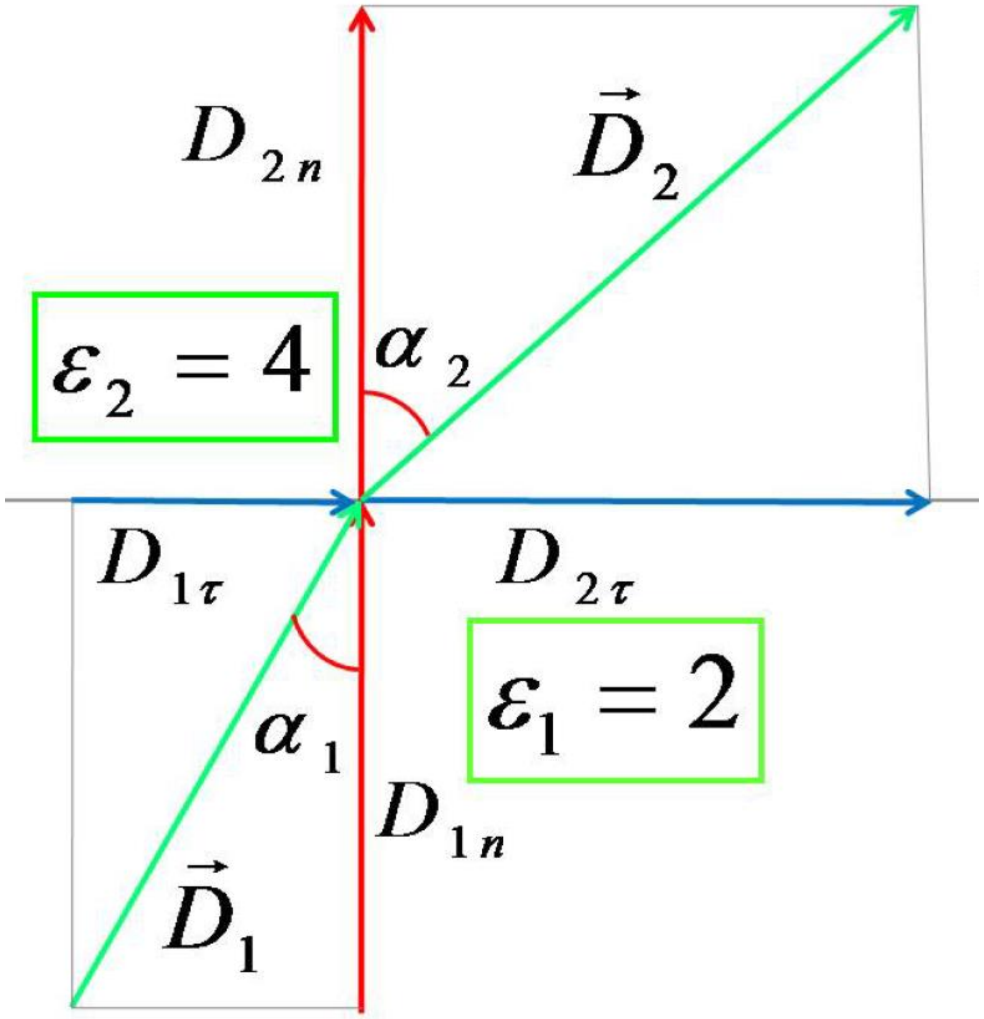
$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

D-Электрическое смещение

Если на границе нет свободных зарядов,

$$\boxed{D_{1n} = D_{2n}}$$

8. Выведите правила преломления линий вектора $\vec{D}$ на границе диэлектрик-диэлектрик.



$$D_{1n} = D_{2n} \qquad \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{D_{2\tau} D_{1n}}{D_{1\tau} D_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

9. Пластина из однородного, изотропного диэлектрика размещена перпендикулярно линиям напряжённости однородного электрического поля. Докажите, что диэлектрическая проницаемость показывает во сколько раз ослабевает однородное электрическое поле, попадая в диэлектрик.

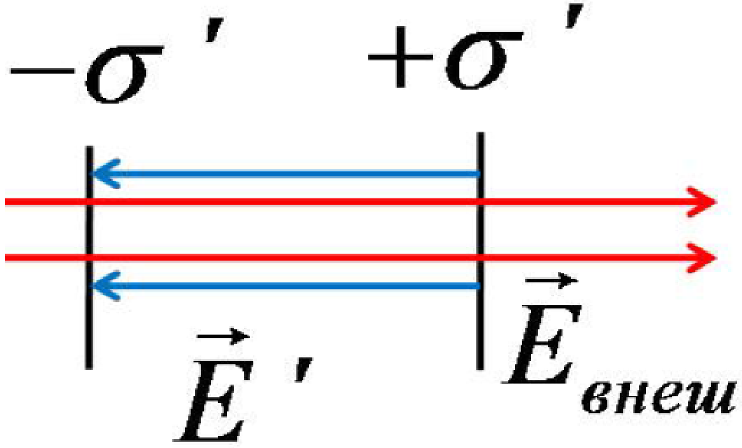
Для бесконечной пластины в изотропной среде поле $\vec{E}$ ослабляется в ε раз:

По граничному условию: $\sigma' = P$. Знаем, что $\vec{P} = \varepsilon_0 æ \vec{E}$.

По рисунку: $\vec{E}' = 2\frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 æ E}{\varepsilon_0} = æ\vec{E}$.

Суммарное поле: $E = E_0 - E' \Longrightarrow E + E' = E(1 + æ) = E_0$

Отсюда $E = \frac{E_0}{1+æ} = \frac{E_0}{\varepsilon}$.



10. В чём заключается метод электрических изображений при определении напряжённости электрического поля вблизи поверхности проводника.

Если сложно вычислить поле и потенциал реального распределения зарядов, можно придумать другую конфигурацию зарядов, которая даст такое же распределение потенциала по поверхности проводников. В тех точках пространства, где есть поле, его напряжённость и потенциал можно будет вычислять как напряжённость и потенциал от новой конфигурации зарядов.

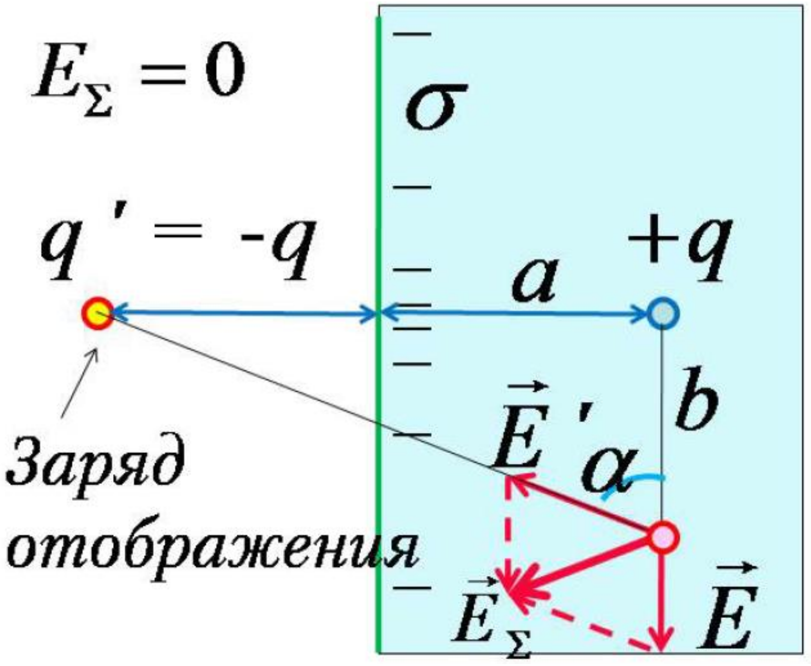
Пример. Точечный заряд и бесконечная проводящая плоскость

Поле реального заряда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{b^2} \qquad E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{(4a^2+b^2)}$$

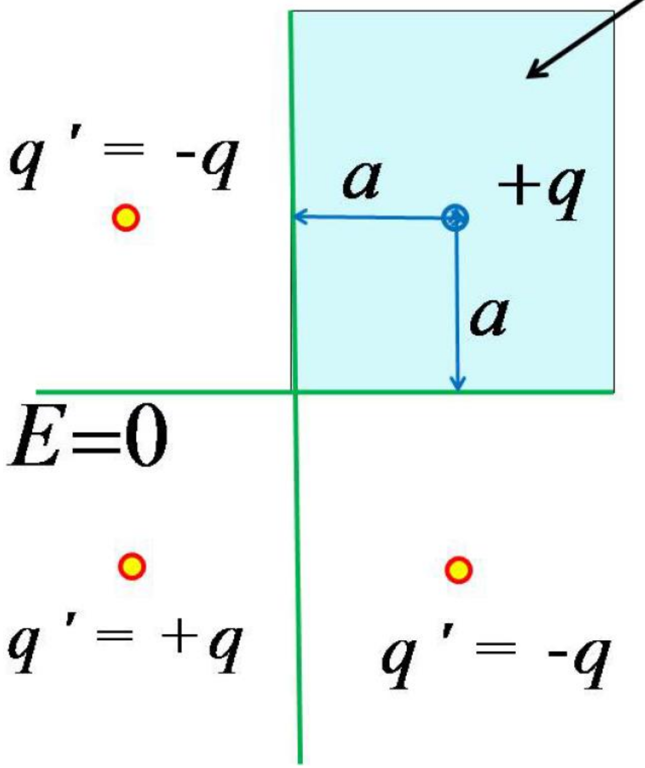
$$Cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{4a^2+b^2}}$$

$$E_\Sigma^{\,2} = E^2 + E'^2 + 2EE'Cos\alpha$$



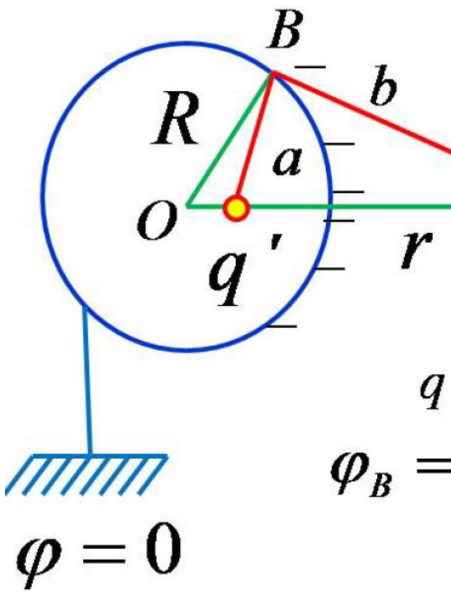
10. В чём заключается метод электрических изображений при определении напряжённости электрического поля вблизи поверхности проводника.

Две перпендикулярные плоскости



Напряжённость электрического поля в этой области можно вычислить как сумму полей заряда q и трёх зарядов отображения.

Заземлённая сфера



B- произвольная точка на поверхности сферы

Построим два подобных треугольника

q' *-заряд отображения*

$\varphi_B = 0$ *, если выполнено условие*

$$\frac{q}{b} + \frac{q'}{a} = 0$$

$$q' = -\frac{a}{b}q = -\frac{R}{r}q$$

Для незаземлённой сферы нужно добавить заряд в центре

11. Дайте определение электрической ёмкости уединённого проводника и конденсатора. Выведите формулу для ёмкости плоского и сферического конденсаторов.

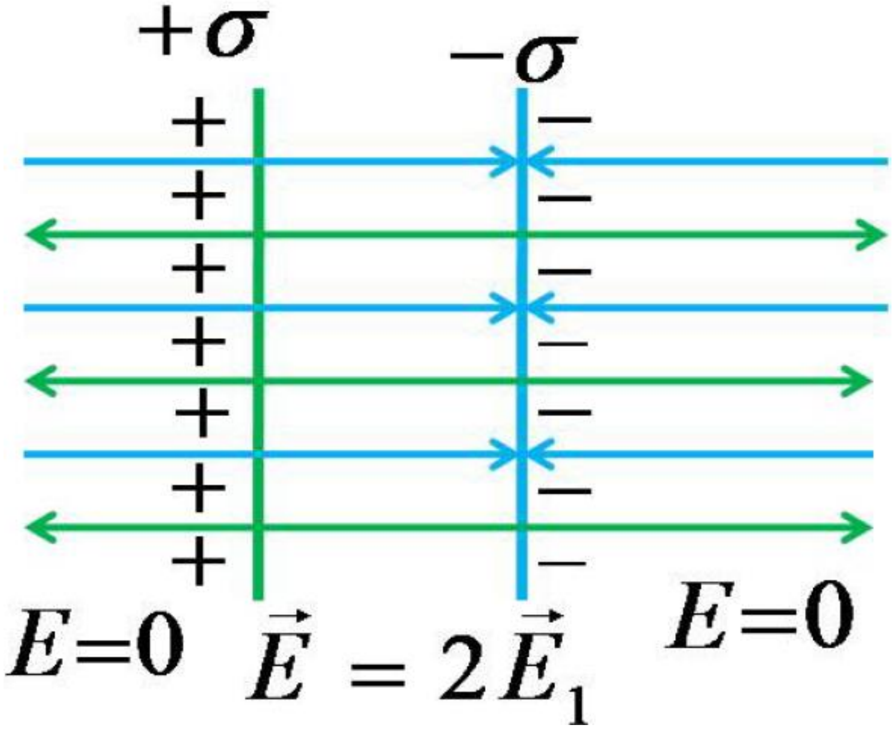
Электрическая ёмкость уединённого проводника

$$C = \frac{q}{\varphi}, \quad [C] = \text{Фарад}$$

Электрическая ёмкость конденсатора

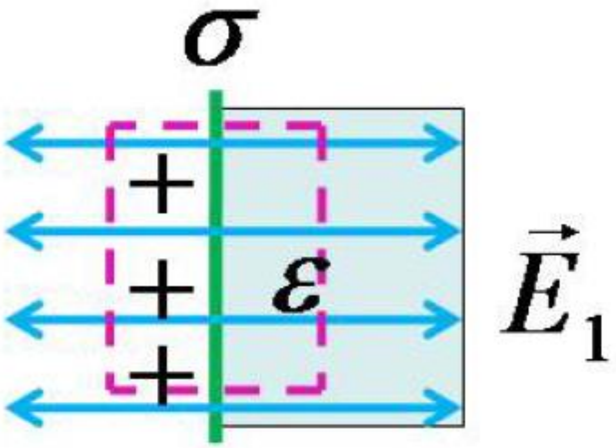
$$C = \frac{q}{U}, \qquad [C] = \text{Фарад}$$

U – разность потенциалов между обкладками конденсатора



11. Дайте определение электрической ёмкости уединённого проводника и конденсатора. Выведите формулу для ёмкости плоского и сферического конденсаторов.

Ёмкость плоского конденсатора

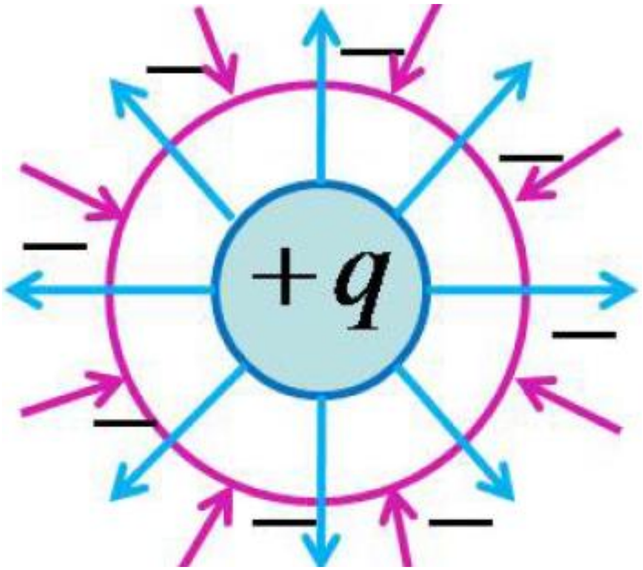


По т. Гаусса для одной обкладки (с диэлектриком): $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$.

Напряженность поля внутри конденсатора $E = 2E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}$.

Разность потенциалов: $U = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{qd}{S\varepsilon_0\varepsilon}$. Ёмкость $C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$.

Ёмкость сферического конденсатора



Поле внутри конденсатора создаёт только внутренняя обкладка.

По т. Гаусса $\oint \vec{D}d\vec{S} = q \implies D = \frac{q}{4\pi r^2}, E = \frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon}$.

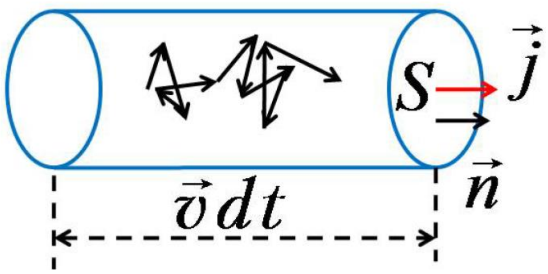
$$U = \Delta\varphi = -\int_{R_1}^{R_2} Edr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0\varepsilon}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

12. Получите уравнение непрерывности. Какой закон сохранения оно выражает?

Заряд, переносимый через площадку S за интервал времени dt: $dq = envSdt$

Плотность тока: $j = \frac{dq}{Sdt} = env = [\frac{\text{А}}{\text{м}^2}]$



Заряд: $q = \int_V \rho dV$

Сила тока: $I = -\frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Уравнение непрерывности – мат. выражение закона сохранения заряда.

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\int_V \frac{\rho dV}{dt}, \qquad div\,\vec{j} = -\frac{\delta\rho}{\delta t}$$

Если токи не зависят от t, то заряд не накапливается $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0,\ div\,\vec{j} = 0.$

13. Получите уравнения Кирхгофа.

Ветвь – участок цепи, содержащий резистор, конденсатор или источник.

Узел – точка, где сходятся три и более ветвей.

Контуры считаются **независимыми**, если они не могут получены друг из друга путём сложения.

Для проверки кол-во уравнений = $N_{\text{ветвей}} = N_{\text{узлов}} - 1 + N_{\text{контуров}}$

1. Первое уравнение Кирхгофа ($N_{\text{узлов}} - 1$ уравнений)

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

Следствие из уравнения непрерывности для постоянного тока $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0$ (**билет 12**).

2. Второе уравнение Кирхгофа ($N_{\text{контуров}}$ уравнений)

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k$$

Следует из закона Ома для k-ого участка: $I_k R_k = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_k$ (**билет 18**).

14. Выведите формулу для энергии системы точечных зарядов.

Вычислим работу, которую должны совершить внешние силы, чтобы разнести их на бесконечно большое расстояние.

Для одного заряда: $A = q\Delta\varphi$.

На примере трёх зарядов

$$W_{123} = \frac{q_1(\varphi_{12}+\varphi_{13})+q_2(\varphi_{21}+\varphi_{23})+q_3(\varphi_{31}+\varphi_{32})}{2}$$

φ_{12} *- потенциал, который создаёт второй заряд в точке, где находится первый*

А в общем виде,

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \sum_{j\neq i} \varphi_{i\,j} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$$

φ_i – потенциал, который создают в точке, где находится заряд с номером i все остальные заряды, кроме i-ого.

15. Выведите формулу для энергии конденсатора.

Для конденсатора справедливо $\mathrm{C} = \frac{q}{U}$.

Полная энергия взаимодействия зарядов на обкладках между собой и между обкладками: $W = \frac{q_+\varphi_+ + q_-\varphi_-}{2} = \frac{q(\varphi_+ - \varphi_-)}{2} = \frac{CU^2}{2}$.

Работа по перенесению зарядов с одной обкладки на другую: $dA = Udq = \frac{q}{C}dq$, отсюда полная работа: $W = A = \int_0^q dA = \int_0^q \frac{q}{C}dq = \frac{q^2}{2C}$.

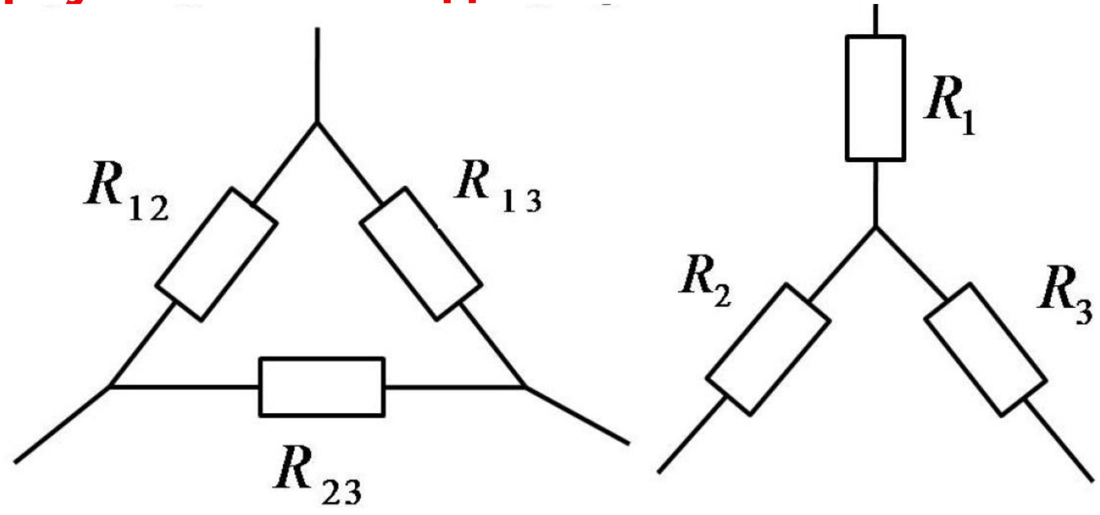
$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Энергия электрического поля конденсатора

$$\begin{cases} W = \frac{CU^2}{2} \\ \mathrm{C} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \end{cases} \Rightarrow W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 V}{2} \Rightarrow W = \int \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV = \int \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} dV$$

16. Выведите правило преобразования «треугольник-звезда»

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23}+R_{13})}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \\ R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12}+R_{13})}{R_{23}+R_{12}+R_{13}} \\ R_1 + R_3 = \frac{R_{13}(R_{23}+R_{12})}{R_{13}+R_{23}+R_{12}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \\ R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \\ R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \end{cases}$$



Промежуточные вычисления.

Сложим: $(R_1 + R_2) + (R_2 + R_3) + (R_1 + R_3) = \frac{R_{12}R_{23}+R_{12}R_{13}+R_{23}R_{12}+R_{23}R_{13}+R_{13}R_{23}+R_{13}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}$.

Разделим на 2: $R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R_{12}R_{23}+R_{23}R_{13}+R_{13}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}$.

1. Вычтем 2 уравнение: $R_1 + R_2 + R_3 - R_2 + R_3 = \frac{R_{12}R_{23}+R_{23}R_{13}+R_{13}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} - \frac{R_{23}R_{12}+R_{23}R_{13}}{R_{23}+R_{12}+R_{13}}$, получим R_1

2. Вычтем 3 уравнение: $R_1 + R_2 + R_3 - R_1 + R_3 = \frac{R_{12}R_{23}+R_{23}R_{13}+R_{13}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} - \frac{R_{13}R_{23}+R_{13}R_{12}}{R_{13}+R_{23}+R_{12}}$, получим R_2

3. Вычтем 1 уравнение: $R_1 + R_2 + R_3 - R_1 + R_2 = \frac{R_{12}R_{23}+R_{23}R_{13}+R_{13}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} - \frac{R_{12}R_{23}+R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}$, получим R_2

17. Выведите формулы для эквивалентной ЭДС и внутреннего сопротивления источника при соединении нескольких одинаковых источников в батарею.

Последовательное соединение

ЭДС. $A_{\text{экв}} = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ перемещает заряд q,получаем $\mathcal{E}_{\text{экв}} = n\mathcal{E}$

Внутреннее сопротивление

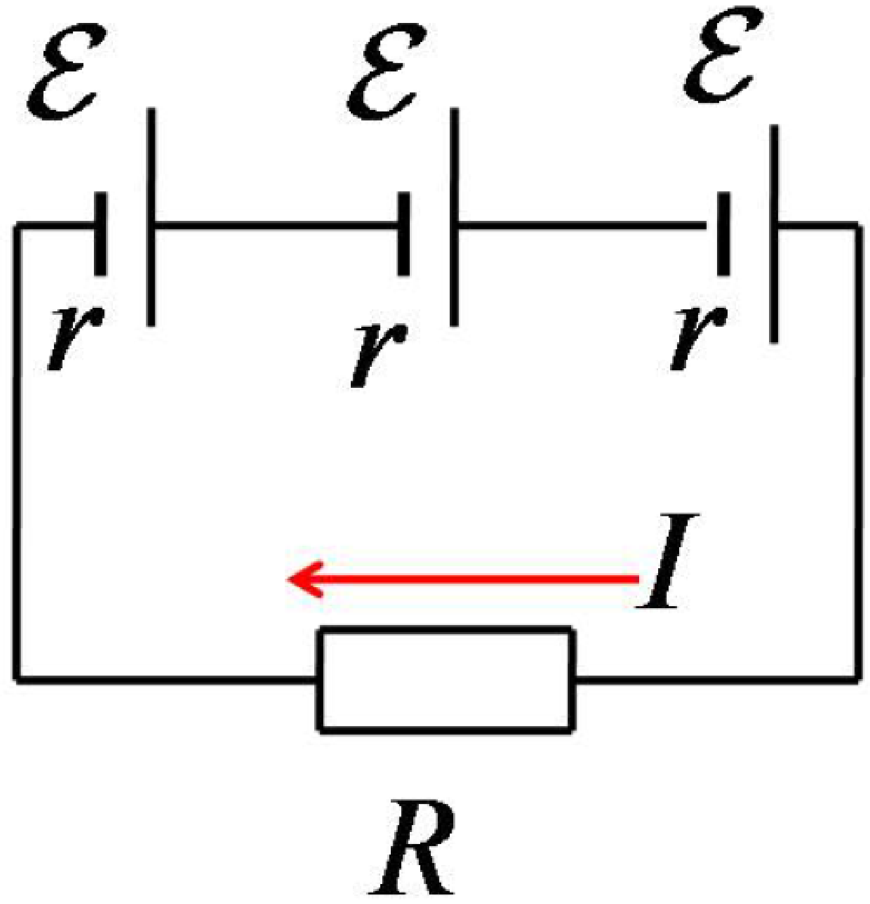
$$\Delta\varphi = I \cdot r_1 + I \cdot r_2 + \cdots + I \cdot r_n = Inr = Ir_{\text{экв}}$$

$$r_{\text{экв}} = nr$$

Сила тока по закону Ома

$$Inr + IR = n\mathcal{E} \Rightarrow I = \frac{n\mathcal{E}}{nr + R} = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R}{n}}$$

Этот способ выгоден, когда внешнее сопротивление $R \gg r$



17. Выведите формулы для эквивалентной ЭДС и внутреннего сопротивления источника при соединении нескольких одинаковых источников в батарею.

Параллельное соединение

Разность потенциалов, создаваемая любым из источников при отсутствии тока

$$\mathcal{E}_{\text{экв}} = \Delta\varphi = \mathcal{E}$$

Внутреннее сопротивление

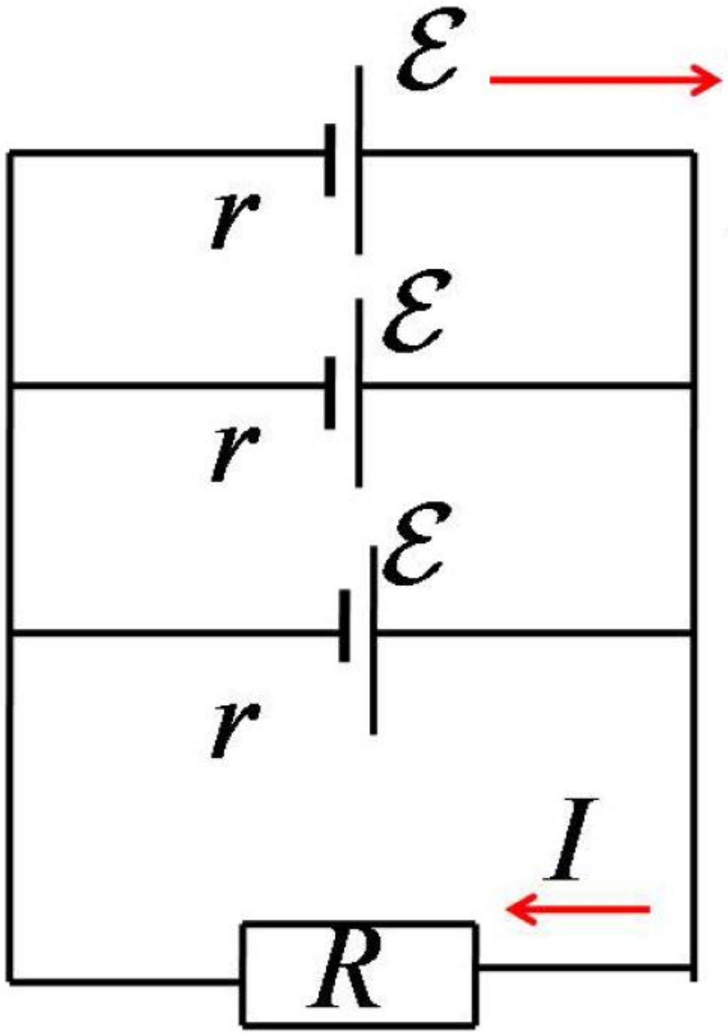
$$U = I \cdot r_{\text{экв}} = \frac{I}{n} \cdot r$$

$$r_{\text{экв}} = \frac{r}{n}$$

Сила тока по закону Ома

$$\frac{I}{n} r + IR = \mathcal{E} \implies I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{n}}$$

Если $r \gg R$, такое соединение приводит к увеличению силы тока в n раз: $I = nI_0$



18. Получите закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной и дифференциальной формах.

Участок цепи, содержащий источник тока – **неоднородный**.

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}\right), \qquad IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$$

«Сторонние силы» осуществляют пространственное разделение зарядов и поддерживают электрическое поле в цепи. Эти не электростатические силы переносят заряд в сторону возрастания потенциала.

Аналогичными (билету 19) рассуждениями $\vec{j} = en v = \frac{e^2 n}{m}\frac{\tau}{2}\left(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}\right) = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}\right)$.

Электродвижущая сила источника $\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор сил}}}{q}$.

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^2 \frac{\vec{j}d\vec{l}}{\sigma} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}}d\vec{l} \\ \displaystyle\int_1^2 \frac{\vec{j}d\vec{l}}{\sigma} = I\int_1^2 \rho\frac{dl}{S} = IR \end{cases} \Rightarrow IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$$

Напряжение $U = \frac{A_{\text{всех сил}}}{q} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}}d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$

19. Получите закон Ома для однородного участка цепи в интегральной и дифференциальной формах.

Участок цепи, который **не** содержит источник тока – **однородный**.

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \qquad I = \frac{U}{R}$$

Будем считать, что под действием электрического поля E в течение времени τ электрон движется равноускорено. Средняя скорость: $v = \frac{v_{max}}{2} = \frac{a\tau}{2}$.

$$\vec{j} = env = \frac{e^2 n\,\tau}{m\ 2}\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

Здесь σ – удельная проводимость, $\sigma = \left[\frac{\text{Сименс}}{\text{м}}\right]$.

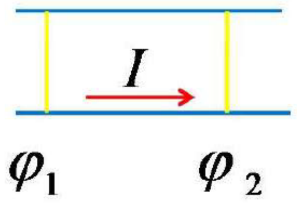
Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = El$ (т.к. поле направлено вдоль проводника), отсюда $E = \frac{U}{l}$.

Удельное сопротивление $\rho = \frac{1}{\sigma} = [\text{Ом}\cdot\text{м}]$, сопротивление $R = \frac{\rho l}{S}$.

Сила тока в проводнике

$$I = jS = \sigma SE = \frac{\sigma SU}{l} = \frac{S}{\rho l}U = \frac{U}{R}$$

20. Получите закон Джоуля-Ленца для неоднородного участка цепи в интегральной и дифференциальной формах.



Закон Джоуля-Ленца (интегральная форма)

Рассмотрим проводник с током: $dA_{\text{кул}} = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2)Idt$

Работа сил на неоднородном участке за время dt складывается из работы сил поля и работы сторонних сил: $dA = dA_{\text{кул}} + dA_{\text{стор}} = (\varphi_1 - \varphi_2)Idt + \mathcal{E}Idt$.

Если проводник неподвижен и без химических реакций, вся эта работа переходит в тепло: $dQ = dA$.

Зная, что $P = \frac{dQ}{dt}$, поделим на dt, применим закон Ома к последнему равенству:

$$P = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}I = I^2R$$

Закон Джоуля-Ленца (дифференциальная форма)

По закону Ома: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$, по определению: $\dot{p} = \rho j^2$ и $\rho = \frac{1}{\sigma}$.

$$\dot{p} = \rho j^2 = j(E + E_{\text{стор}})$$

Доказательство $\dot{p} = \rho j^2$ в билете 21/22.

21. Получите выражение для удельной мощности тока для неоднородного участка цепи.

Удельная тепловая мощность $\dot{p}$ — это количество теплоты, выделяющееся в единице объема проводника за единицу времени:

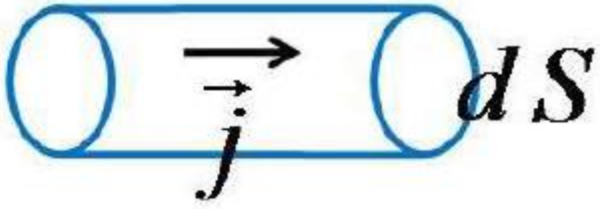
Распишем правую часть закона Джоуля Ленца в интегральной форме

$$\delta Q = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS}(jdS)^2 dt = \rho j^2 dV dt$$

Поделим на единицу объёма dV и единицу времени dt: $\dot{p} = \frac{\delta Q}{dV dt} = \rho j^2 = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}\right]$

По закону Ома: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$, откуда

$$\dot{p} = \rho j^2 = j\left(E + E_{\text{стор}}\right)$$



22. Получите выражение для удельной мощности тока для однородного участка цепи.

Удельная тепловая мощность $\dot{p}$ — это количество теплоты, выделяющееся в единице объема проводника за единицу времени:

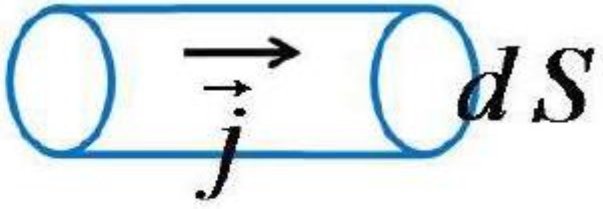
Распишем правую часть закона Джоуля Ленца в интегральной форме

$$\delta Q = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS}(jdS)^2 dt = \rho j^2 dV dt$$

Поделим на единицу объёма dV и единицу времени dt: $\dot{p} = \frac{\delta Q}{dVdt} = \rho j^2 = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}\right]$

По закону Ома: $\vec{j} = \sigma\vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho}$, откуда

$$\dot{p} = \rho j^2 = jE = \sigma E^2$$



23. Запишите систему уравнений Максвелла в интегральной форме. Как выглядит эта система уравнений в стационарном случае?

Закон электромагнитной индукции (док-во: билет 11 части 2 или лекция 12, постулат)

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}$$

Теорема о циркуляции $\vec{H}$ (док-во: лекция 13)

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\overrightarrow{j_{\text{пров}}} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S}$$

Теорема Гаусса для $\vec{D}$ (док-во: билет 6 части 1 или лекция 4)

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho_{\text{стор}}dV$$

Теорема Гаусса для $\vec{B}$ (док-во: лекция 11, постулат)

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

- Нельзя рассматривать векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ как независимые. Под $\vec{E}$ стоит сумма электростатического (его циркуляция 0) и вихревого электрического полей.
- Уравнения Максвелла линейны, отсюда принцип суперпозиции: если два каких-нибудь поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, то это справедливо и для их суммы.

23. Запишите систему уравнений Максвелла в интегральной форме. Как выглядит эта система уравнений в стационарном случае?

В стационарном случае ($\vec{E}$ и $\vec{B}$ не изменяются во времени).

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \qquad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho_{\text{стор}} dV, \qquad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Электрическое и магнитное поле не зависят друг от друга.

Нужно **дополнить систему** материальными уравнениями для каждого вещества:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}')$$

24. Запишите систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме. Что можно сказать об источниках и стоках линий $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$?

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad div\,\vec{D} = \rho_{стор}, \qquad div\,\vec{P} = -\rho'_{связ}$$

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}_{пров} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad div\,\vec{B} = 0, \qquad div\,\vec{J} = -\rho_m$$

Линии вектора $\vec{D}$ начинаются на положительных (исток) и заканчиваются на отрицательных (сток) *свободных* зарядах ($div\,\vec{D} = \rho_{стор}$).

Линии вектора $\vec{E}$ начинаются на положительных (исток) и заканчиваются на отрицательных (сток) *свободных и связанных* зарядах ($div\,\vec{E} = div\left(\frac{\vec{D}-\vec{P}}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho_{стор}+\rho'_{связ}}{\varepsilon_0}$).

Линии вектора $\vec{B}$ всегда замкнуты (вихревое поле). У них нет ни источников, ни стоков ($div\,\vec{B} = 0$).

Линии $\vec{H}$ начинаются на северном полюсе магнетика и заканчиваются на южном (на границе раздела сред), внутри магнетика направлены против $\vec{B}$ ($div\,\vec{H} = -div\,\vec{J} = \rho_m$).

Нужно **дополнить систему** граничными условиями:

$$D_{1n} = D_{2n} \Leftarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{своб\ гран}, \qquad B_{1n} = B_{2n}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \qquad H_{1\tau} = H_{2\tau} \Leftarrow H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_{пров\ гран}$$

25. Покажите с помощью системы уравнений Максвелла, как изменяющееся во времени электрическое поле порождает магнитное.

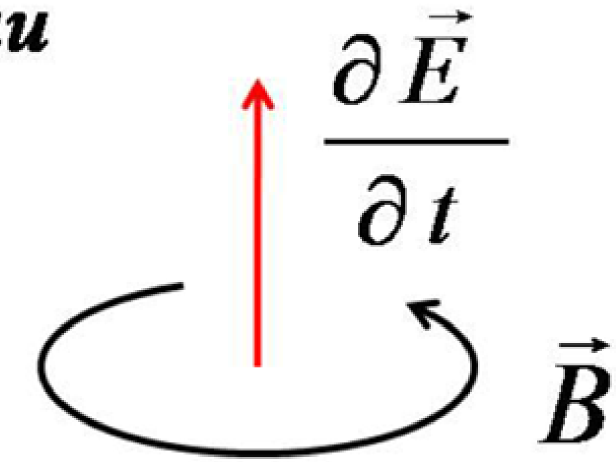
Получим выражение для ротора $\vec{B}$

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}_{\text{пров}} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\qquad rot\,\vec{J} = \vec{j'}_{\text{намагн}},\qquad \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{H}),\qquad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

Отсюда

$$rot\,\vec{B} = \mu_0(\vec{j}_{\text{пров}} + \vec{j'}_{\text{намагн}} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0\partial\vec{E}}{\partial t})$$

Токи проводимости, токи намагничивания, токи поляризации и изменяющееся во времени электрическое поле



Правый винт

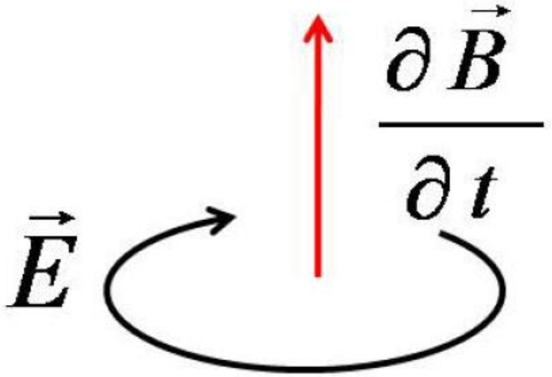
26. Покажите с помощью системы уравнений Максвелла, как изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое.

Электромагнитная индукция, закон Фарадея, первое уравнение Максвелла.

Символ $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ означает изменение магнитной индукции во времени, $rot\,\vec{E}$ говорит о том, что электрическое поле имеет вихревой характер (его линии замкнуты).

Вихревое электрическое поле возникает всегда, когда изменяется во времени магнитное поле

$$\boxed{rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$



Левый винт

Магнетизм и колебания 1/3

Магнетизм

1. Сформулируйте закон Био-Савара-Лапласа. Получите с его помощью выражение для индукции поля прямого тока и индукции в центре кругового витка. [Л9]
2. Докажите теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ в отсутствие магнетика. Вычислите с её помощью индукцию магнитного поля прямого тока, индукцию поля внутри длинного соленоида. [Л9]
3. Дайте определение силы Лоренца, действующей на частицу в электромагнитном поле. Частица движется в однородном магнитном поле по винтовой линии. Получите формулу для радиуса и шага винтовой линии. [Л10]
4. Выведите формулу для работы сил магнитного поля при движении контура с током в магнитном поле. [Л10]
5. Что называют индуктивностью контура? Получите формулу для индуктивности на единицу длины для длинного соленоида. [Л12]
6. В чём заключается явление взаимной индукции. Получите формулы для вычисления индуктивности связанных контуров. [Л12]
7. В чём заключается явление взаимной индукции. Получите формулы для вычисления энергии магнитного поля связанных контуров. [Л12]
8. Получите выражение для ЭДС индукции, возникающей при движении проводника в магнитном поле. [Л12]
9. Получите выражение для разности потенциалов, возникающей между концами проводника при движении в магнитном поле. [Л12]
10. Получите выражение для ЭДС индукции, возникающей в неподвижном контуре при изменении магнитного потока через него. [Л12]

Магнетизм и колебания 2/3

Магнетизм + волны

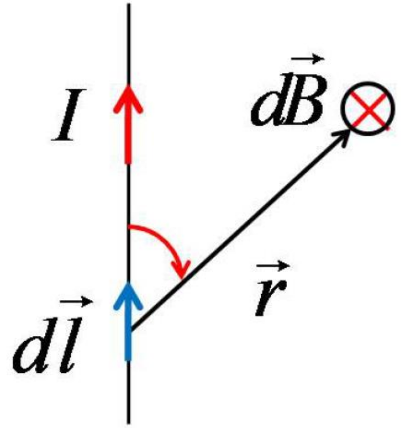
11. Приведите примеры - когда наблюдается действие вихревого электрического поля, а когда потенциального. Запишите теорему о циркуляции электрического поля для обоих случаев. [Л12]
12. Дайте определение токов намагничивания. Что называют намагниченностью среды? Как в случае однородного изотропного магнетика связаны векторы $\vec{J}$, $\vec{H}$ и $\vec{B}$. [Л11]
13. Докажите теорему о циркуляции вектора $\vec{J}$. [Л11]
14. Что называют магнитной проницаемостью среды. Расскажите о свойствах диа- и парамагнетиков. [Л11]
15. Расскажите о свойствах ферромагнетиков. За счёт чего возникает гистерезис. Что называется температурой Кюри? [Л11]
16. Получите формулы, описывающие преломление линий вектора $\vec{H}$ на границе двух магнетиков. [Л11]
17. Получите формулы, описывающие преломление линий вектора $\vec{B}$ на границе двух магнетиков. [Л11]
18. Получите волновое уравнение для вектора $\vec{E}$. [Л16]
19. Получите волновое уравнение для вектора $\vec{B}$. [Л16]
20. Докажите, что плоская электромагнитная волна является поперечной. [Л16]
21. Установите связь между амплитудами напряжённости электрического поля и напряжённости магнитного поля в плоской электромагнитной волне. [Л16]
22. Комплексное представление электромагнитной волны. Запись уравнений Максвелла для такой волны. [Л16]
22. Вектор Умова-Пойнтинга. [Л16+Л13] (да, 2 билета №22)

Магнетизм и колебания 3/3

Волны + сигналы + оптика

23. Интерференция двух плоских монохроматических волн одинаковой частоты. [Л16]
24. Интерференция волн от двух когерентных точечных источников. [Л16]
25. Разложение периодической функции в ряд Фурье. Фазовая модуляция радиосигнала. [Л17]
26. Разложение непериодической функции по интегралам Фурье. [Л17]
27. Представление одиночного прямоугольного импульса в виде интеграла Фурье. [Л17]
28. Представление конечного участка синусоидального сигнала в виде интеграла Фурье. [Л17]
29. Дифракция Френеля на круглом отверстии. Вычисление интенсивности в центре дифракционной картины с помощью векторных диаграмм. [Л17]
30. Групповая скорость волнового пакета. Расползание волнового пакета при наличии дисперсии. [Л18]
31. Уравнение эйконала и лучевое уравнение. Градиентные световоды. [Л18]
32. Вывод законов отражения и преломления света для плоской электромагнитной волны. [Л19]
33. Вывод формул Френеля. Угол Брюстера. [Л19]
34. Полное внутреннее отражение света. Проникновение волны в оптически менее плотную среду при полном внутреннем отражении. [Л19]
35. Сдвиг фаз при полном внутреннем отражении. Приведите пример, как это учитывается при вычислении порядка моды в волноводе. [Л19]

1. Сформулируйте закон Био-Савара-Лапласа. Получите с его помощью выражение для индукции поля прямого тока и индукции в центре кругового витка.

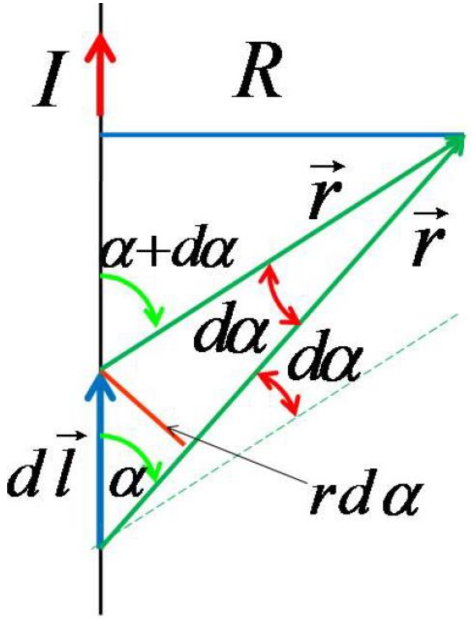


Закон Био-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{l},\vec{r}]}{r^3}$$

Элемент длины контура $d\vec{l}$ направлен по касательной к контуру в сторону протекания тока.

Индукция магнитного поля прямого тока



Расстояние до точки $r = \frac{R}{\sin\alpha}$

Элемент длины $|d\vec{l}| = \frac{r}{\sin\alpha}d\alpha = \frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha$

Векторное произведение $[d\vec{l},\vec{r}] = |d\vec{l}|\cdot r\cdot\sin\alpha$

$$B = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|d\vec{l}|\cdot r\cdot\sin\alpha}{r^3} = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\sin^2\alpha}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}\sin\alpha d\alpha = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

1. Сформулируйте закон Био-Савара-Лапласа. Получите с его помощью выражение для индукции поля прямого тока и индукции в центре кругового витка.

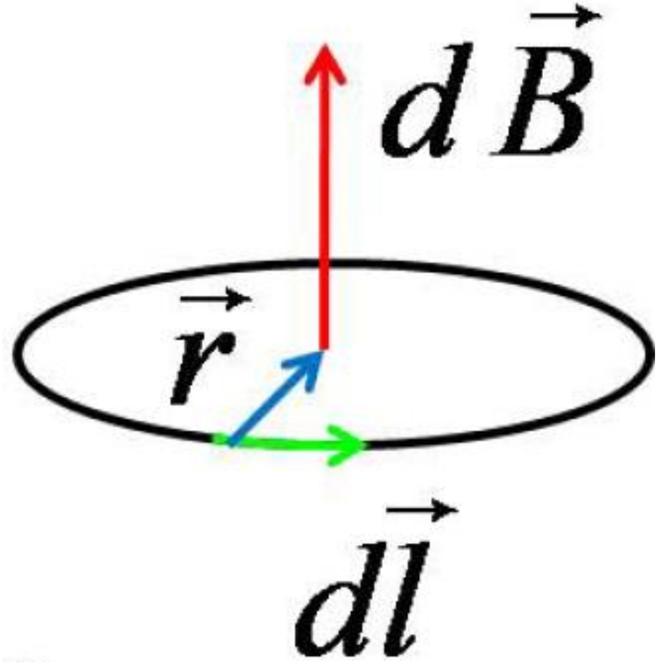
Индукция магнитного поля в центре кругового витка

Расстояние от проводника до точки всегда $|\vec{r}| = R$

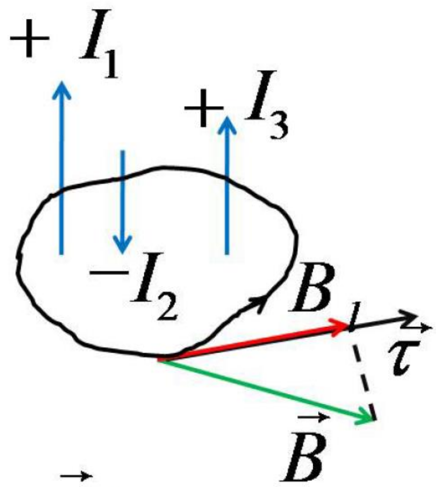
Общая длина всех элементов $d\vec{l}$ проводника равна $2\pi R$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{l},\vec{r}]}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi R R}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

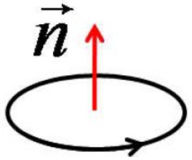


2. Докажите теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ в отсутствие магнетика. Вычислите с её помощью индукцию магнитного поля прямого тока, индукцию поля внутри длинного соленоида.



Циркуляция вектора $\vec{B}$ равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром, умноженной на магнитную постоянную.

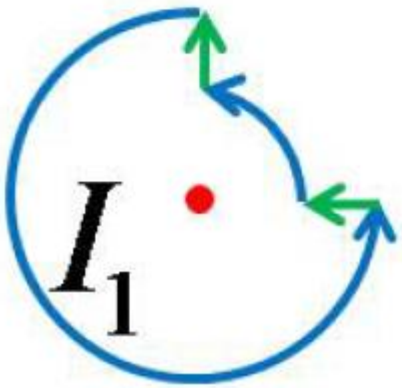
$$\oint_L B_l dl = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_\Sigma$$



Для непрерывно распределённых токов

$$\oint_L B_l dl = \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \oint_S \vec{j} d\vec{S} = \mu_0 \oint_S j_n dS$$

Доказательство



Представим контур в виде суммы произвольных дуг и окружностей.

На радиусах $\vec{B} \perp d\vec{l}$ циркуляция равна нулю.

На дугах: $B_k = \frac{\mu_0 I_k}{2\pi R}$. Все дуги охватывают угол 2π.

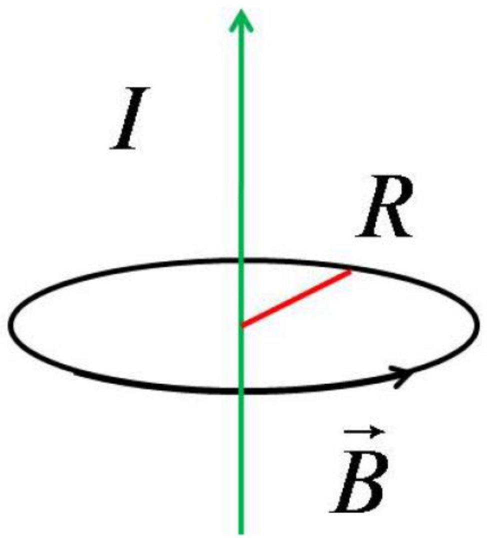
$$\oint_L \overrightarrow{B_k} d\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I_k}{2\pi R} = \mu_0 I_\mathrm{k}$$

Сложим результаты для каждого тока ■

2. Докажите теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ в отсутствие магнетика. Вычислите с её помощью индукцию магнитного поля прямого тока, индукцию поля внутри длинного соленоида.

Индукция магнитного поля прямого тока

Возьмём в качестве контура окружность радиусом R.

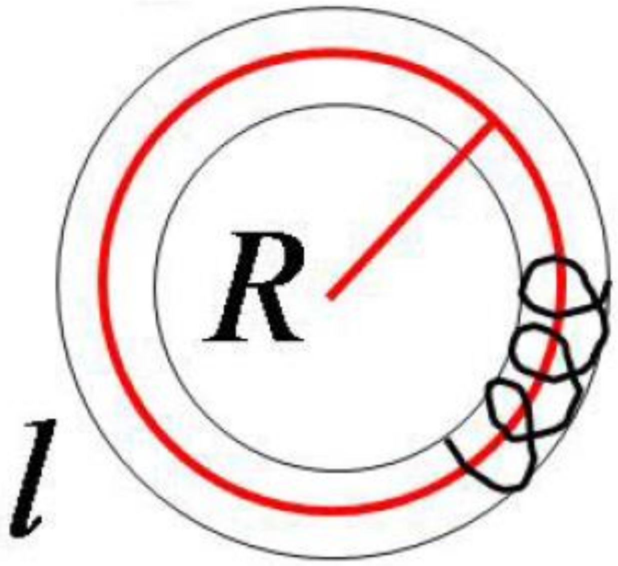


$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_\Sigma \implies B \cdot 2\pi R = \mu_0 I \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Индукция магнитного поля внутри длинного соленоида

Вычислим индукцию на оси, число витков на единицу длины равно n.

Представим бесконечный соленоид свёрнутый в кольцо большого радиуса.

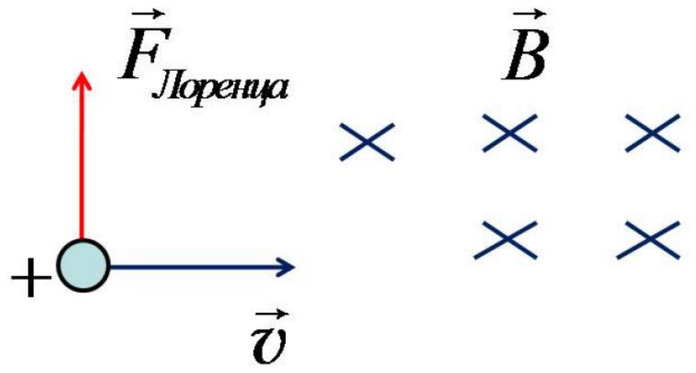


$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_\Sigma \implies B \cdot 2\pi R = \mu_0 I \cdot n \cdot 2\pi R \implies B = \mu_0 I n$$

3. Дайте определение силы Лоренца, действующей на частицу в электромагнитном поле. Частица движется в однородном магнитном поле по винтовой линии. Получите формулу для радиуса и шага винтовой линии.

Сила Лоренца – сила, действующая на движущуюся частицу в эм поле.

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$



Магнитная составляющая силы Лоренца направлена перпендикулярно скорости, поэтому не совершает работы, не может изменить модуля скорости.

Движение частицы по винтовой линии

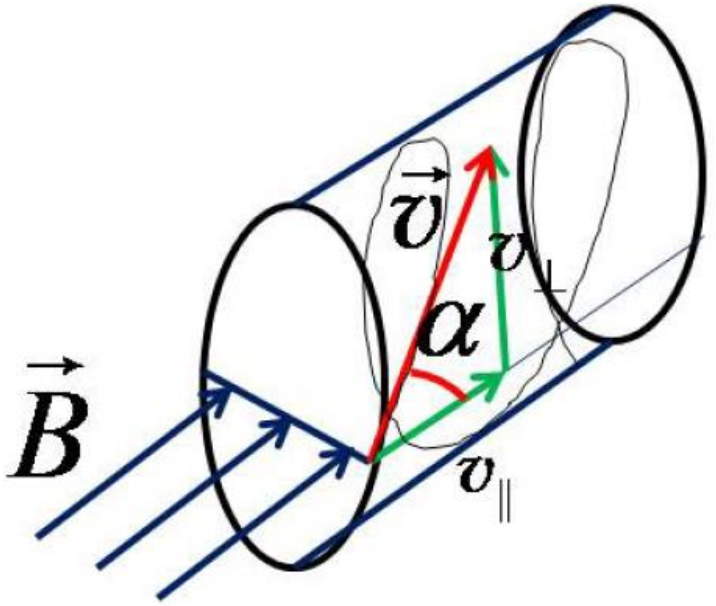
$$\begin{cases} v_\perp = v\sin\alpha \\ v_\parallel = v\cos\alpha \end{cases}$$

$$ma_{цс} = \mathrm{F}_{лор} \Rightarrow \frac{mv_\perp^2}{R} = qv_\perp B$$

Радиус спирали: $R = \dfrac{mv\sin\alpha}{qB}$

Период обращения частицы: $T = \dfrac{2\pi R}{v_\perp} = \dfrac{2\pi m}{qB}$

Шаг винтовой линии: $h = Tv_\parallel = \dfrac{2\pi m}{qB} v\cos\alpha$



4. Выведите формулу для работы сил магнитного поля при движении контура с током в магнитном поле.

Поток вектора магнитной индукции $d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = B_n dS = BdS\cos\alpha = [\text{Вб}]$

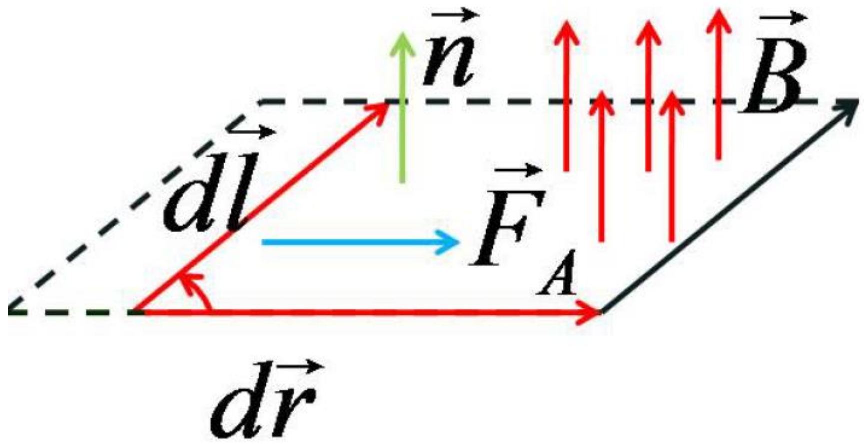
Сила Ампера на элемент проводника $d\vec{F} = I[d\vec{l},\vec{B}]$.

Элементарная работа по перемещению элемента проводника $d\vec{l}$ на расстояние $d\vec{r}$:

$$\delta A = \left(\overrightarrow{F_A}, d\vec{r}\right) = I\left(\left[d\vec{l},\vec{B}\right], d\vec{r}\right) = I\left(\left[d\vec{r}, d\vec{l}\right],\vec{B}\right) = I\left(\vec{n}dS,\vec{B}\right) = Id\Phi$$

Полная работа по перемещению проводника

$$A = \int_1^2 Id\Phi = I\Delta\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$



5. Что называют индуктивностью контура? Получите формулу для индуктивности на единицу длины для длинного соленоида.

Индуктивность – коэффициент пропорциональности между током в контуре и создаваемым им полным магнитным потоком

$$\Phi = LI, \qquad L = [\text{Гн}]$$

Индуктивность бесконечно длинного соленоида.

Число витков на единицу длины равно n, длина соленоида l, площадь сечения S, ток течёт силой I.

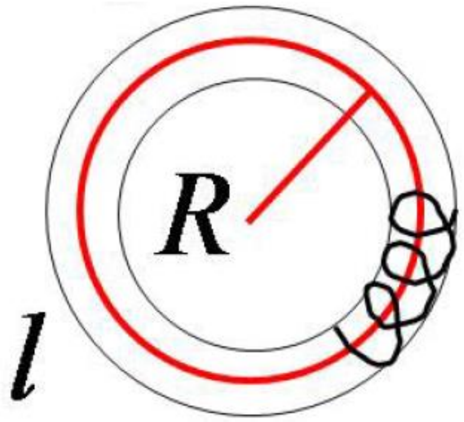
Вычислим индукцию на оси. Представим бесконечный соленоид свёрнутый в кольцо большого радиуса.

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\mu I_\Sigma \implies B \cdot 2\pi R = \mu_0\mu I \cdot n \cdot 2\pi R \implies B = \mu_0\mu In$$

Магнитный поток через один виток. Так как $B \perp S$: $\Phi_1 = B \cdot S = \mu_0\mu nIS$

Полный магнитный поток: $\Phi = \Phi_1 \cdot nl = \mu_0\mu n^2 lSI = LI$

$$L = \mu_0\mu n^2 V$$



6. В чём заключается явление взаимной индукции. Получите формулы для вычисления индуктивности связанных контуров.

Взаимная индукция — это возникновение ЭДС индукции в одном контуре при изменении силы тока в другом контуре.

Магнитный поток через второй контур пропорционален току в первом и наоборот.

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1, \qquad \Phi_{12} = L_{12} I_2$$

ЭДС вызываемый во втором контуре током первого и наоборот.

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}, \qquad \mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

Теорема о взаимности: $L_{\text{вз}} = L_{12} = L_{21}$

Если две катушки намотаны на один общий сердечник (длиной l и сечением S).

$$B_1 = \mu_0 \mu \frac{N_1}{l} I_1, \qquad B_2 = \mu_0 \mu \frac{N_2}{l} I_2$$

$$\Phi_{21} = N_2 \cdot \Phi_{\text{одного витка}} = N_2 \cdot \mathrm{B}_1 \cdot \mathrm{S} = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S}{l} \cdot I_1 = L_{21} I_1 \implies L_{21} = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S}{l}$$

$$\Phi_{12} = N_1 \cdot \Phi_{\text{одного витка}} = N_2 \cdot \mathrm{B}_2 \cdot \mathrm{S} = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S}{l} \cdot I_2 = L_{12} I_2 \implies L_{12} = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S}{l}$$

$$L_{\text{вз}} = L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S}{l}$$

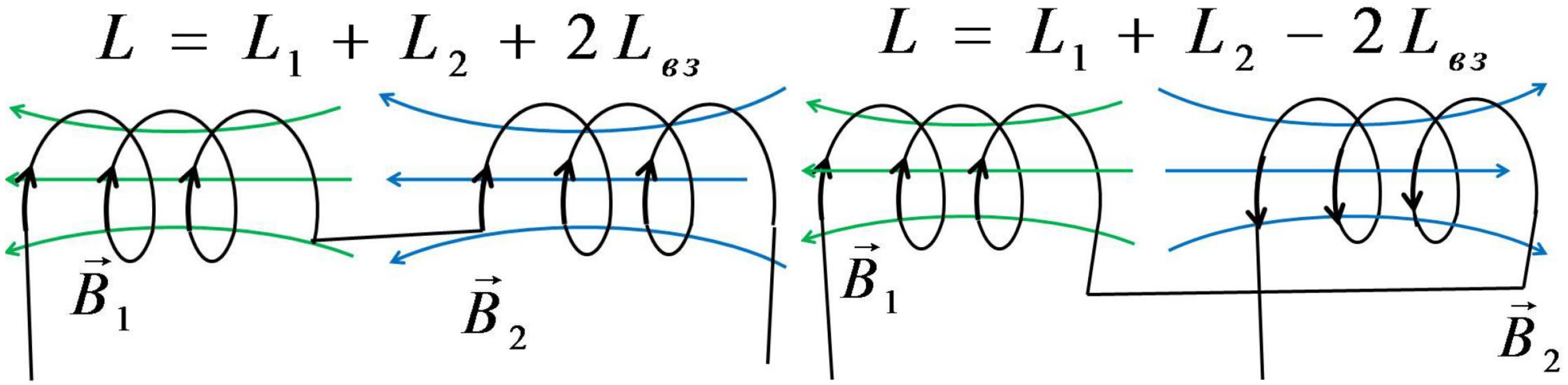
6. В чём заключается явление взаимной индукции. Получите формулы для вычисления индуктивности связанных контуров.

Поток через 1-ю катушку: $\Phi_1 = L_1 I + L_{вз} I$

Поток через 2-ю катушку: $\Phi_2 = L_2 I + L_{вз} I$

Суммарный поток $\Phi = (L_1 I + L_{вз} I) \pm (L_2 I + L_{вз} I) = (L_1 + L_2 \pm 2L_{вз}) I$

Индуктивность системы катушек $L = L_1 + L_2 \pm 2L_{вз}$



7. В чём заключается явление взаимной индукции. Получите формулы для вычисления энергии магнитного поля связанных контуров.

Взаимная индукция — это возникновение ЭДС индукции в одном контуре при изменении силы тока в другом контуре.

(**билет 6**)

Энергия магнитного поля связанных контуров

Элементарная работа dA, совершаемая источниками за время dt, равна

$$\delta A = -(\mathcal{E}_{si1} + \mathcal{E}_{\text{вз}1})I_1 dt - (\mathcal{E}_{si2} + \mathcal{E}_{\text{вз}2})I_2 dt = dW$$

- $\mathcal{E}_{si1} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$ – ЭДС самоиндукции в первом контуре
- $\mathcal{E}_{\text{вз}1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$ – ЭДС взаимной индукции в первом контуре (от второго контура)

$$dW = L_1 I_1 dI_1 + L_{12} I_1 dI_2 + L_2 I_2 dI_2 + L_{21} I_2 dI_1$$

Интегрируем по dI_1 и dI_2

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} \pm L_{\text{вз}} I_1 I_2$$

8. Получите выражение для ЭДС индукции, возникающей при движении проводника в магнитном поле.

При движении проводника вместе с ним движутся и свободные электроны. В магнитном поле на каждый заряд q действует магнитная составляющая силы Лоренца: $\vec{F}_{\text{лор}} = q[\vec{v}, \vec{B}]$

Создать индукционный ток может только

$$\vec{F}_{\text{стор}} = q v_y B_z$$

Работа этой силы при перемещении заряда вдоль проводника

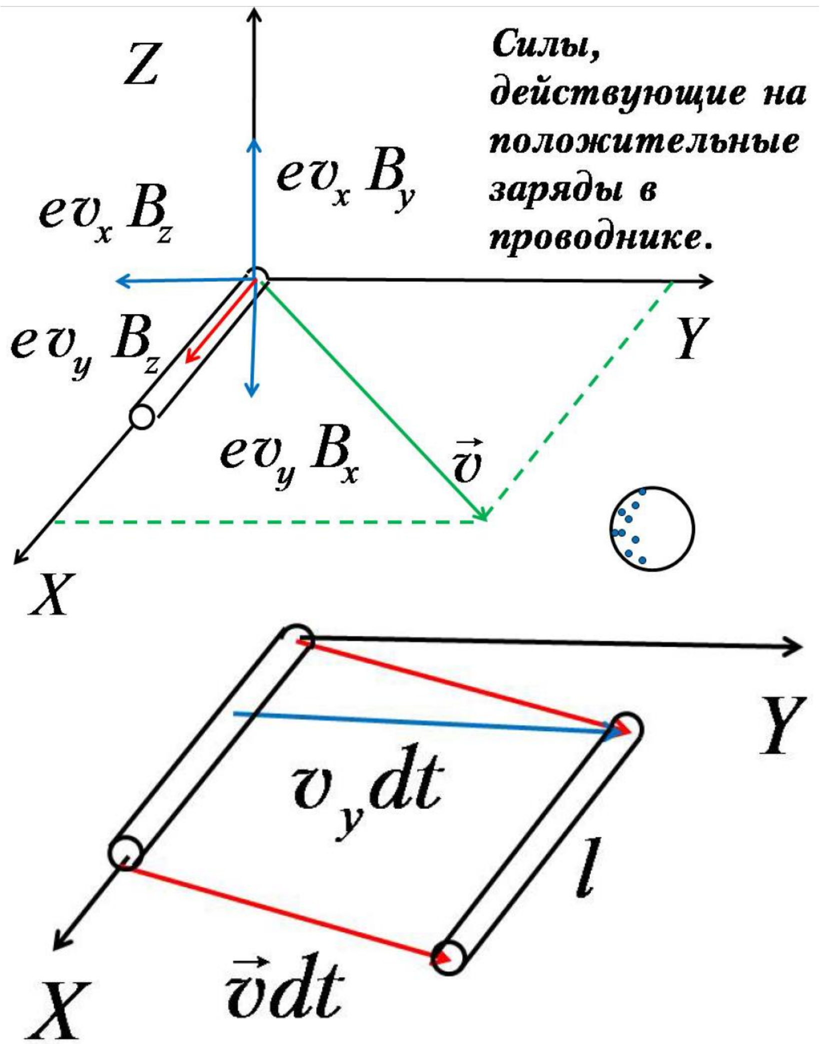
$$A_{\text{стор}} = l q v_y B_z$$

Площадь, зачерчиваемая проводником за время dt:

$$dS = l v_y dt \implies l v_y = \frac{dS}{dt}$$

ЭДС индукции в проводнике

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = l v_y B_z = B_z \frac{dS}{dt} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$$



9. Получите выражение для разности потенциалов, возникающей между концами проводника при движении в магнитном поле.

Ситуация как с билетом 8.

Под действием силы Лоренца электроны смещаются к одному концу проводника, создавая там избыточный минус, а на другом — плюс. Это порождает внутри проводника электростатическое поле $\vec{E}$. Перераспределение зарядов прекратится, когда электрическая сила уравновесит магнитную:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}, \vec{B}\right] = 0 \Rightarrow E = -v_y B_z$$

$$U = \Delta\varphi = \int E dl = El = v_y l B_z = B_z \frac{dS}{dt} = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|$$

10. Получите выражение для ЭДС индукции, возникающей в неподвижном контуре при изменении магнитного потока через него.

Контур стоит на месте, меняется только магнитное поле $\vec{B}$. Переменное магнитное поле создает **вихревое электрическое поле** $\vec{E}$.

Определение ЭДС: $\mathcal{E} = \frac{dA}{dq} = \oint_L \vec{E}d\vec{l}$ (работа по переносу заряда = циркуляция).

Магнитный поток через поверхность S, ограниченную контуром, равен $\Phi = \oint_S \vec{B}d\vec{S}$.

Закон Фарадея преобразуется как: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\oint_S \frac{d\vec{B}}{dt}d\vec{S}$.

Получается теорема о циркуляции вихревого электрического поля

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\oint_S \frac{d\vec{B}}{dt}d\vec{S}$$

11. Приведите примеры - когда наблюдается действие вихревого электрического поля, а когда потенциального. Запишите теорему о циркуляции электрического поля для обоих случаев.

Потенциальное электрическое поле (электростатическое)

Это поле, создаваемое неподвижными зарядами.

Примеры: поле вокруг заряженного металлического шара, поле внутри заряженного конденсатора, поле точечного заряда (электрона или протона).

Теорема о циркуляции: циркуляция по любому замкнутому контуру равна 0.

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Вихревое электрическое поле (индуцированное)

Это поле порождается изменяющимся во времени магнитным полем $\vec{B}$. Оно не связано напрямую с зарядами, его линии всегда замкнуты.

Примеры: ЭДС в обмотке трансформатора при работе, индукционный ток в кольце, над которым движется магнит, вихревые токи (токи Фуко) в массивных кусках металла.

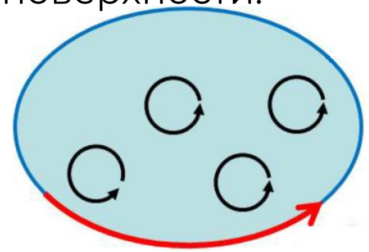
Теорема о циркуляции: циркуляция определяется законом Фарадея.

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\oint_S \frac{d\vec{B}}{dt}d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

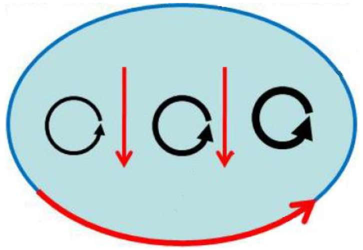
12. Дайте определение токов намагничивания. Что называют намагниченностью среды? Как в случае однородного изотропного магнетика связаны векторы $\vec{J}$, $\vec{H}$ и $\vec{B}$.

Токи намагничивания — это макроскопические токи, которые непрерывно изменяются в пространстве и создают макроскопическое магнитное поле в веществе (магнетике).

В однородном веществе микроскопические токи компенсируются и макроскопические токи текут по поверхности.



В неоднородном веществе макроскопические токи текут по поверхности и в объёме.



Намагниченность (вектор намагничивания) – магнитный момент единицы объёма.

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum_i \vec{p}_{mi} = n\langle\vec{p}_m\rangle = [{}^{\text{А}}/_{\text{м}}]$$

Где $\vec{p}_{mi}$ – магнитный момент молекулы, n – концентрация молекул, $\langle\vec{p}_m\rangle$ – средний мм.

Магнитная индукция $\vec{B} = [{}^{\text{А}}/_{\text{м}}]$(зависит от токов проводимости и намагничивания)

Напряженность магнитного поля $\vec{H} = [{}^{\text{А}}/_{\text{м}}]$(зависит только от токов проводимости)

12. Дайте определение токов намагничивания. Что называют намагниченностью среды? Как в случае однородного изотропного магнетика связаны векторы $\vec{J}$, $\vec{H}$ и $\vec{B}$.

Циркуляции

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0(I_\Sigma + I'_\Sigma), \qquad \oint_L \vec{J}d\vec{l} = I'_\Sigma, \qquad \oint_L \vec{H}d\vec{l} = I_\Sigma$$

Связи

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{J}\right)$$

$$\vec{J} = \chi\vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi)\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}$$

χ – магнитная восприимчивость среды (безразмерная величина)

$\mu = 1 + \chi$ – магнитная проницаемость среды (безразмерная величина)

13. Докажите теорему о циркуляции вектора $\vec{J}$.

Теорема о циркуляции (для дискретных токов, для непрерывных токов, в дифференциальной форме)

$$\oint_L \vec{J}d\vec{l} = I'_\Sigma, \qquad \oint_L \vec{J}d\vec{l} = \oint_S \vec{j}'d\vec{S}, \qquad rot\,\vec{J} = \vec{j}'$$

S – любая поверхность, натянутая на контур L,

I' – сумма токов намагничивания, $\vec{j}'$ – плотность токов намагничивания.

Доказательство

Вклад в циркуляцию внесут только токи, охватывающие контур.
Элемент контура dl охватит только молекулярные токи, центры которого попадают внутрь косого цилиндра объёмом

$$dV = S_m \cos\alpha\, dl$$

Магнитный момент молекулы $\langle\vec{p_m}\rangle = I_m\vec{S_m}$, $\vec{J} = n\langle\vec{p_m}\rangle$

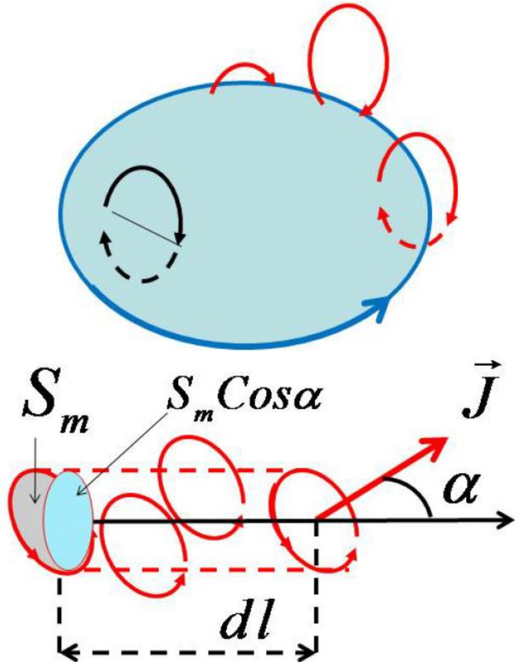
На элемент длины контура приходится ток намагничивания

$$dI' = I_m n dV = I_m S_m n \cos\alpha\, dl = \vec{J}d\vec{l}$$

Интегрируя по всему контуру $\oint_L dI' = I'_\Sigma = \oint_L \vec{J}d\vec{l}$

Используем $dI' = \vec{j}'d\vec{S}$, интегрируем $\oint_L dI' = \oint_S \vec{j}'d\vec{S} = \oint_L \vec{J}d\vec{l}$

По определению $\oint_L \vec{J}d\vec{l} = \oint_S rot\,\vec{J}\,d\vec{S} = \oint_S \vec{j}'d\vec{S}$, отсюда $rot\,\vec{J} = \vec{j}'$



14. Что называют магнитной проницаемостью среды. Расскажите о свойствах диа- и парамагнетиков.

Магнитная проницаемость μ — это безразмерная физическая величина, которая показывает, во сколько раз индукция магнитного поля в веществе ($\vec{B}$) отличается от индукции магнитного поля в вакууме ($\vec{B}_0 = \vec{H}$).

Для однородного вещества: $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}$.

Если $\mu > 1$, вещество усиливает внешнее магнитное поле. Если $\mu < 1$ – ослабляет.

Диамагнетики — это вещества, которые намагничиваются ***против направления*** внешнего магнитного поля.

При внесении во внешнее поле в атомах индуцируются дополнительные микротоки, магнитный момент которых по правилу Ленца направлен навстречу внешнему полю.

$$\chi < 0, \qquad \mu < 1, \qquad \vec{J} \upharpoonleft\downharpoonright \vec{H}$$

Диамагнетики выталкиваются из областей сильного магнитного поля в слабые.

Примеры: висмут, медь, вода, инертные газы, золото.

14. Что называют магнитной проницаемостью среды. Расскажите о свойствах диа- и парамагнетиков.

Парамагнетики — это вещества, которые намагничиваются ***по направлению*** внешнего магнитного поля.

Атомы парамагнетиков уже имеют собственные магнитные моменты (из-за спинов электронов или орбитального движения). В отсутствие поля они направлены хаотично из-за теплового движения. При включении поля моменты начинают ориентироваться вдоль него.

$$\chi > 0, \qquad \mu > 1, \qquad \vec{J} \upuparrows \vec{H}$$

Парамагнетики втягиваются в области сильного магнитного поля.

Примеры: алюминий, платина, кислород, вольфрам.

При нагревании намагниченность падает $\chi \sim \frac{1}{T}$.

15. Расскажите о свойствах ферромагнетиков. За счёт чего возникает гистерезис. Что называется температурой Кюри?

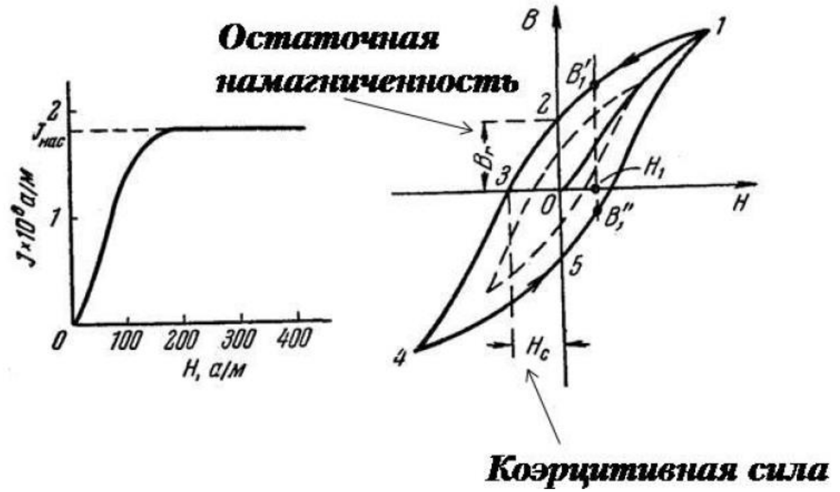
Ферромагнетики — это вещества (железо, никель, кобальт и прочие), обладающие спонтанной намагниченностью даже в отсутствие внешнего поля.

- **Магнитная проницаемость** μ переменна, достигает значений $10^3 - 10^5$, ферромагнетики усиливают внешнее поле в тысячи и миллионы раз.
- Внутри ферромагнетика есть микроскопические области (**домены**), которые уже намагничены до насыщения, но в обычном куске металла их векторы направлены хаотично.

Гистерезис (от греч. «запаздывание») — это явление зависимости намагниченности вещества от его «предыстории».

При включении внешнего поля H домены начинают разворачиваться. После выключения внешнего поля домены не возвращаются в исходной хаотическое состояние полностью, появляется остаточная намагниченность B_r.

Чтобы полностью размагнитить образец, нужно приложить поле противоположного направления — коэрцитивную силу H_c.

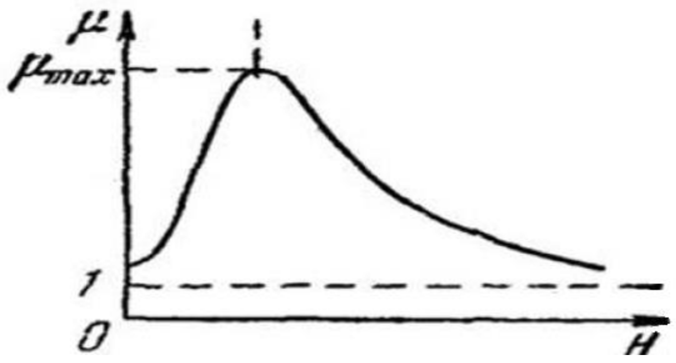


15. Расскажите о свойствах ферромагнетиков. За счёт чего возникает гистерезис. Что называется температурой Кюри?

Ферромагнитные свойства зависят от температуры.

При температурах выше **температуры Кюри** домены разрушаются – ферромагнетик становиться парамагнетиком (μ в тысячи раз меньше).

При охлаждении магнитные свойства восстанавливаются.

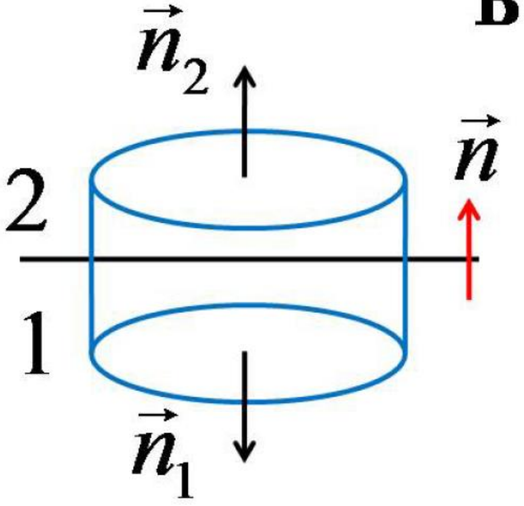


16. Получите формулы, описывающие преломление линий вектора $\vec{H}$ на границе двух магнетиков.

Теорема о циркуляции $\vec{H}$: $\oint_L \vec{H} d\vec{L} = I_\Sigma$.

Теорема Гаусса для $\vec{B}$: $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$.

Граничные условия для векторов B и H.

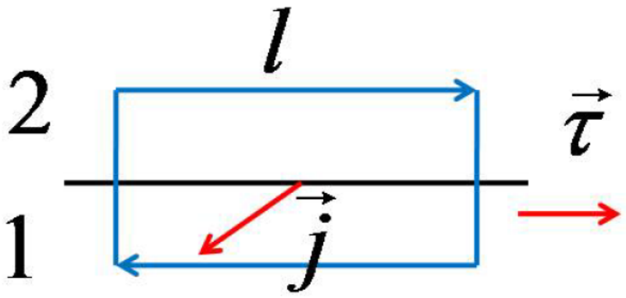


$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$B_{2n}S - B_{1n}S = 0$$

$$\boxed{B_{2n} = B_{1n}}$$

$$\boxed{\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}}$$



$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$$

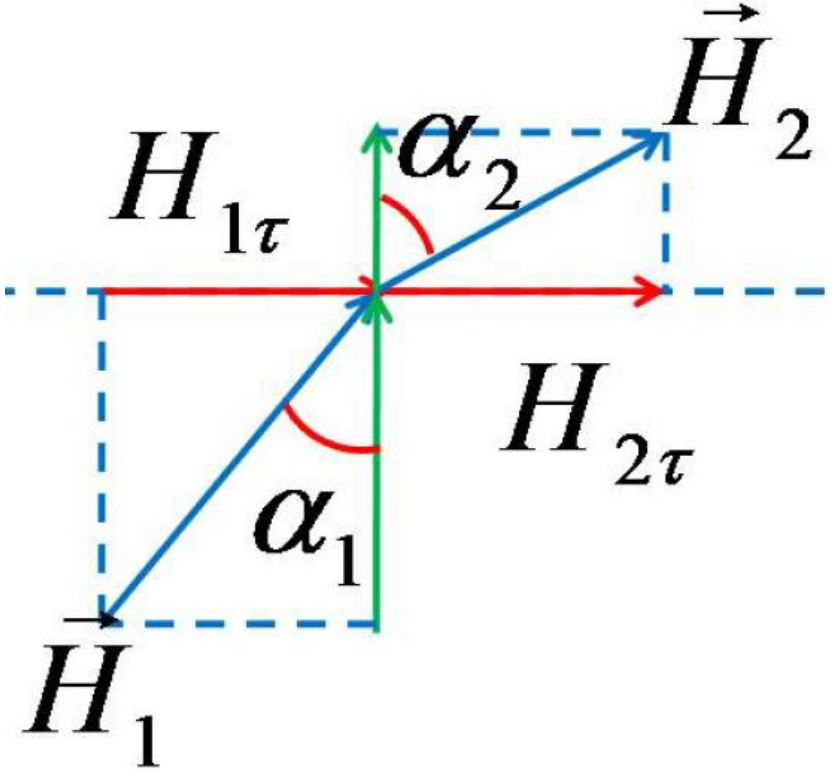
$$H_{2\tau} l - H_{1\tau} l = j_n S$$

Если токи проводимости не текут вдоль границы раздела сред

$$\boxed{H_{2\tau} = H_{1\tau}}$$

$$\boxed{\frac{B_{2\tau}}{\mu_2} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1}}$$

16. Получите формулы, описывающие преломление линий вектора $\vec{H}$ на границе двух магнетиков.



$$H_{2\tau} = H_{1\tau}$$

$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}$$

$$\boxed{\mu_2 = 2\mu_1}$$

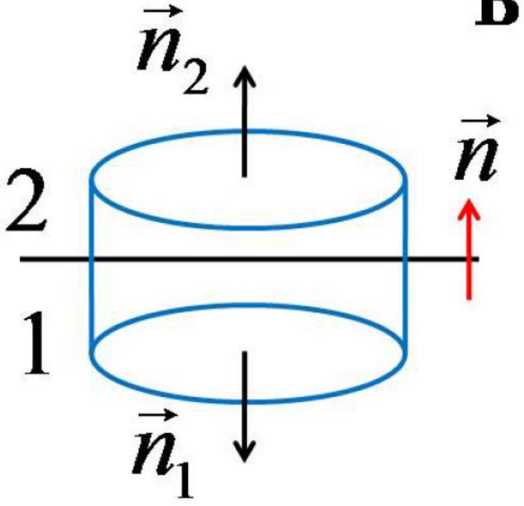
$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

17. Получите формулы, описывающие преломление линий вектора $\vec{B}$ на границе двух магнетиков.

Теорема о циркуляции $\vec{H}$: $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_\Sigma$.

Теорема Гаусса для $\vec{B}$: $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$.

Граничные условия для векторов B и H.

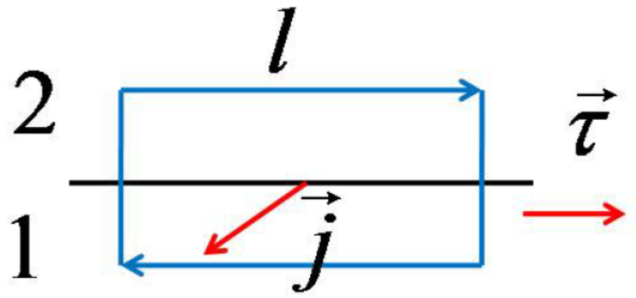


$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$B_{2n}S - B_{1n}S = 0$$

$$\boxed{B_{2n} = B_{1n}}$$

$$\boxed{\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}}$$



$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$$

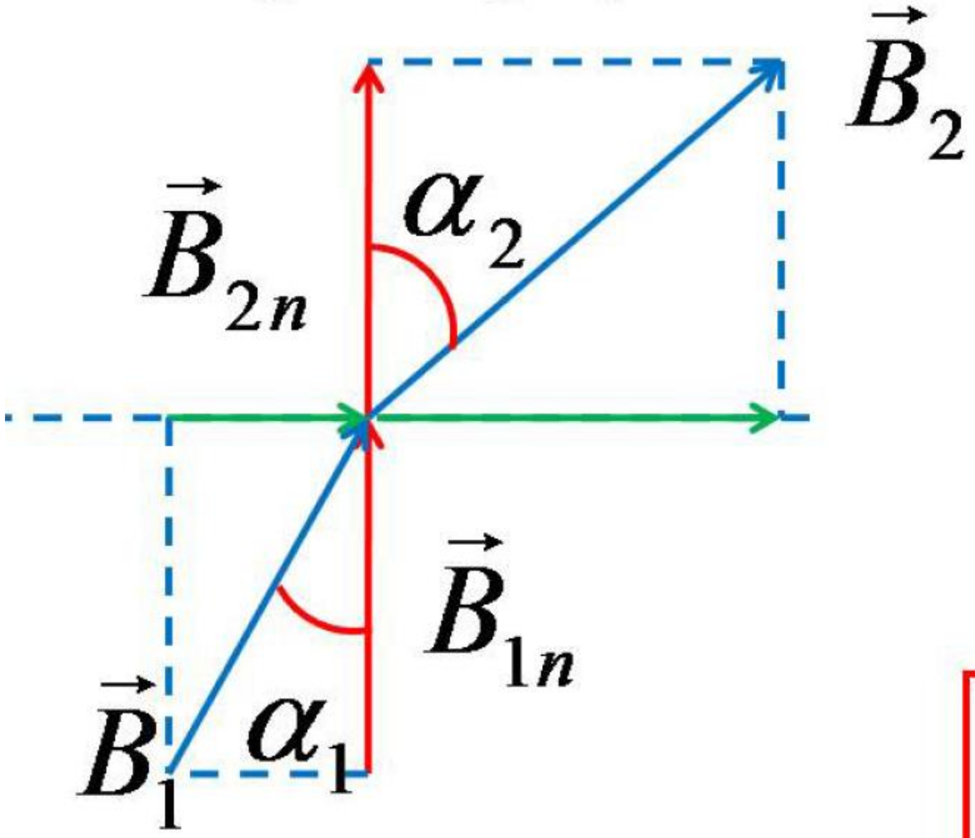
$$H_{2\tau} l - H_{1\tau} l = j_n S$$

Если токи проводимости не текут вдоль границы раздела сред

$$\boxed{H_{2\tau} = H_{1\tau}}$$

$$\boxed{\frac{B_{2\tau}}{\mu_2} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1}}$$

17. Получите формулы, описывающие преломление линий вектора $\vec{B}$ на границе двух магнетиков.



$$B_{2n} = B_{1n}$$

$$\frac{B_{2\tau}}{\mu_2} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1}$$

$$\boxed{\mu_2 = 2\mu_1}$$

$$\boxed{\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

18. Получите волновое уравнение для вектора $\vec{E}$.

1) Запишем теорему о циркуляции напряжённости электрического поля

$$rot\,\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Умножим векторно на

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = \nabla(\nabla\mathrm{\vec{E}}) - \nabla^2\mathrm{\vec{E}} = div\vec{E} - \Delta\vec{E} = 0 - \Delta\vec{E} = -\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad\Longrightarrow\quad \Delta\vec{E} = \nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B})\ (1)$$

2)Запишем теорему о циркуляции напряжённости магнитного поля

$$rot\,\vec{H} = \nabla\times\vec{H} = -\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Перейдём к $\vec{B}$ и $\vec{E}$

$$\frac{1}{\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon}\nabla\times\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,(2)$$

3) Подставим (2) в (1)

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Получаем волновое уравнение для вектора $\vec{E}$

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

19. Получите волновое уравнение для вектора $\vec{B}$.

1) Запишем теорему о циркуляции напряжённости магнитного поля

$$rot\,\vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Умножим векторно на

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla(\nabla \vec{\mathrm{H}}) - \nabla^2 \vec{\mathrm{H}} = div\vec{H} - \Delta\vec{H} = 0 - \Delta\vec{H} = \nabla \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Longrightarrow \Delta\vec{H} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{D})$$

Перейдём к $\vec{B}$ и $\vec{E}$

$$\Delta\vec{B} = -\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E}) \quad (1)$$

2)Запишем теорему о циркуляции напряжённости электрического поля

$$rot\,\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

3) Подставим (2) в (1)

$$\Delta\vec{B} = -\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Получаем волновое уравнение для вектора $\vec{E}$

$$\Delta B = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

20. Докажите, что плоская электромагнитная волна является поперечной.

Перепишем уравнения Максвелла для среды, где нет токов проводимости, в проекциях .

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0\dot{\vec{H}} \quad (1)$$

$$div\vec{E} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_X + \frac{\partial}{\partial y}E_Y + \frac{\partial}{\partial z}E_Z = 0 \quad (2)$$

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon_0\varepsilon\dot{\vec{E}} \quad (3)$$

$$div\vec{B} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}H_X + \frac{\partial}{\partial y}H_Y + \frac{\partial}{\partial z}H_Z = 0 \quad (4)$$

20. Докажите, что плоская электромагнитная волна является поперечной.

Будем рассматривать плоскую волну, которая распространяется вдоль оси X. Тогда $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и их проекции на Y и Z не могут зависеть от Y и Z. Производные от $\vec{E}$ и $\vec{H}$ по этим координатам будут равны нулю. Правый столбик уравнений перепишем в проекциях. Точкой обозначена производная по времени

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0\dot{\mathrm{H}} \quad (1)$$

Проекция на ось x $\quad \cancel{\dfrac{\partial E_z}{\partial y}} - \cancel{\dfrac{\partial E_y}{\partial z}} = -\mu\mu_0\dot{H}_X \longrightarrow 0 = \mu\mu_0\dot{H}_X$

Проекция на ось y $\quad -\dfrac{\partial E_Z}{\partial x} + \cancel{\dfrac{\partial E_X}{\partial z}} = -\mu\mu_0\dot{H}_Y \longrightarrow -\dfrac{\partial E_Z}{\partial x} = -\mu\mu_0\dot{H}_Y$

Проекция на ось z $\quad \dfrac{\partial E_Y}{\partial x} - \cancel{\dfrac{\partial E_X}{\partial y}} = -\mu\mu_0\dot{H}_Z \longrightarrow \dfrac{\partial E_Y}{\partial x} = -\mu\mu_0\dot{H}_Z$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_X + \cancel{\frac{\partial}{\partial y}}E_Y + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}}E_Z = 0 \ (2) \longrightarrow \frac{\partial E_X}{\partial x} = 0$$

20. Докажите, что плоская электромагнитная волна является поперечной.

Точно так же преобразуем уравнения (3) и(4). Останется 8 уравнений про проекции. Рассмотрим, что они показывают

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow 0 = \mu\mu_0 \dot{H}_X$$

$$-\frac{\partial E_Z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dot{H}_Y$$

$$\frac{\partial E_Y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dot{H}_Z$$

$$div\vec{E} = 0 \longrightarrow \frac{\partial E_X}{\partial x} = 0$$

$$0 = \varepsilon\varepsilon_0 \dot{E}_X \longleftarrow rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial H_Z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \dot{E}_Y$$

$$\frac{\partial H_Y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \dot{E}_Z$$

$$\frac{\partial H_X}{\partial x} = 0 \longleftarrow div\vec{B} = 0$$

E_X *и* H_X ***не зависят ни от X, ни от t. В переменном поле волны они равны нулю.*** $\vec{E}$ *и* $\vec{H}$ ***перпендикулярны направлению распространения волны. Поэтому волна ПОПЕРЕЧНАЯ.*** $\vec{E}$ *и* $\vec{H}$ ***перпендикулярны*** $\vec{V}$

21. Установите связь между амплитудами напряжённости электрического поля и напряжённости магнитного поля в плоской электромагнитной волне.

Комплексная форма записи уравнения волны (плоской монохроматической электромагнитной).

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} e^{i\left(\omega t - \overrightarrow{k\vec{r}}\right)}$$
$$\vec{H} = \overrightarrow{H_0} e^{i\left(\omega t - \overrightarrow{k\vec{r}}\right)}$$

Где $\overrightarrow{E_0}$ и $\overrightarrow{H_0}$ —комплексные амплитуды, ω — циклическая частота, $\vec{k}$ — волновой вектор. Физический смысл имеет только действительная часть этого выражения (Re).

При использовании такой записи дифференцирование по времени и координатам сводится к простым алгебраическим операциям.

Производная по времени: $\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$,оператор набла (градиент): $\nabla \to -i\vec{k}$

Пара уравнений Максвелла

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \qquad -i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega\mu\mu_0\vec{H}$$
$$rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \qquad -i\vec{k} \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

Из правых уравнений следует **зависимость амплитуд** $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$

22. Комплексное представление электромагнитной волны. Запись уравнений Максвелла для такой волны.

Комплексная форма записи уравнения волны (плоской монохроматической электромагнитной).

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} e^{i\left(\omega t - \overrightarrow{k\vec{r}}\right)}$$
$$\vec{H} = \overrightarrow{H_0} e^{i\left(\omega t - \overrightarrow{k\vec{r}}\right)}$$

Где $\overrightarrow{E_0}$ и $\overrightarrow{H_0}$— комплексные амплитуды, ω — циклическая частота, $\vec{k}$ — волновой вектор. Физический смысл имеет только действительная часть этого выражения (Re).

При использовании такой записи дифференцирование по времени и координатам сводится к простым алгебраическим операциям.

Производная по времени: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$, оператор набла (градиент): $\nabla \rightarrow -i\vec{k}$

Система уравнений Максвелла

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad -i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega\mu\mu_0\vec{H}$$
$$rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad -i\vec{k} \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$
$$div\,\vec{D} = 0, \qquad -i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$
$$div\,\vec{\mathrm{B}} = 0, \qquad -i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

22. Вектор Умова-Пойнтинга.

Вектор Умова-Пойнтинга $\vec{S}$ — это векторная физическая величина, характеризующая перенос энергии электромагнитным полем и равная плотности потока энергии электромагнитной волны.

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] = [\text{Вт/м}^2]$$

Плотность потока энергии электромагнитного поля

$$\omega = \omega_{\text{э}} + \omega_{\text{М}} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}^2 + \mu\mu_0\vec{H}^2}{2}$$

Уравнение Максвелла $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ умножим на $\vec{H}$: $\quad \vec{H}\cdot rot\,\vec{E} = -\mu_0\mu\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$

Уравнение Максвелла $rot\,\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ умножим на $\vec{E}$: $\quad \vec{E}\cdot rot\,\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Токов проводимости нет, неподвижный объём V, ограниченный неподвижной поверхностью Ω. Рассмотрим изменение по времени.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\omega_{\text{э}} + \omega_{\text{М}})}{dt} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\frac{d\vec{E}}{dt} + \mu\mu_0\vec{H}\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{E}\cdot rot\,\vec{H} - \vec{H}\cdot rot\,\vec{E} = -div[\vec{E}, \vec{H}]$$

$$div\,\vec{S} = -\frac{d\omega}{dt}$$

В интегральной форме $\oint_\Omega s_n d\Omega = -\frac{d}{dx}\int_V \omega dV$ – описывает утечку энергии через поверхность за счёт излучения.

$$\vec{k} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\omega}{H^2}\vec{S}$$

Заключение

Автор

Сакулин Иван Михайлович К3221

Распространяется по лицензии **WTFPL**

Отказ от ответственности

Автор предоставляет собственные доказательства «как есть», не даёт гарантий их правильности и не несёт ответственности за допущенные ошибки. Мяу =).