Лекция 2.

Теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме.

Запишем теорему Остроградского-Гаусса в интегральной форме.

$$\oint_S E_n dS = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

Устремим dV к нулю.(Выберем объём V таким малым, чтобы объёмную плотность заряда внутри него можно было считать постоянной).Выражение(1) примет вид:

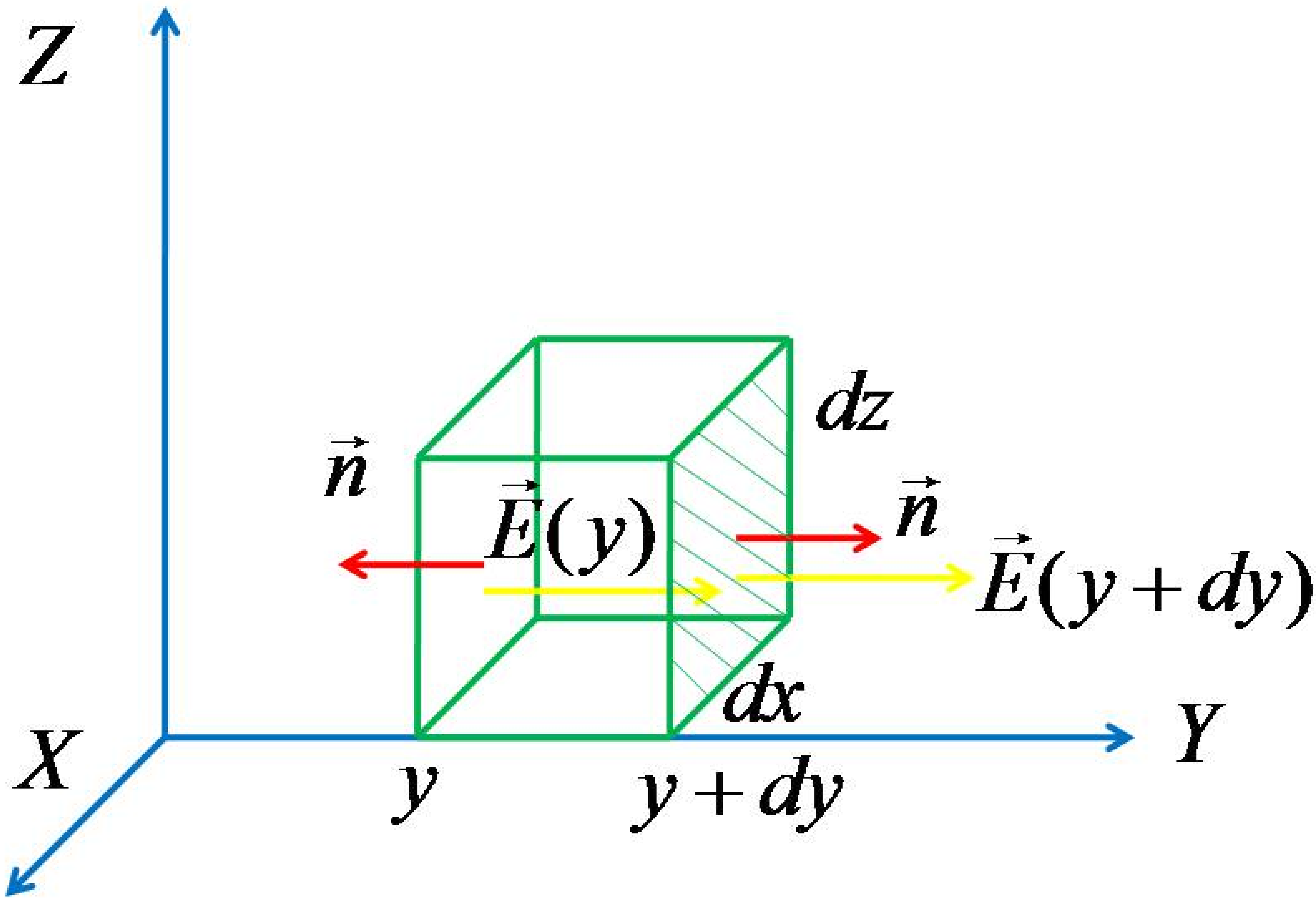
$$\lim_{dV \to 0} \frac{1}{dV} \oint_S E_n dS = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

Здесь левую и правую части уравнения разделили на dV.

Зафиксируем Ex и Ez. Вычислим левую часть (2).

$$\frac{1}{dxdydz}(E_y(y+dy) - E_y(y))dxdz = \frac{\partial E_y}{\partial y}$$

Знак частной производной указывает на то, что Ex и Ez зафиксированы .



Z
$\vec{n}$
$\vec{E}(y)$
dz
$\vec{n}$
$\vec{E}(y+dy)$
dx
X
Y
y
$y+dy$

Зафиксировав Ey и Ez, получим для левой части

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

Зафиксировав Ex и Ey, получим для левой части

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

В общем случае (если изменяются и Ex, и Ey, и Ez) для левой части (2) получим

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Стоящее слева выражение получило название **дивергенции вектора** Е. Её можно записать как скалярное произведение векторного дифференциального оператора набла на вектор напряженности электрического поля Е.

$$\nabla\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\vec{E} = div\vec{E}$$

Окончательный вариант записи теоремы Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Это выражение показывает, что источниками линий напряжённости электрического поля являются положительные электрические заряды ($\rho>0$), *а стоками- отрицательные заряды* ($\rho<0$).

Границы применимости теоремы Гаусса.

В электростатике теорема Гаусса является следствием закона Кулона, но нам необходимо найти такие уравнения, которые будут справедливы не только в электростатике, но и в электродинамике. Эти законы должны исключать возможность мгновенного действия на расстоянии. Закон Кулона этому требованию не удовлетворяет.

Он может быть справедлив только в электростатике. Закон Кулона только достаточен, но не необходим, для доказательства теоремы Гаусса. Справедливость её в электродинамике можно установить только на опыте. Вся совокупность опытных фактов подтверждает это. Таким образом, теорема Гаусса перестаёт быть скромным следствием из закона Кулона и и становится одним из основных постулатов теории электричества.

Теорема Гаусса входит в систему основных уравнений Максвелла.
Теорема Гаусса в дифференциальной форме является локальной теоремой.
Она связывает **ρ** *и div* **E** *в одной и той же точке пространства.*
Теорема Гаусса в интегральной форме устанавливает связь между физическими величинами в сколь угодно далёких точках пространства в один и тот же момент времени, но это не означает, что взаимодействие

распространяется мгновенно. С электрическим зарядом всегда связано электрическое поле. Поле неограниченно долго покоящегося заряда всегда кулоново на любых расстояниях. Но если заряд ускоренно движется, то он излучает электромагнитные волны. Однако поток вектора **E** *через любую замкнутую поверхность, окружающую одни и те же заряды, не зависит от формы и положения этой поверхности и от характера движения зарядов.*

Пример. *Напряженность электрического поля задана уравнением:* $\vec{E} = A(3x\vec{i} + y^2\vec{j} + z\vec{k})$ *А- постоянная величина. Вычислите объёмную плотность электрического заряда в точке с координатами (1,2,3)*

Решение. *Воспользуемся теоремой Гаусса в дифференциальной форме и вычислим дивергенцию напряженности электрического поля в указанной точке.*

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 3A + 2Ay + A$$

В указанной точке $y = 2$

$$div\vec{E} = 8A = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

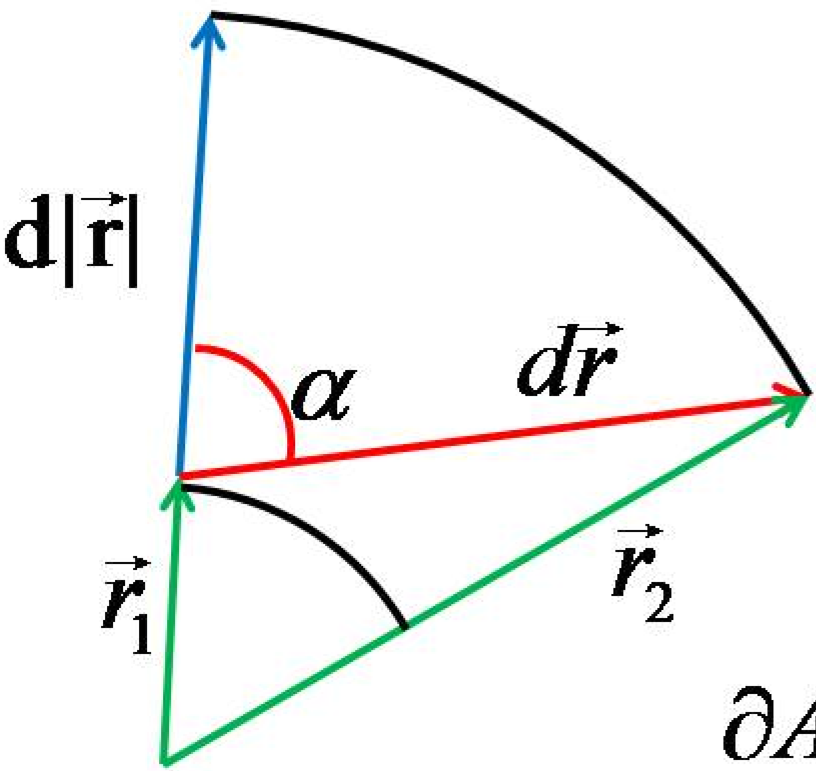
$$\rho = 8A\varepsilon_0$$

Поле консервативных сил.

Консервативным *называется поле, работа сил которого при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 не зависит от пути, а определяется только начальными и конечными координатами. (Если работа сил поля зависит только от координат и от времени, то такое поле называют* ***потенциальным****)*

- *Если силы поля не зависят от времени, то такое поле называют* ***стационарным****. Поле стационарное в одной системе отсчёта может оказаться нестационарным в другой.*

Докажем на примере электростатического поля, что все центральные силы являются консервативными.



Центральная сила может быть представлена в виде:

$$\vec{F} = \pm F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\partial A = \vec{F}d\vec{r} = F_r d|\vec{r}| = F_r dr$$

$$|d\vec{r}|\cdot \mathrm{Cos}\,\alpha = \mathrm{d}|\vec{\mathrm{r}}|$$

$$\partial A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot q_{пробн}}{|\vec{r}|^2}dr$$

$$A = \int_1^2 \partial A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \cdot q_{пробн}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{A = W_1 - W_2}$$

W-величина, зависящая только от r, получила название потенциальной энергии.

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \cdot q_{пробн}\frac{1}{r} + const$$

W определена с точностью до независящей от r постоянной.

Если q-точечный заряд, то разумно предположить, что W(∞)=0. Поле точечного заряда не может совершать работу при перемещении бесконечно удалённых зарядов. $const = 0$

$$W_{\substack{точечного \\ зароядa}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \cdot q_{пробн} \frac{1}{r}$$

Потенциал.

Вынесем за скобку пробный заряд - останется величина, характеризуюшая поле, - потенциал φ.

$$W = q_{пробн}\varphi \qquad [\varphi] = вольт$$

Потенциал - энергетическая характеристика поля.

$$\boxed{\varphi_{\substack{точечного\\заряда}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{1}{r}}$$

$$\boxed{A_{\text{сил поля}} = q_{\text{пробн}}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Это определение потенциала.

Иногда говорят, что значение потенциала в данной точке численно равно работе сил поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в ту точку, где значение потенциала принято за нуль. Это правильно. Но надо понимать, что из-за произвола при выборе постоянной такой точки может и не быть.

Принцип суперпозиции потенциала.

$$\boxed{\varphi = \sum_i \varphi_i}$$

Принцип суперпозиции потенциала является следствием адитивности работы.

Как связаны между собой сила и потенциальная энергия, напряжённость и потенциал?

$$\partial A = F_r dr = -dW \qquad F_r = \frac{-dW}{dr}$$

В декартовых координатах

$$\partial A = (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) =$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z\,dz = -dW$$

$$F_x = \frac{-\partial W}{\partial x}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\vec{k} \right) =$$

$$= -\nabla W = -gradW$$

Здесь векторный дифференциальный оператор набла

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right)$$

Напряжённость поля и силу поля можно вычислить, зная потенциал

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi = -grad\varphi}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla W = -gradW}$$

Потенциал и разность потенциалов можно вычислить, зная напряжённость поля

$$\boxed{\varphi = -\int E_r dr}$$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{r1}^{r2} E_r dr}$$

Силовое поле можно задать двумя способами:

1) Указать значение потенциала в каждой точке

$$\vec{E} = -(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}) = -grad\varphi$$

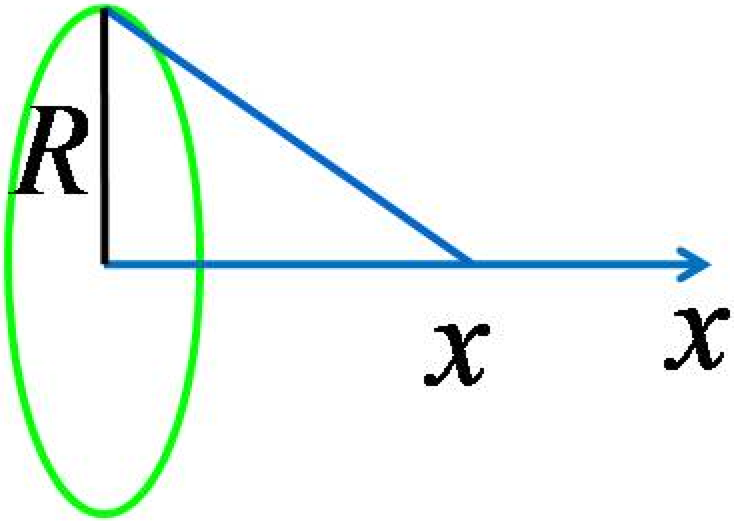
2) Указать значение напряжённости в каждой точке

$$\varphi = -\int E_r dr$$

Примеры решения задач.

Пример. *Кольцо радиусом R заряжено равномерно с линейной плотностью заряда τ. Вычислите напряжённость электрического поля на оси кольца.*

Решение. *Вычислим потенциал на оси кольца по принципу суперпозиции.*



$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{2\pi R\tau \cdot 2x}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{R\tau x}{2\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Ранее такой же результат мы получали методом интегрирования по принципу суперпозиции напряжённости.

Пример. *Шар радиусом R заряжен равномерно с объёмной плотностью заряда ρ. Вычислите потенциал электростатического поля как функцию расстояния r от центра шара.*

Решение. *По теореме Гаусса вычислим напряжённость электрического поля внутри и вне шара.*

r<R

$$E_{\mathrm{I}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

r>R

$$E_{II} = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}$$

Воспользуемся тем, что. $\varphi = -\int E_r dr$

В области r>R

$$\varphi_{II} = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + const_2$$

Эту постоянную разумно принять за нуль. Силы поля шара не совершают работы при перемещении бесконечно удалённых зарядов.

В области r<R

$$\varphi_I = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r dr = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + const_1$$

Потенциал не может скачком измениться на границе шара. При бесконечно малом переходе через границу поле не может совершить конечную работу. Необходимо "сшить" потенциал на границе шара.

$$\varphi_1(r = R) = \varphi_2(r = R)$$

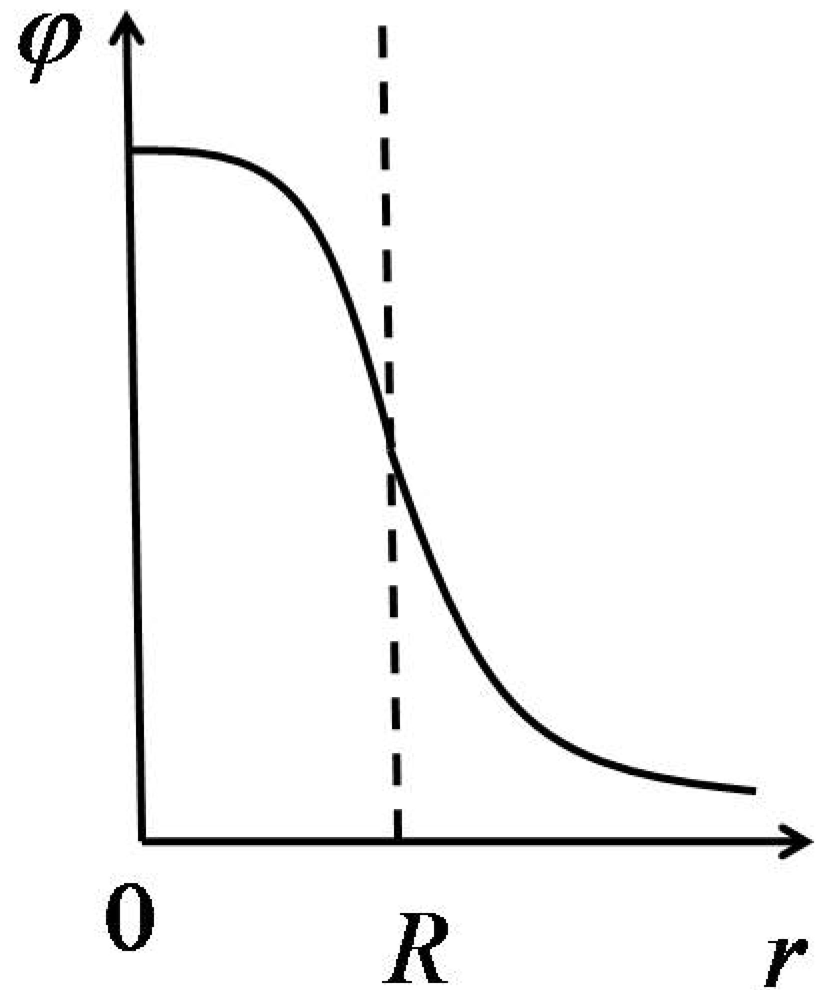
$$\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{R} = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + const_1$$

$$const_1 = \frac{1}{2}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}$$

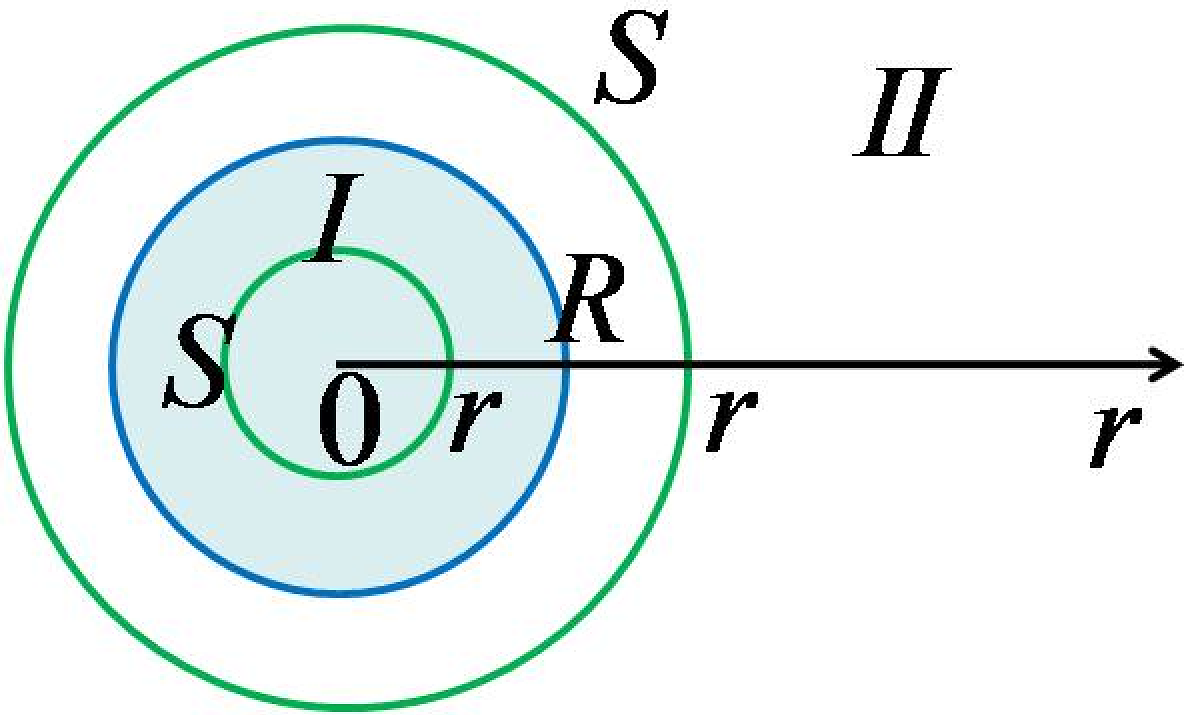
Ответ:

$$\varphi_I = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi_{II} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$



Пример. *По поверхности сферы радиусом R распределён заряд q. Вычислите потенциал поля сферы как функцию расстояния r до её центра.*



Воспользуемся теоремой Гаусса. В качестве гауссовой поверхности выберем сферу.

$$\oint_S E_n dS = \frac{q_{\text{охваченный}}}{\varepsilon_0}$$

$$1)\, r < R$$

$$E_{\mathrm{I}} 4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

Внутри сферы заряда нет.

$$E_{\mathrm{I}} = 0$$

$$2)\, r > R$$

$$\oint_S E_n dS = \frac{q_{\text{охваченный}}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{\text{п}} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Вычисляем потенциал.

$$r > R$$

$$\varphi = -\int E_r dr$$

$$\varphi_{II} = -\int \frac{1}{4\pi r^2}\frac{q}{\varepsilon_0}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$r < R$$

$$\varphi_I = 0 + const_1$$

"Сшиваем" потенциал.

$$\varphi_I(r=R)=\varphi_{II}(r=R)$$

$$const_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

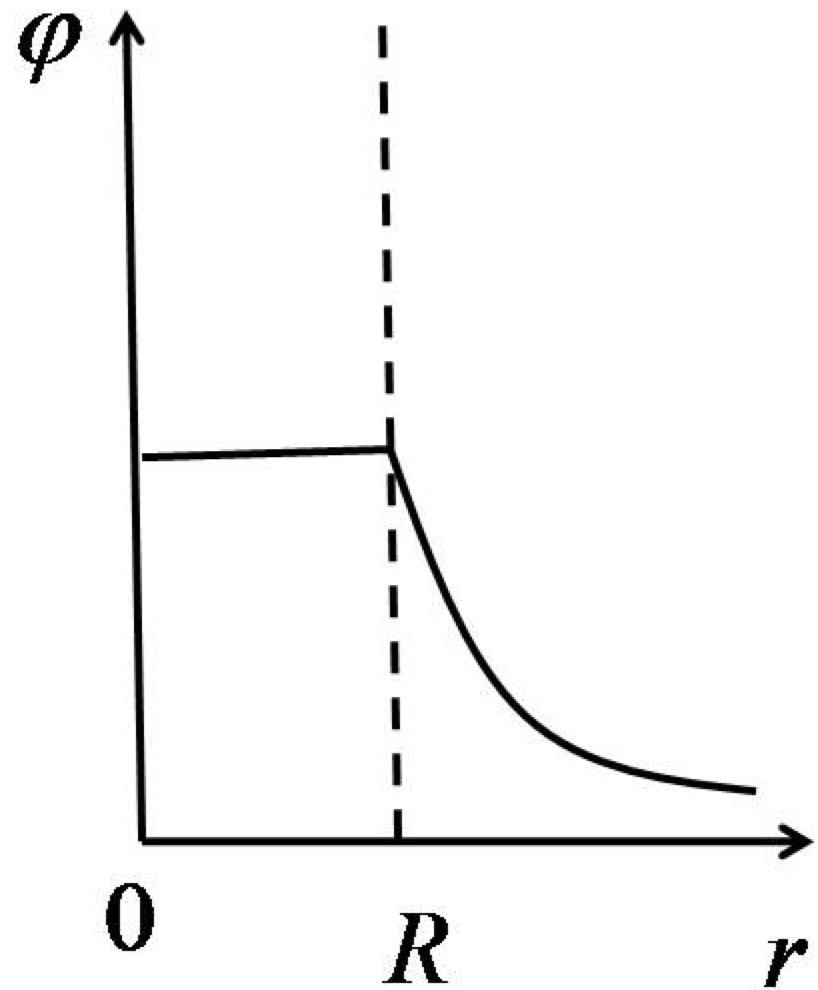
Ответ:

$$\varphi_I=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

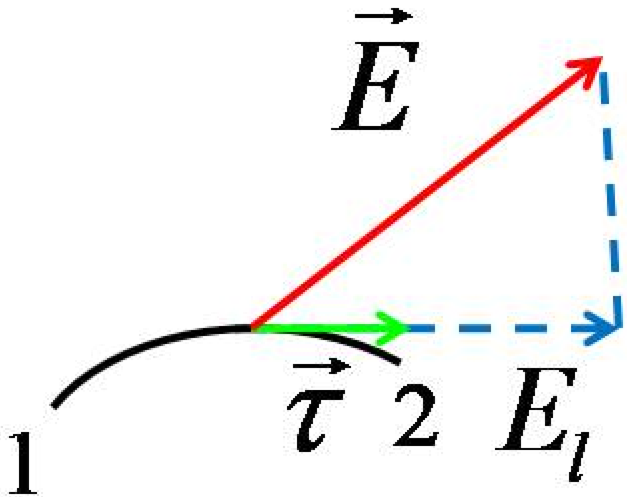
$$\varphi_{II}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$\varphi_{I} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

$$\varphi_{II} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$



Циркуляция вектора напряженности электрического поля.



Циркуляция вектора по контуру

$$\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l} = \int_1^2 E_l\,dl$$

τ-*касательная к контуру*

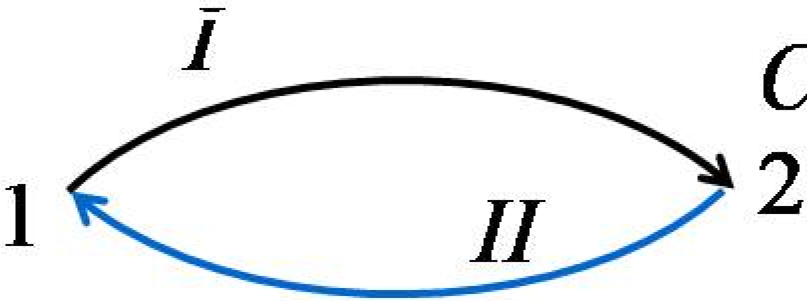
Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля.

$$\boxed{\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = 0}$$

Кружок на знаке интеграла показывает, что интеграл вычисляется по замкнутому контуру.

Доказательство. *Вычислим работу сил поля по перемещению пробного заряда по замкнутому контуру, разбив этот контур на два участка.*

$$A = q_{пробн}\left(\int\limits_{1I2} \vec{E}\,d\vec{l} + \underline{\int\limits_{2II1} \vec{E}\,d\vec{l}} \right)$$



Силы электростатического поля *<u>консервативны</u>*.

$$\int\limits_{2II1} \vec{E}\,d\vec{l} = -\int\limits_{1II2} \vec{E}\,d\vec{l} = \underline{-\int\limits_{1I2} \vec{E}\,d\vec{l}}$$

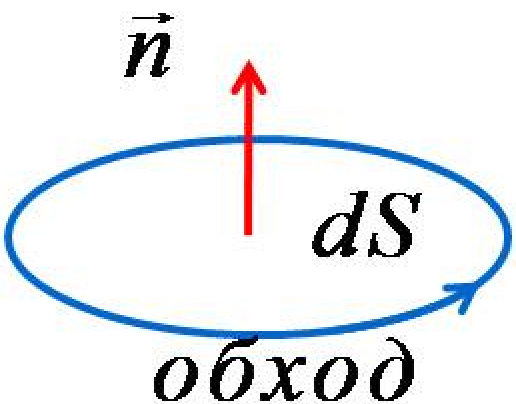
$$A = 0$$

Следствие

Силовые линии электростатического поля ***не могут быть замкнуты****, иначе, двигаясь всё время вдоль силовой линии, получим*

$$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} \neq 0$$

Теорема о циркуляции вектора напряжённости электрического поля в дифференциальной форме.



Направление обхода контура и направление нормали связаны по правилу правого винта.

Вычислим предел отношения циркуляции вектора **E** *по контуру к площади контура.*

$$\lim_{dS \to 0} \frac{\oint\limits_{l} E_l dl}{dS} = \left(rot\vec{E} \right)_n$$

Предел равен проекции некоторого вектора на направление нормали к контуру.

Вектор этот получил название ротор или вихрь вектора $\vec{E}$

$$rot\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix}$$

Ротор любого поля консервативных сил равен нулю. *Например, для электростатического поля* $\boxed{rot\vec{E} = 0}$

Если ротор отличен от нуля, то такое поле называют ***вихревым***.

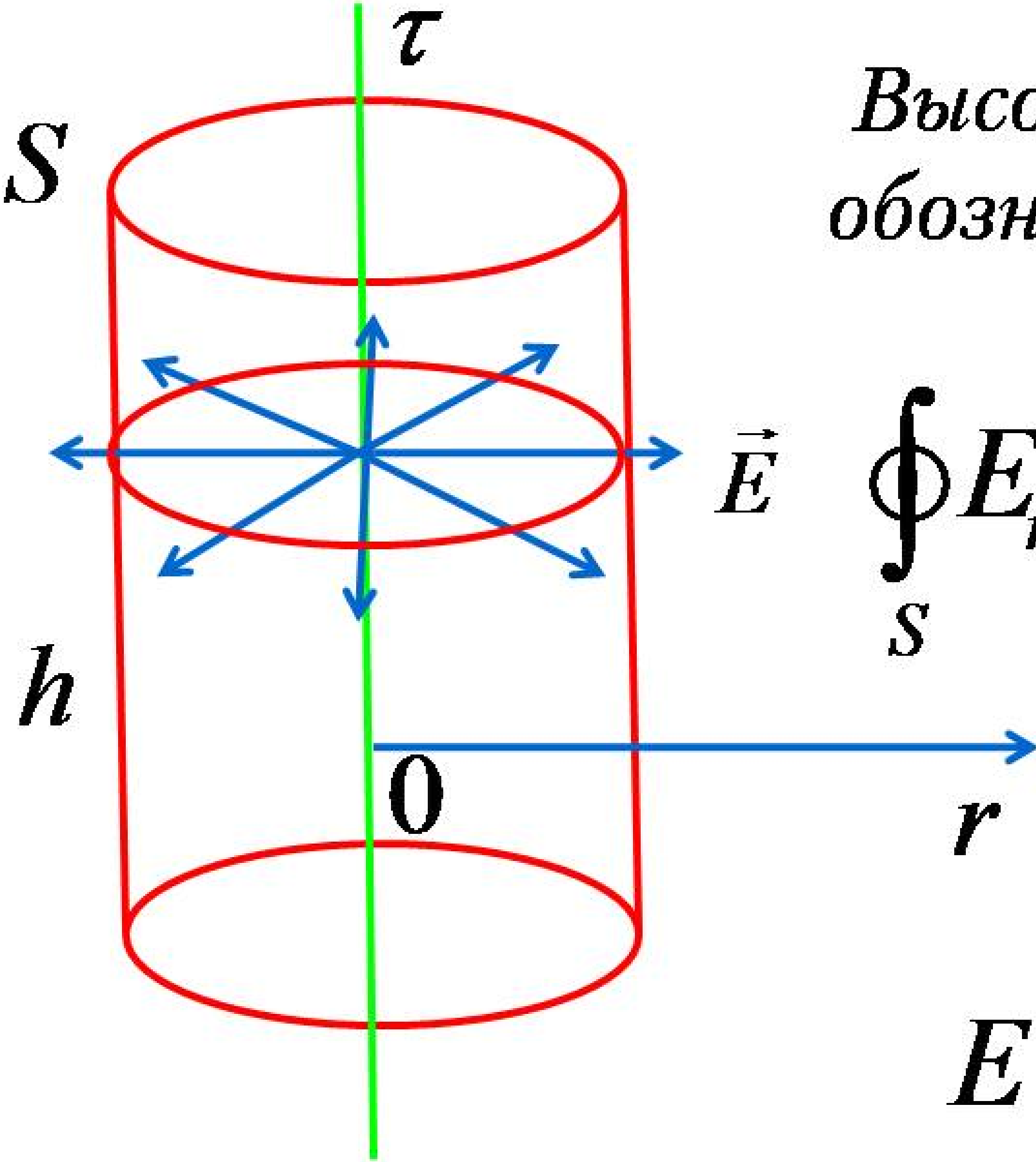
Примеры решения задач.

Пример. *Бесконечная нить, заряжена равномерно с линейной плотностью заряда* τ. *Вычислите напряженность и потенциал поля нити как функцию расстояния r от неё*.

Решение. *Выбирая гауссову поверхность мы стремимся добиться того, чтобы было выполнено условие*

$$E_n = E$$

В данном случае удобной для вычислений гауссовой поверхностью будет цилиндр, ось которого совпадает с нитью.



Высоту цилиндра обозначим через h.

$$\oint_S E_n dS = \frac{q_{охваченный}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\tau \cdot h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\tau}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi r}$$

Вычисляем потенциал

$$\varphi = -\int E_r dr$$

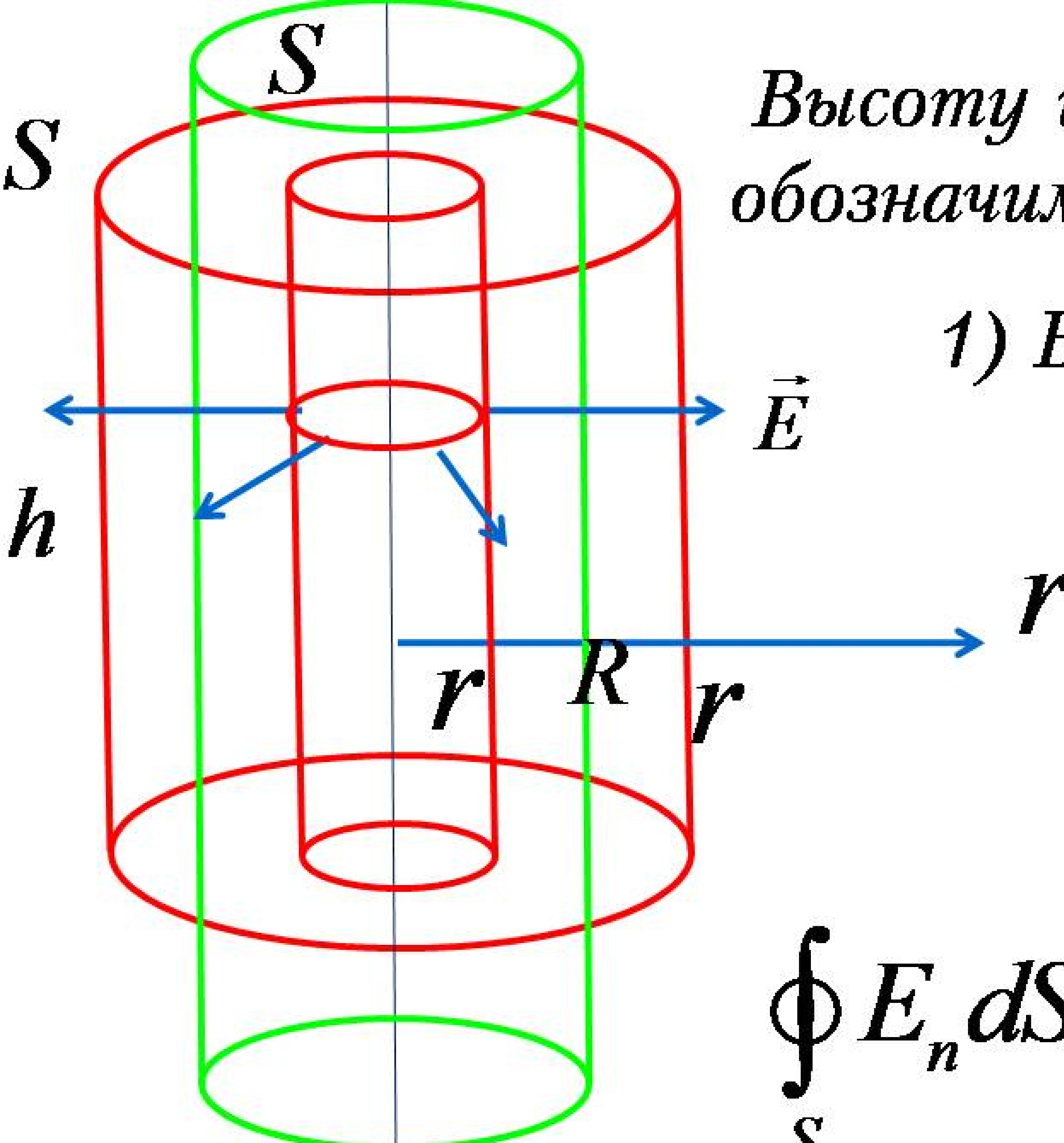
$$\varphi = -\int \frac{\tau}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi r} dr = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln r$$

Пример. *Бесконечный цилиндр, радиусом R, заряжен с поверхностной плотностью заряда σ . Вычислите напряженность и потенциал поля цилиндра как функцию расстояния r от его оси.*

***Пример**. Бесконечный цилиндр, радиусом R заряжен равномерно с объёмной плотностью заряда ρ . Вычислите напряженность и потенциал поля цилиндра как функцию расстояния r от его оси.*

***Решение**. Выбирая гауссову поверхность мы стремимся добиться того, чтобы было выполнено условие* $E_n = E$

В данном случае удобной для вычислений гауссовой поверхностью будет цилиндр, ось которого совпадает с осью бесконечного цилиндра.



Высоту цилиндра обозначим через h.

1) В области

$$r < R$$

$$\oint_S E_n dS = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}$$

$$E_I \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\rho \cdot \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_I = \frac{\rho \cdot r}{2\varepsilon_0}}$$

2) *В области* r > R

$$\oint_S E_n \, dS = \frac{\int_V \rho \, dV}{\varepsilon_0}$$

$$E_{II} \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\rho \cdot \pi R^2 h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_{II} = \frac{\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_0 \cdot r}}$$

Вычисляем потенциал

$$\varphi = -\int E_r dr$$

Здесь нам придётся определять постоянные. Поскольку заведомо нет такой точки, где разумно было бы считать потенциал равным нулю (как в задаче с шаром), будем стремиться максимально упростить вычисления. Ниже приведены два самых простых варианта решения.

1) В области $r > R$

$$\boxed{E_{II} = \frac{\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_0 \cdot r}}$$

$$\varphi_{II} = -\int \frac{\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_0 \cdot r} dr =$$

$$= -\frac{\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_0} \ln r + const_{II}$$

1) В области $\mathbf{r < R}$

$$\boxed{E_I = \frac{\rho \cdot r}{2\varepsilon_0}}$$

$$\varphi_I = -\int \frac{\rho \cdot r}{2\varepsilon_0} dr =$$

$$= -\frac{\rho \cdot r^2}{4\varepsilon_0} + const_I$$

Первый способ выбора постоянных

Пусть $const_{II} = 0$

Вычислять придётся только $const_{I}$

"Сшиваем" потенциал.

$$\varphi_I(r = R) = \varphi_{II}(r = R)$$

$$-\frac{\rho \cdot R^{2}}{4\varepsilon_{0}} + const_{I} = -\frac{\rho \cdot R^{2}}{2\varepsilon_{0}} \ln R$$

$$const_{I} = -\frac{\rho \cdot R^{2}}{2\varepsilon_{0}} \ln R + \frac{\rho \cdot R^{2}}{4\varepsilon_{0}}$$

Ответ:

$$\varphi_I = -\frac{\rho \cdot r^2}{4\varepsilon_0} - $$

$$-\frac{\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_0}\ln R + \frac{\rho \cdot R^2}{4\varepsilon_0}$$

$$\varphi_{II} = -\frac{\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_0}\ln r$$

Второй способ выбора постоянных

Пусть потенциал равен нулю на границе цилиндра, тогда придётся вычислять обе постоянные, но это будет очень легко сделать.

$$\varphi_I = -\frac{\rho \cdot r^2}{4\varepsilon_0} + const_I =$$

$$= -\frac{\rho \cdot r^2}{4\varepsilon_0} + \frac{\rho \cdot R^2}{4\varepsilon_0}$$

$$\varphi_{П} = -\frac{\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_0}\ln r + const_{П} =$$

$$= -\frac{\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_0}\ln r + \frac{\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_0}\ln R$$

Пример. *Бесконечный цилиндр, радиусом R заряжен с объёмной плотностью заряда* $\rho = A/r$. *Вычислите напряженность и потенциал поля цилиндра как функцию расстояния r от его оси.*

Пример. *Плоскость заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда* σ . *Вычислите напряженность и потенциал поля плоскости как функцию расстояния от неё* x.

Пример. *Две плоскости заряжены равномерно с поверхностной плотностью заряда* σ *и*-σ. *Вычислите напряженность и потенциал поля плоскостей как функцию расстояния х от середины расстояния между ними* .

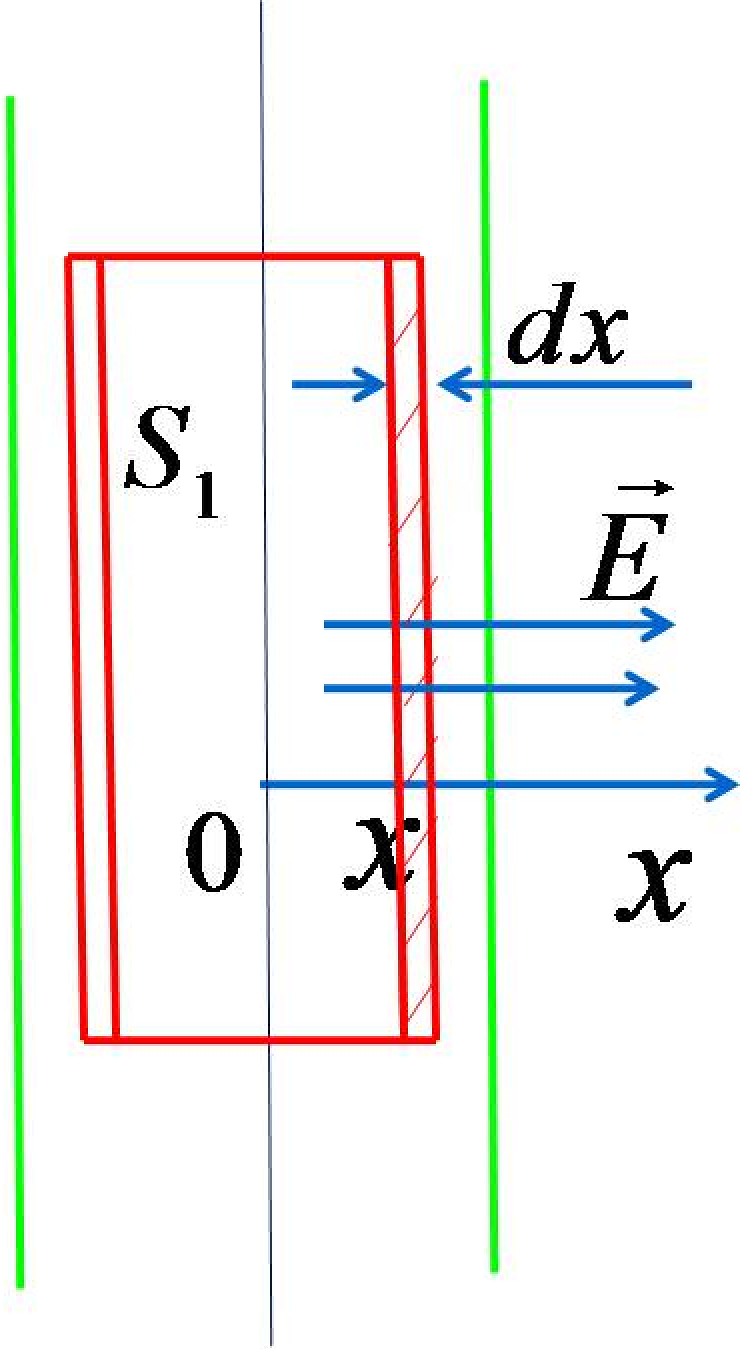
Второй вариант задачи – плоскости заряжены с поверхностной плотностью зарядов σ *и* σ.

Пример. *Слой толщиной 2a заряжен равномерно с объёмной плотностью заряда* ρ . *Вычислите напряженность и потенциал его поля как функцию расстояния x от его плоскости симметрии.*

Пример. *Слой толщиной 2а заряжен с объёмной плотностью заряда* $\rho = A \cdot x$.
Вычислите напряженность и потенциал его поля как функцию расстояния x от его плоскости симметрии.

Решение. *По теореме Гаусса вычислим напряжённость электрического поля внутри и вне слоя. Выбирая гауссову поверхность мы стремимся добиться того, чтобы было выполнено условие*

$$E_n = E$$



Линии напряжённости будут перпендикулярны слою. Гауссова поверхность-параллелепипед. Его основания расположены симметрично относительно плоскости симметрии системы. Обозначим их площадь через S1. Высота параллелепипеда 2x.

Запишем теорему Остроградского-Гаусса.

$$\oint_S E_n dS = \frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}$$

В качестве объёма dV выберем параллелепипед с основаниями площадью S_1 и высотой dx, тогда объёмную плотность заряда внутри него можно будет считать постоянной).

Из-за симметрии задачи интеграл с пределами от $-x$ до $+x$ заменим на удвоенный интеграл с пределами от 0 до x .

1) В области $x < a$

$$2E_I \cdot S_1 = \frac{2}{\varepsilon_0}\int_0^x Ax \cdot S_1 dx$$

$$E_I = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon_0} Ax^2$$

2) В области $x > a$

$$2E_{II} \cdot S_1 = \frac{2}{\varepsilon_0} \int_0^a Ax \cdot S_1 dx$$

$$E_{II} = \frac{1}{2\varepsilon_0} Aa^2$$

Вычисляем потенциал $\varphi = -\int E_r dr$

1) *В области* $x > a$

$$\varphi_{II} = -\frac{1}{2\varepsilon_0} A a^2 x + const_{II}$$

2) *В области* $x < a$

$$\varphi_I = -\frac{1}{6 \cdot \varepsilon_0} A x^3 + const_I$$

Вычисляем постоянные

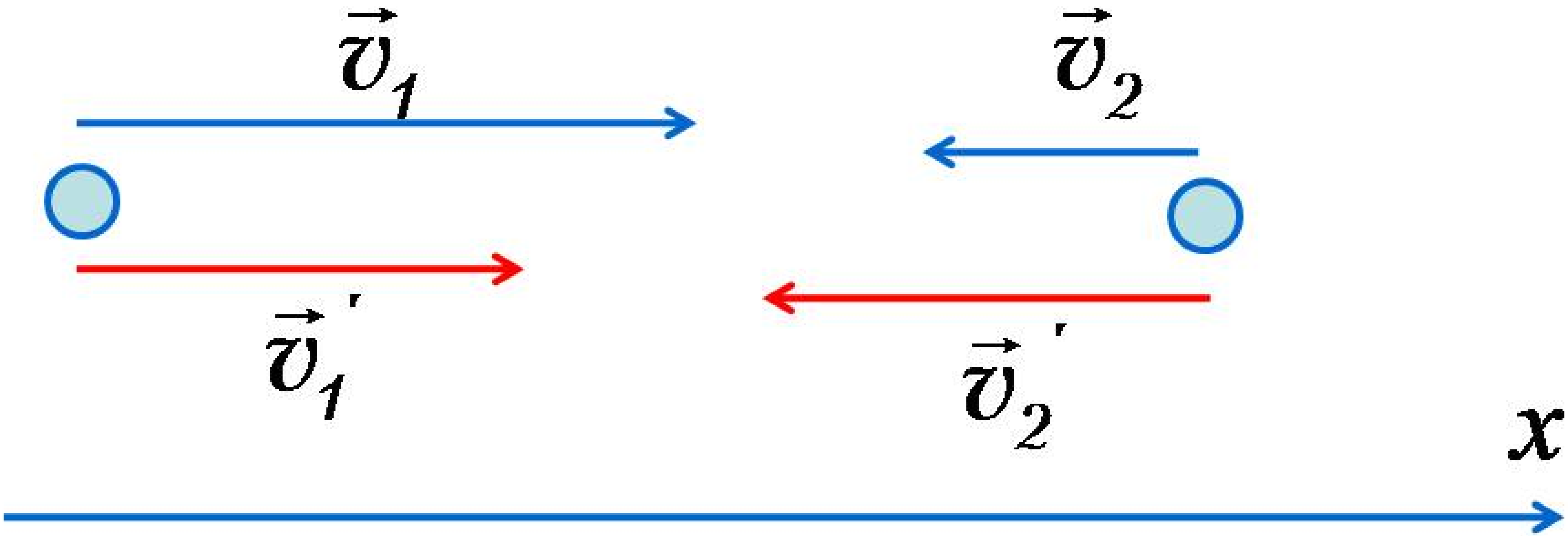
Поскольку заведомо нет такой точки, где разумно было бы считать потенциал равным нулю (как в задаче с шаром), будем стремиться максимально упростить вычисления. Пусть, например, потенциал равен нулю на границе слоя.

$$\varphi_I = -\frac{1}{6\cdot\varepsilon_0}Ax^3 + \frac{1}{6\cdot\varepsilon_0}Aa^3$$

$$\varphi_{II} = -\frac{1}{2\varepsilon_0}Aa^2x + \frac{1}{2\varepsilon_0}Aa^3$$

Пример. *Два электрона движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой. На какое наименьшее расстояние они сблизятся, если изначально они находятся очень далеко друг от друга и их скорости равны* v_1 *и* v_2 *?*

Решение. *При сближении на максимальное расстояние электроны остановятся в системе отсчёта, связанной с центром масс, поэтому решать задачу нужно именно в этой системе отсчёта.*



Скорость центра масс

$$v_{Ц\,М} = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

Скорости электронов в системе отсчёта, связанной с центром масс,

$$v_1^{'} = v_1 - v_{Ц\,М}$$

$$v_2^{'} = v_2 + v_{Ц\,М}$$

По модулю эти скорости равны друг другу.

$$v' = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{2mv'^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r_{\min}}$$

позволяет вычислить минимальное расстояние между электронами.