Содержание

Электростатика

Закон Кулона. Принцип суперпозиции.

№1 (done)

Условие: На шёлковой нити подвешен шар массы m, заряд которого q_1^+. Рассчитать на какое расстояние необходимо поднести положительно заряженный шар, с зарядом q_2^+, чтобы сила натяжения нити уменьшилась вдвое.

Решение:

Ответ: $l = \sqrt{\frac{2kq_1^+q_2^+}{mg}}$.

№2 (done)

Условие: К потолку в одной точке на шёлковых нитях длины l подвешены два одинаковых шара обладающих одинаковым зарядом q и массой m. Расстояние между шарами $x \ll l$. Рассчитать скорость утечки зарядов $\frac{dq}{dt}$ с каждого шара, если скорость их сближения, как функция от x имеет вид: $v(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x}}$ (α – некоторая постоянная).

Решение:

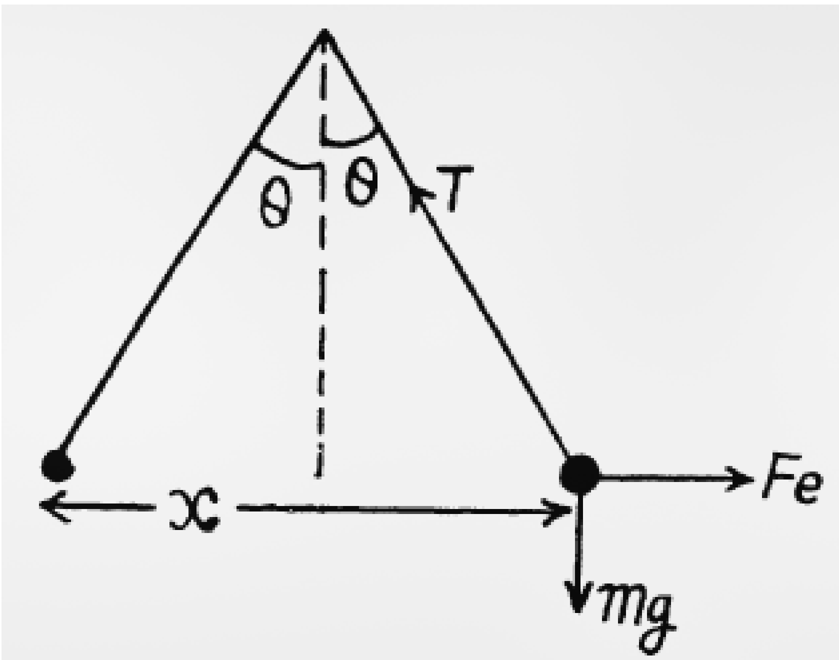


Рис. 1. Поясняющий рисунок.

Пусть шары отклоняются на угол θ, от вертикали, когда расстояние между ними равно x.

Применяя второй закон Ньютона для любого шарика, получим,

$$T\cos\theta = mg \tag{1}$$

и

$$T\sin\theta = F_e \tag{2}$$

Из уравнений 1 и 2

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F_e}{mg} \tag{3}$$

Из рисунка

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \approx \frac{x}{2l} \quad x \ll l \tag{4}$$

Из уравнения 3 и 4

$$F_e = \frac{mgx}{2l} \quad \textbf{или} \quad \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{mgx}{2l} \tag{5}$$

$$q^2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 mgx^3}{l} \tag{6}$$

Дифференцируя уравнение 6 по времени

$$2q\frac{dq}{dt} = \frac{2\pi\varepsilon_0 mg}{l}3x^2\frac{dx}{dt} \tag{7}$$

Согласно задаче $\frac{dx}{dt} = v = \frac{a}{\sqrt{x}}$ (скорость сближения $\frac{dx}{dt}$).

Итак, $\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mg}{l}x^3}\frac{dq}{dt} = \frac{3\pi\varepsilon_0 mg}{l}x^2\frac{a}{\sqrt{x}}$

Следовательно, $\frac{dq}{dt} = \frac{3}{2}a\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mg}{l}}$.

Ответ: $\frac{dq}{dt} = \frac{3\alpha}{2}\sqrt{\frac{mg}{2kl}}$.

№3 (done)

Условие: Радиус векторы двух положительных зарядов q_1 и q_2 соответственно $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Рассчитать отрицательный заряд q_3 и его радиус-вектор $\vec{r}_3$ точки в которую его надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из зарядов была равна 0.

Решение:

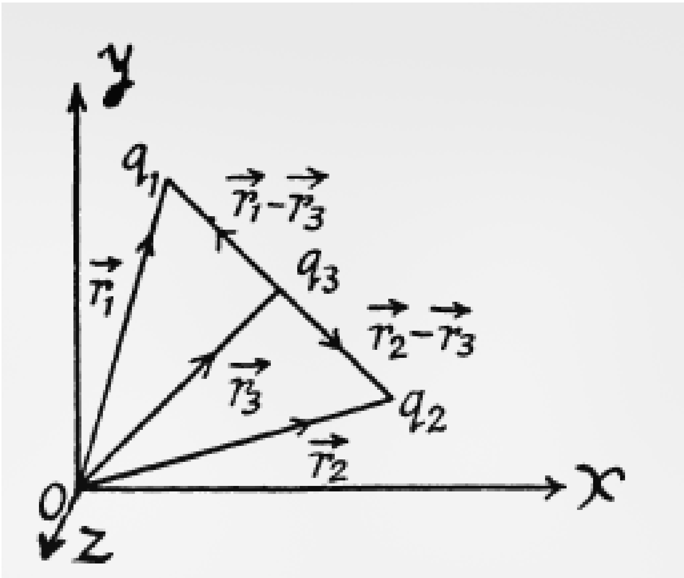


Рис. 2. Поясняющий рисунок.

Выберем координатные оси, как показано на рисунке, и зафиксируем три заряда, q_1, q_2 и q_3 с векторами положения $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$ соответственно.

Теперь для равновесия q_3

$$\frac{+q_2 q_3(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + \frac{q_1 q_3(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} = 0 \tag{8}$$

или, $\frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} = \frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2}$

потому что $\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|}$

или, $\sqrt{q_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) = \sqrt{q_1}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)$

или, $\vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_2}\vec{r}_1 + \sqrt{q_1}\vec{r}_2}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}$

Для равновесия q_1,

$$\frac{q_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = 0 \tag{9}$$

или, $q_3 = \frac{-q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\ |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2$

Подставляя значение $\vec{r}_3$, получаем,

$$q_3 = \frac{-q_1 q_2}{\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^2}. \tag{10}$$

Ответ: $q_3 = -\frac{q_1 q_2}{\left(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\right)^2}, \vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_1}\vec{r}_2 + \sqrt{q_2}\vec{r}_1}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}.$

№4 (done)

Условие: Точечный заряд $q = 50$ **мкКл** расположен в точке с радиус-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Найти напряжённость $\vec{E}$ электрического поля и её модуль в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 8\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$. Координаты векторов заданы в метрах.

Решение:

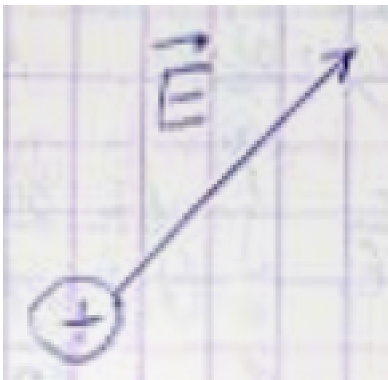


Рис. 3. Поясняющий рисунок.

$$\vec{z} - \vec{z}_0 = 6\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} \tag{11}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \tag{12}$$

$$z = |\vec{z} - \vec{z}_0| = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ м} \tag{13}$$

$$E = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^5}{100} = 4500 \text{ В/м} = 4.5 \text{ кВ/м} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \vec{E} = \frac{\vec{z} - \vec{z}_0}{|\vec{z} - \vec{z}_0|} \cdot E = (0.6i - 0.8j) \cdot 4.5 = \\ = (2.7i - 3.6j) \text{ кВ/м.} \end{gathered} \tag{15}$$

Ответ: $E = 4.5$ кВ/м; $\vec{E} == 2.7\vec{i} - 3.6\vec{j}$.

№5 (done)

Условие: Точечные заряды $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$ расположены по углам квадрата (Рис. 4), диагональ которого равна $2l$. Найти модуль напряжённости электрического поля в точке, отстоящей на расстояние x от плоскости квадрата, симметрично относительно его вершин.

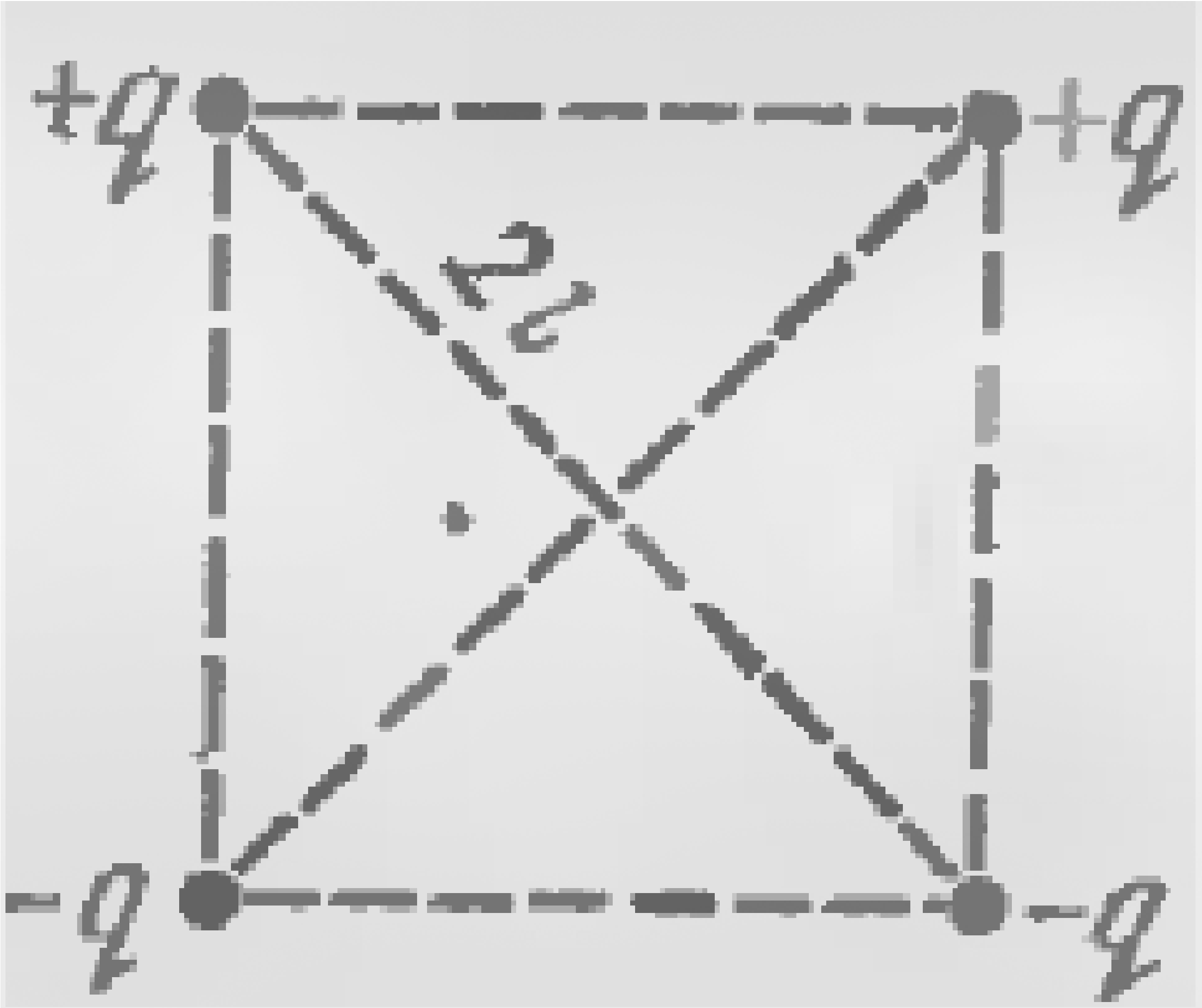


Рис. 4. Поясняющий рисунок.

Решение:

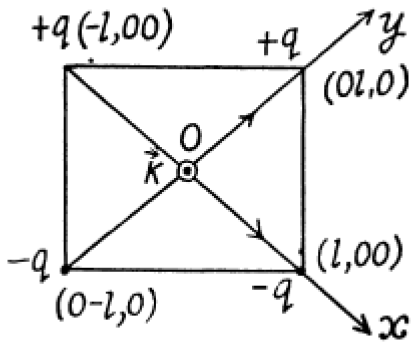


Рис. 5. Пояснительный рисунок.

Зафиксируем систему координат, взяв точку пересечения диагоналей как начало координат, а $\vec{k}$ - нормальное направление, выходящее из плоскости фигуры. Следовательно, искомая напряженность поля:

$$
\begin{aligned}
\vec{E} = {} & \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\vec{\imath}+x\vec{k}}{(l^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l(-\vec{\imath})+x\vec{k}}{(l^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\vec{\jmath}+x\vec{k}}{(l^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l(-\vec{\jmath})+x\vec{k}}{(l^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
= {} & \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(l^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}[2l\vec{\imath}-2l\vec{\jmath}]
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Таким образом,

$$
E = \frac{ql}{\sqrt{2}\pi\varepsilon_0(l^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{17}
$$

Ответ: $E = k\frac{2\sqrt{2}ql}{(l^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

№6 (done)

Условие: В центре равностороннего треугольника расположен заряд $q_0 = 10$ **нКл**. Рассчитайте, какие одинаковые заряды q_1 необходимо расположить в вершинах этого треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю.

Решение:

Ответ: $q_1 = -17$ **нКл**.

№7

Условие: Система состоит из протона p и электрона e, расстояние между которыми $r = 50$ пм. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля, создаваемого этими частицами в точках A и B, когда эти частицы находятся в положении, изображённом на (Рис. 6).

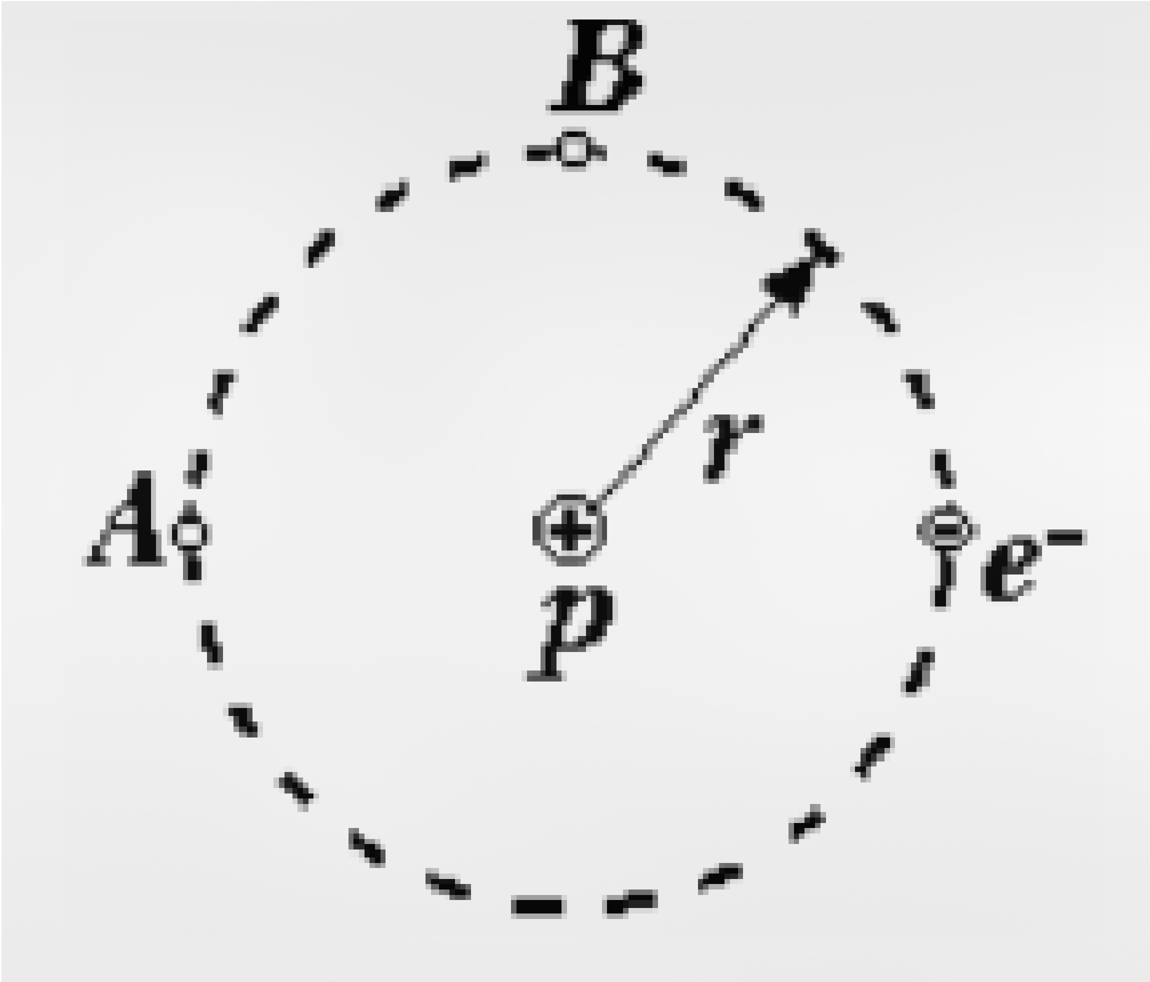


Рис. 6. Поясняющий рисунок.

Решение:

Ответ: $E_A = 4.3 \cdot 10^{11}$ В/м, $E_B = 4.2 \cdot 10^{11}$ В/м.

№8 (done)

Условие: В вершинах квадрата со сторонами $a = 0.08$ м расположены одинаковые заряды $q^{(+)} = 5$ нКл. Рассчитайте модуль напряжённости электрического поля в середине одной из сторон квадрата.

Решение:

Ответ: $E \approx 10$ кВ/м.

№9 (done)

Условие: Свинцовый шарик диаметр которого $d = 7$ мм поместили в однородное электрическое поле в глицериновый раствор. Рассчитать заряд этого шарика, если электрическое поле направленно вверх, а модуль его напряжённости $E = 9$ кВ/см.

Решение:

Ответ: $q \approx 20$ нКл.

№10 (done)

Условие: Кусок тонкой проволоки изогнутый полукольцом радиусом R имеет равномерно распределённый заряд q. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля E в центре этого полукольца.

Решение:

Ответ: $E = \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 R^2}$.

№11 (done)

Условие: Найти модуль напряжённости электрического поля на оси заряженного тонкого кольца, как функцию расстояния до центра кольца – $E(z)$, если заряд кольца равен q, а радиус R. Исследовать полученную зависимость при $z \gg R$. Рассчитать максимальное значение модуля напряжённости $E_{\max}$ и соответствующую ему координату точки на оси OZ.

Решение:

Ответ: $E(z) = \frac{kqz}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}, z_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}}, E_{\max} = \frac{2kq}{3^{\frac{3}{2}} R^2}$.

№12 (done)

Условие: Рассчитать модуль силы взаимодействия между тонким кольцом радиуса R, заряд которого равен q и длинной равномерно заряженной нитью, имеющей линейную плотность заряда равную λ, если нить расположена вдоль оси симметрии кольца, так, что один её конец совпадает с центром кольца.

Решение:

Ответ: $F = \frac{kq\lambda}{R}$.

№13 (done)

Условие: Тонкий стержень длины l имеет равномерно распределённый заряд q. Рассчитать, модуль напряжённости электрического поля в точке расположенной на расстоянии a от одного из концов стержня, по линии стержня.

Решение:

Ответ: $E = \frac{kq}{a(l+a)}$.

№14

Условие: Линейная плотность тонкого заряженного кольца радиуса R зависит от азимутального угла по закону $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$ (λ_0 – постоянная). Рассчитать модуль напряжённости электрического поля в центра кольца и на оси симметрии кольца в зависимости от расстояния до центра кольца.

Решение:

Ответ: $E_O = \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}, E(z) = \frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

№15

Условие: Система состоит из равномерно заряженного стержня длины $2a$, расположенного в вакууме. Рассчитать модуль вектора напряжённости как функцию расстояния r от центра стержня до точки на прямой:

- перпендикулярной стержню и проходящей через его центр;
- совпадающей с осью стержня, при $r > a$.

Заряд стрежня равен q.

Решение:

Ответ: $E = \frac{kq}{r\sqrt{a^2+r^2}}, E = \frac{kq}{r^2-a^2}$.

№16

Условие: Сфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = (\vec{r}, \vec{a})$, где $\vec{a}$ некоторый постоянный вектор, а $\vec{r}$ – радиус вектор точки на сфере отностительно её центра. Рассчитать вектор напряжённости электрического поля в центре сферы.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{aR}{3\varepsilon_0}\vec{e}_z$.

№17

Условие: Рассчитать вектор напряжённости в центре заряженного шара радиуса R если объёмная плотность заряда шара $\rho = (\vec{r}, \vec{a})$, где $\vec{a}$ некоторый постоянный вектор, а $\vec{r}$ – радиус вектор произвольной точки шара, проведённый из его центра.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{R^2 a}{6\varepsilon_0}\vec{e}_z$.

№18

Условие: Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность круглого сечения заряжена так, что поверхностная плотность зависит только от угла φ цилиндрической системы координат: $\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$. Рассчитать модуль вектора в произвольной точке, лежащей на оси цилиндра.

Решение:

Ответ: $E = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$.

Расчет напряженности непрерывного распределения заряда на основе теоремы Гаусса.

№1

Условие: Напряжённость электрического поля, как функция координат имеет вид: $\vec{E} = \frac{\alpha x\vec{\imath} + \alpha y\vec{\jmath}}{x^2+y^2}$, где $\alpha = \text{const}$, а $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ – орты координатных осей OX и OY соответственно. Найти поток вектора $\vec{E}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат.

Решение:

Ответ: $P = 4\pi\alpha R$.

№2

Условие: Объёмная плотность положительно заряженного шара радиуса R зависит только от расстояния до центра шара: $\rho(r) = \rho_0\big(1 - \frac{r}{R}\big)$, где $\rho_0 = \mathrm{const}$. Найти:

- модуль напряжённости электрического поля внутри и вне шара, как функцию r;
- максимальное значения модуля напряжённости $E_{\max}$ и соответствующее ему значение $r_{\max}$.

Диэлектрическая проницаемость всюду $\varepsilon = 1$.

Решение:

Ответ: $E_r(r \le R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\big(1 - \frac{3r}{4R}\big), \quad E_r(r \ge R) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}, \quad r_{\max} = \frac{2}{3}R, \quad E_r(r_{\max}) = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$.

№3

Условие: Система состоит из равномерно заряженного шара радиуса $R = 0.2$ м, объёмная плотность которого $\rho = 20$ нКл/м^3. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля:

- на расстоянии $r = 0.1$ м от центра шара;
- на поверхности шара;
- на расстоянии $r = 0.25$ м от центра шара.

Диэлектрическая проницаемость материала из которого состоит шар $\varepsilon = 5$.

Решение:

Ответ: $E(0.1) \approx 15$ В/м, $\quad E(0.2) \approx 30$ В/м $(r \le R)$, $\quad E(0.25) \approx 96$ В/м, $\quad E(0.2) \approx 151$ В/м $(r \ge R)$.

№4

Условие: Шар радиуса R заряженный равномерно помещён в некоторую среду диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon = 1$. Среда заполнена зарядом, объёмная плотность которого $\rho = \frac{\alpha}{r}$, где α –

постоянная, а r – расстояние от центра шара. Рассчитать заряд шара при котором модуль напряжённости электрического поля вне шара не зависит от r.

Решение:

Ответ: $q = 2\pi\alpha R^2$.

№5

Условие: Система представлена областью пространства. По пространству распределён заряд, плотность которого зависит от расстояния до центра по закону $\rho = \rho_0 \exp\left(-\alpha r^3\right)$, где α некоторая постоянная. Найти модуль напряжённости, как функцию r.

Решение:

Ответ: $E_r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \alpha r^2}\left(1 - \exp\left(-\alpha r^3\right)\right)$.

№6

Условие: Рассчитать напряжённость электрического поля бесконечной плоскости, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда – σ. Расчёт произвести 2-мя способами:

- с использованием закона Кулона;
- с использованием теоремы Гаусса.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$.

№7

Условие: Рассчитать напрёжённость электростатического поля создаваемого бесконечной длинной нитью, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда – λ. Расчёт произвести 2-мя способами:

- с использованием закона Кулона;
- с использованием теоремы Гаусса.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{n}$.

№8

Условие: Рассчитать вектор напряжённости электростатического поля в области пересечения двух шаров, равномерно заполненными разноименными зарядами с объёмной плотностью ρ и $-\rho$. Расстояния между центрами шаров характеризуется вектором a.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$.

№9

Условие: Напряжённость аксиально симметричного электростатического поля зависит от расстояния до источника по закону $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2}\vec{r}$ (α – постоянная). Рассчитать заряд внутри сферы радиуса R, центр которой расположен на источнике.

Решение:

Ответ: хз.

Работа кулоновских сил. Потенциал электростатического поля.

№1 (done)

Условие: Потенциал электрического поля зависит от координат x, y по закону:

- $\varphi(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)$,
- $\varphi(x, y) = \alpha xy$,

где $\alpha = \mathrm{const}$. Найти вектор напряжённости этих полей.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = -2\alpha\vec{r}, \vec{E} = -\alpha y\vec{\imath} - \alpha x\vec{\jmath}$.

№2 (done)

Условие: Найти потенциалы, как функции координат следующих электрических полей:

а) $\vec{E} = a(y\vec{\imath} + x\vec{\jmath})$;

b) $\vec{E} = 2axy\vec{\imath} + a(x^2 - y^2)\vec{\jmath}$;

c) $\vec{E} = ay\vec{\imath} + (ax + bz)\vec{\jmath} + by\vec{k}$.

Решение:

Ответ: $\varphi_a = -axy + C, \quad \varphi_b = ay\left(\frac{y^2}{3} - x^2\right) + C, \quad \varphi_c = -y(ax + bz) + C$.

№3 (done)

Условие: Потенциал электрического поля имеет вид: $\varphi(x, y, z) = \alpha(xy - z^2)$, где $\alpha = \text{const}$. Найти проекцию напряжённости электрического поля в точке $M\{2, 1, -3\}$ на направление вектора $\vec{a} = \vec{\imath} + 3\vec{k}$.

Решение:

Ответ: $E_a = \frac{(\vec{E},\vec{a})}{a} \approx -6\alpha$.

№4 (done)

Условие: Тонкий кусок проволоки изогнутый полукольцом имеет равномерно распределённый заряд, линейная плотность которого $\lambda = 5$ нКл/м. Рассчитать потенциал φ, создаваемый зарядом проволоки в центре полукольца.

Решение:

Ответ: $\varphi = \pi k\lambda \approx 0.14$ кВ.

№5 (done)

Условие: Тонкий стержень длиной $l = 10$ см заряжен равномерно. Рассчитать потенциал φ электрического поля в точке, расположенной на оси стержня на расстоянии $a = 50$ см. от его ближайшего конца, если полный заряд стержня $q = 10$ мкКл.

Решение:

Ответ: $\varphi = \frac{kq}{l}\ln\left(\frac{l+a}{a}\right) \approx 0.16$ МВ.

№6 (done)

Условие: Тонкая проволока свёрнутая в кольцо несёт равномерный заряд $q = 20$ нКл. Рассчитать потенциал электрического поля кольца в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии $a = 50$ см от центра кольца. Радиус кольца $R = 8$ см.

Решение:

Ответ: $\varphi = \frac{q}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+a^2}} \approx 0.36$ кВ.

№7 (done)

Условие: Рассчитать разность потенциалов между центрами тонких проволочных колец радиуса $R = 30$ см, если центры колец лежат на одной оси, а расстояние между центрами $l = 52$ см. Заряды колец равны q и $-q$. $|q| = 0.4$ мкКл.

Решение:

Ответ: $\Delta\varphi = 2kq\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+l^2}}\right) \approx 12$ кВ.

№8 (done)

Условие: Кольцо радиуса R заряжено неравномерно. Рассчитать работу, совершаемую при перемещении заряда q_0 из центра кольца в произвольную точку лежащую на оси кольца, если полный заряд кольца равен q.

Решение:

Ответ: $A = kqq_0\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$.

№9 (done)

Условие: Рассчитать разность потенциалов между точками (1) и (2) электрического поля, создаваемого тонкой равномерно заряженной нитью бесконечной длины, если известно, что точка (2) расположена в 7 раз дальше от нити, чем точка (1). Линейная плотность заряда нити $\lambda = 9$ мкКл/м.

Решение:

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi} \ln 7 \approx 0.32$ МВ.

№10

Условие: Провод, изображённый на (Рис. 7) заряжен равномерно с линейной плотностью $\lambda = 0.5$ **нКл/м**. Длина прямого участка $a = 50$ **см**, радиус полукольца $R = 20$ **см**. Рассчитать, какую работу совершат электрические силы при удалении точечного заряда $q = 10$ **нКл** от центра полукольца на бесконечность.

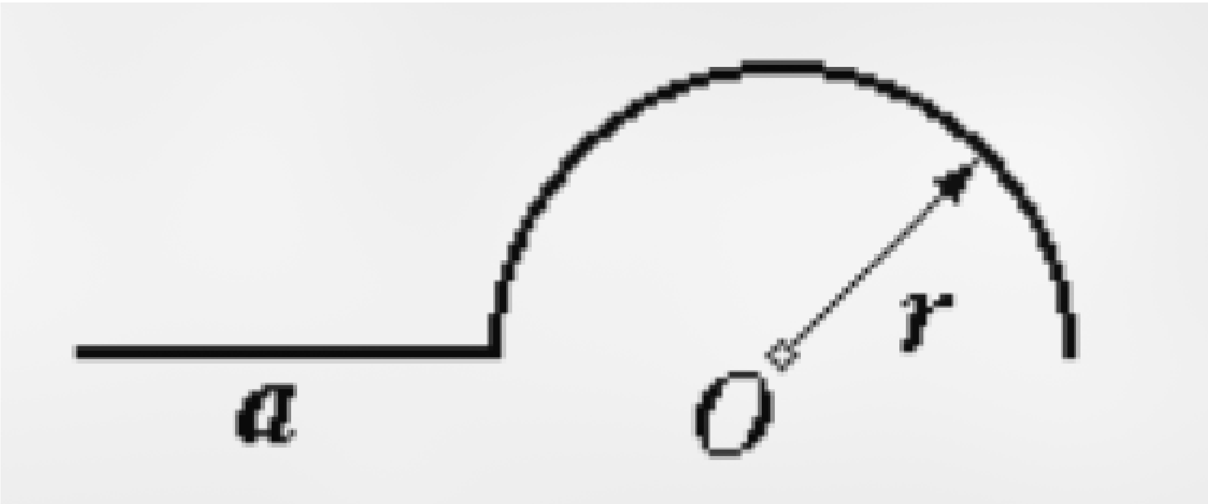


Рис. 7. Поясняющий рисунок.

Решение:

Ответ: $A = kq\lambda\left(\pi + \ln\left(\frac{R+a}{a}\right)\right) \approx 0.2$ **мкДж**.

№11

Условие: Электрическое поле создано равномерно заряженным шаром радиуса $R = 20$ **см**. Объёмная плотность заряда $\rho = 10$ **нКл/м**^{3}. Рассчитать разность потенциалов между точками, лежащими на расстоянии $r_1 = 1$ **см** и $r_2 = 25$ **см** от центра шара соответственно. Диэлектрическая проницаемость всюду равна 1.

Решение:

Ответ: $\Delta\varphi \approx 11$ В.

№12

Условие: В вершинах равностороннего треугольника, сторона которого $a = 5$ **см**, расположены 3 точечных заряда q и $-2q$, как это показано на (Рис. 8). Рассчитать работу электрических сил при перемещении заряда $-2q$ из точки B в точку C если $q = 3$ нКл.

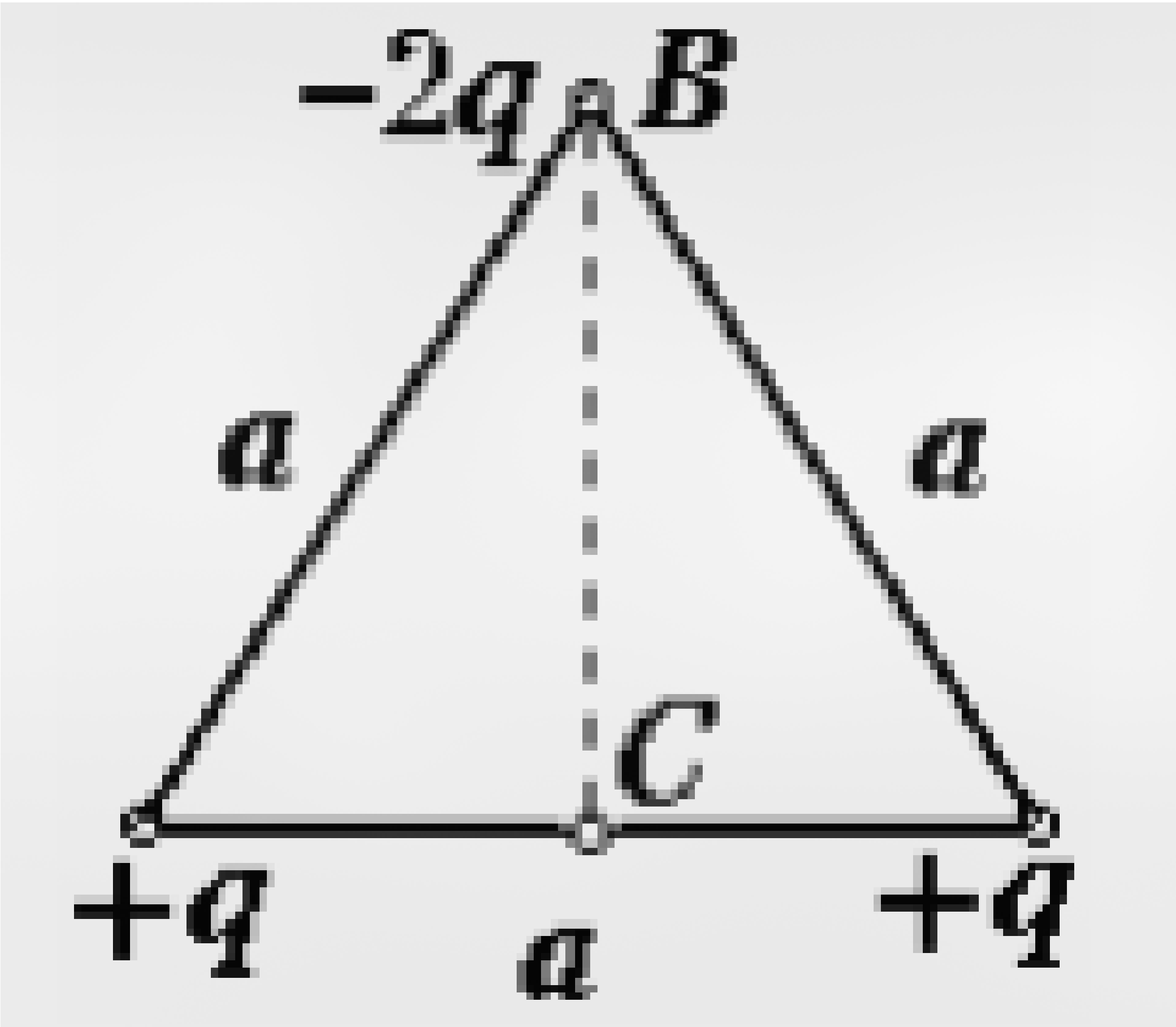


Рис. 8. Пояснительный рисунок.

Решение:

Ответ: $A = \frac{4kq^2}{a} \approx 6.5$ мкДж.

№13

Условие: Коническая поверхность, радиус основания которой равен R равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ. Рассчитать потенциал электростатического поля в вершине конуса.

Решение:

Ответ: $\varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$.

№14

Условие: Рассчитать потенциал в точке, расположенной на краю тонкого диска, радиуса R, если поверхностная плотность заряда, распределённого по диску равна σ.

Решение:

Ответ: $\varphi = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$.

№15

Условие: Потенциал электростатического поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до центра шара: $\varphi = ar^2 + b$. Рассчитать объёмную плотность заряда, как функцию r.

Решение:

Ответ: $\rho(r) = -6\varepsilon_0 a$.

№16

Условие: Заряд q распределён равномерно по объёму шара радиуса R. Рассчитать:

- потенциал в центре шара;
- потенциал внутри шара как функцию r.

Решение:

Ответ: $\varphi(0) = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}$, $\quad \varphi(r) = \varphi(0)\left(1 - \frac{r^2}{3R^3}\right)$

Электрический диполь.

№1 (done)

Условие: Заряд q помещён в точку с координатами $(a, 0)$. Найти вектор дипольного момента, если заряд $-q$ поместить в точку с координатами:

- $(-a, 0)$;
- $(0, a)$;
- $(-a, -a)$.

Решение:

Ответ: $\vec{p} = 2qa\vec{\imath}; \vec{p} = q(a\vec{\imath} - a\vec{\jmath}); \vec{p} = q(2a\vec{\imath} + a\vec{\jmath})$.

№2

Условие: Рассчитать потенциалы и модули напряжённости электрического поля, создаваемого диполем в точках A и B, расположенных на расстоянии r от центра диполя на перпендикуляре к диполю и на оси диполя в направлении диполя, соответственно. Модуль дипольного момента $p = 0.12$ нКл/м, $|q| = 1$ нКл, $r = 8$ см.

Решение:

Ответ: $\varphi(A) = 0$ В, $\varphi(B) \approx 386$ В, $E(A) \approx 1.08$ кВ/м, $E(B) = 22$ кВ/м.

№3

Условие: Показать, что потенциал поля диполя с электрическим моментом $\vec{p}$ (Рис. 9) может быть представлен, как $\varphi(r) = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$, где r – радиус-вектор.

- Найти с помощью этого выражения вектор напряжённости $\vec{E}$ как функцию $\vec{r}, \vec{p}$ и модуль вектора напряжённости электрического поля диполя, как функцию r и θ.
- Найти проекции напряжённости электрического поля диполя на ось $Z - E_z$, и на плоскость перпендикулярную оси $Z - E_\perp$.

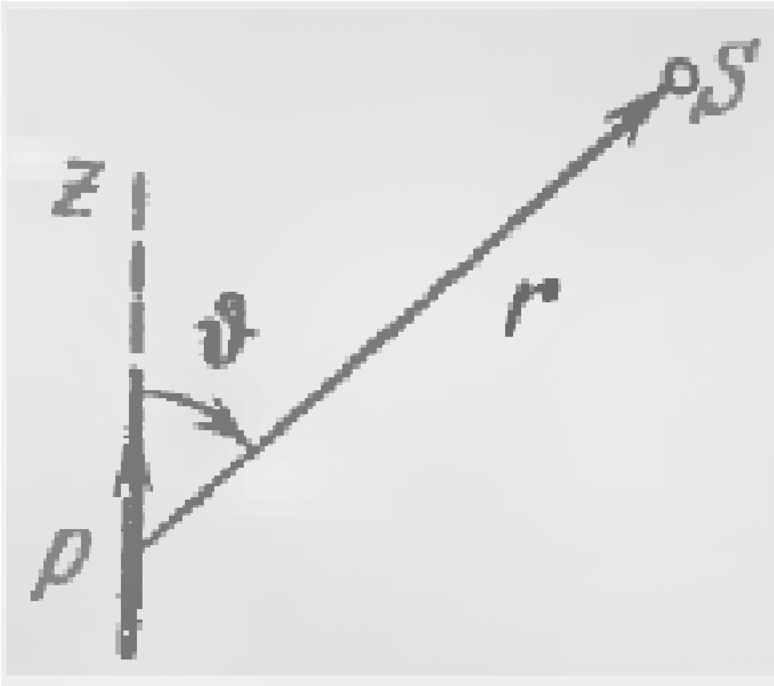


Рис. 9. Поясняющий рисунок.

Решение:

Ответ: $\vec{E}(\vec{p},\vec{r}) = k\Big(\frac{3(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\Big), \quad E(p,\theta) = \frac{kp}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}; E_z = \frac{kp}{r^3}\big(3\cos^2\theta - 1\big), \quad E_\perp = \frac{3kp\cos\theta\sin\theta}{r^3}.$

№4

Условие: Диполь с электрическим моментом $\vec{p}$ равномерно вращается с частотой ν вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плечу диполя. Получить потенциал создаваемый диполем в точке S, отстоящей от центра диполя на расстояние $r \gg l$ (l – плечо диполя), как функцию времени. Считать, что $\varphi(0) = 0$.

Решение:

Ответ: $\varphi(t) = -\frac{kp}{r^2}\sin(2\pi\nu t)$.

№5

Условие: Для системы состоящей из 2-х сонаправленных точечных диполей, лежащих на одной прямой, $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, рассчитать модуль силы взаимодействия между этими диполями если $p_1 = 1$ пКл/м$, p_2 = 4$ пКл/м$, r = 0.02$ м (r – расстояние между центрами диполей)

Решение:

Ответ: $F = \frac{3p_1p_2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^4} \approx 1.35$ мкН.

№6

Условие: Система состоит из равномерно заряженной нити, изогнутой в форме полуокружности радиуса R с зарядом $q > 0$, и отрицательного заряда $-q$, расположенного в её центре. Найти:

- Модуль электрического дипольного момента этой системы;
- Модуль напряжённости электрического поля в точке, расположенной на оси диполя на расстоянии $r \gg R$.

Решение:

Ответ: $p = \frac{2Rq}{\pi}; E(r) = \frac{Rq}{\varepsilon_0\pi^2r^3}$.

№7

Условие: Система состоит из бесконечной равномерно заряженной тонкой нити и диполя, расположенного на расстоянии r от нити. $\vec{p}$ – дипольный момент, λ – линейная плотность заряда нити. Найти силу, действующую на диполь, если $\vec{p}$ ориентирован:

- вдоль нити;
- по вектору $\vec{r}$, перпендикулярному к нити;
- перпендикулярно нити и вектору $\vec{r}$.

Решение:

Ответ: $\vec{F} = \vec{0}; \quad \vec{F} = -\frac{\vec{p}\lambda}{\varepsilon_0\pi r^2}$.

№8

Условие: Диполь $\vec{p}$ расположен во внешнем однородном поле $\vec{E}_0$, так что $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}_0$. При таком расположении одна из эквипотенциальных поверхностей представляет из себя сферу. Рассчитать радиус этой сферы.

Решение:

Ответ: хз.

Электростатическое поле при наличии диэлектриков.

№1

Условие: В центре шара, состоящего из однородного диэлектрика с проницаемостью ε расположен точечный заряд q. Найти поляризованность $\vec{P}$, как функцию радиус-вектора $\vec{r}$ относительно центра шара, а также связанный заряд q' внутри сферы, радиус которой меньше радиуса шара.

Решение:

Ответ: $\vec{P} = \frac{q}{4\pi r^3 \varepsilon}(\varepsilon - 1)\vec{r}; \quad q' = -\frac{q}{\varepsilon}(\varepsilon - 1)$.

№2

Условие: Рассчитать поверхностные плотности связанных зарядов, модули векторов поляризованности и напряжённости поля, индуцированного точечным зарядом q, помещённым в центр двух концентрических сфер радиусами R_1 и R_2, если сферический слой заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью ε.

Решение:

Ответ: $E(r < R_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad P(r < R_1) = 0; \quad E(R_1 < r < R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}, P(R_1 < r < R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}(\varepsilon - 1); \quad E(r > R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, P(r > R_2) = 0; \sigma(r = R_1) = -\frac{q}{4\pi R_1^2 \varepsilon}(\varepsilon - 1), \sigma(r = R_2) = \frac{q}{4\pi R_1^2 \varepsilon}(\varepsilon - 1)$.

№3

Условие: Показать, что на границе однородного диэлектрика с проводником поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma_{\text{св}} = -\frac{\sigma(\varepsilon-1)}{\varepsilon}$, где ε - диэлектрическая проницаемость, а σ – поверхностная плотность зарядов на проводнике.

Решение:

Ответ: хз.

№4

Условие: Система состоит из диэлектрического тела имеющего форму сферического слоя с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) и диэлектрической проницаемостью ε, расположенного в вакууме. Найти модуль напряжённости, как функцию расстояния r от центра тела, если:

- внутренняя поверхность тела несёт свободный поверхностный заряд q;
- свободный заряд q равномерно распределён по объёму тела.

Решение:

Ответ:
$E_a(r < R_1) = 0; E_{b(r<R_1)} = 0; E_{a(R_1<t<R_2)} = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon\varepsilon_0 r^2}; E_{b(R_1<t<R_2)} = \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right); E_{a(r>R_2)} = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}; E_{b(r>R_2)} = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{\varepsilon_0 r^2}$.

№5

Условие: Вблизи некоторой точки лежащей на границе между стеклом и вакуумом модуль напряжённости электрического поля в вакууме – E_0, а угол между вектором $\vec{E}_0$ и вектором нормали к стеклу – α_0. Рассчитать модуль вектора напряжённости в стекле, угол между вектором напряжённости в стекле и нормалью, а также поверхностную плотность связанных зарядов.

Решение:

Ответ: $E = \frac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2\alpha_0}; \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_0}{\varepsilon}; \sigma = \frac{E_0(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{\varepsilon}\cos\alpha_0$.

Электростатическое поле при наличии проводников.

№1

Условие: Над проводящей горизонтальной плоскостью на изолирующей нити, коэффициент жёсткости которой μ висит небольшой шарик. Когда шарик зарядили, он опустился на x, а расстояние до проводящей плоскости стало равно l. Рассчитайте заряд шарика.

Решение:

Ответ: $q = 4l\sqrt{\mu x \pi \varepsilon_0}$.

№2

Условие: Система состоит из точечного диполя $\vec{p}$ и проводящей плоскости. Расстояние от диполя до плоскости l. Рассчитать силу действующую на диполь, если дипольный момент перпендикулярен плоскости.

Решение:

Ответ: $\vec{F} = \frac{3p^2}{32\varepsilon_0 l^4}\vec{\jmath}$.

№3

Условие: С одной стороны проводящей плоскости расположены 2 заряда q и $-q$. Расстояние между зарядами равно l, расстояние от каждого заряда до плоскости равно $\frac{l}{2}$. Рассчитать модуль силы, действующей на каждый заряд.

Решение:

Ответ: $F = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

№4

Условие: Система состоит из точечного заряда q расположенного на расстоянии y от проводящей плоскости. Рассчитать поверхностную плотность зарядов, индуцированных на плоскости, как функцию расстояния x от основания перпендикуляра, опущенного из точки расположения заряда на плоскость.

Решение:

Ответ: $\sigma = -\frac{qy}{2\pi(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

№5

Условие: Система состоит из нити и проводящей плоскости. Нить заряжена равномерно, с линейной плотностью λ, и ориентирована перпендикулярно плоскости. Расстояние от ближайшего конца нити, ближайшего к плоскости, до плоскости l. Рассчитать поверхностную плотность индуцированного на плоскости заряда:

- в точке O, являющейся следом нити на плоскости;
- как функцию расстояния x до точки O.

Решение:

Ответ: $\sigma(O) = -\frac{\lambda}{2\pi l}; \sigma(x) = -\frac{\lambda}{2\pi(x^2+l^2)^{\frac{1}{2}}}$.

№6

Условие: Рассчитать потенциал незаряженной проводящей сферы радиуса R, вне которой на расстоянии d расположен заряд q.

Решение:

Ответ: $\varphi = \frac{kq}{d}$.

Энергия электростатического поля.

№1

Условие: В вершинах прямоугольника со сторонами $a = 40$ **см** и $b = 20$ **см** расположены четыре одинаковых заряда $q = 2$ **мкКл**. Рассчитать энергию взаимодействия этой системы.

Решение:

Ответ: $W = 2q^2k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \approx 0.7$ Дж.

№2

Условие: Система состоит из 4-х одинаковых зарядов $q = 500$ **нКл**, расположенных в вершинах квадрата сторона которого $a = 20$ **см**. Рассчитать потенциальную энергию взаимодействия данной системы.

Решение:

Ответ: $W = \frac{\sqrt{2}q^2k}{a}\left(2\sqrt{2}+1\right) \approx 61$ мДж.

№3

Условие: Во внешнем электростатическом поле, модуль напряжённости которого $E = 300$ **кВ/м**, расположен точечный диполь, модуль дипольного момента которого $p = 12$ **пКл/м**. Под действием этого поля диполь начинает вращаться вокруг оси, проходящей через его центр. Рассчитать модуль угловой скорости вращения диполя в момент установления равновесия, если в начальный момент времени диполь был ориентирован перпендикулярно полю. Момент инерции диполя относительно оси вращения - $I = 2 \cdot 10^{-9}$ кг/м2.

Решение:

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{2pE}{I}} = 60$ рад/с.

№4

Условие: Система состоит из двух концентрических равномерно заряженных сфер, радиусами $R_1 = 1$ м и $R_2 = 1.5$ м, с поверхностными плотностями зарядов $\sigma_1 = 4$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = 10$ мкКл/м^2, расположенных в вакууме. Рассчитать энергию электрического поля заключённую между сферами.

Решение:

Ответ: $W = \frac{2\pi\sigma_1^2 R_1^4}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right) \approx 3.8$ Дж.

№5

Условие: Система состоит из двух концентрических проводящих сфер радиусами $R_1 = 10$ см и $R_2 = 40$ см, имеющими одинаковый заряд $q = 200$ нКл. Рассчитать энергию электрического поля заключённого между двумя этими сферами.

Решение:

Ответ: $W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{R_2R_1}\right) \approx 1.35$ млДж.

Конденсаторы.

№1

Условие: Получить формулы для расчёта ёмкости следующих конденсаторов (ε среды между обкладками принять равной 1):

- Сферического, если известно что радиус внутренней обкладки R_1, а внешней R_2;
- Цилиндрического, если известно, что радиус внутренней обкладки R_1, внешней R_2, а высота равна d;

- Плоского, если известно, что площадь обкладок равна S, а расстояние между обкладками d.

Решение:

Ответ: $C_{\text{сф}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, C_{\text{цил}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 d}{\ln\frac{R_2}{R_1}}, C_{\text{пл}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

№2

Условие: Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого d, расположен вертикально. Конденсатор заряжен до разности потенциалов U. На расстоянии b от отрицательно заряженной пластины находится положительно заряженная пылинка массой m и зарядом q. Рассчитать время за которое пылинка достигнет пластины конденсатора.

Решение:

Ответ: $t = \sqrt{\frac{2bmd}{qU}}$.

№3

Условие: К одной из пластин плоского заряженного конденсатора прилегает диэлектрическая пластинка толщиной d_1 и диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между пластинами конденсатора d, а разность потенциалов U. Рассчитать модули напряжённости E_1 и E_2 в диэлектрике и воздухе.

Решение:

Ответ: $E_1 = \frac{U}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}, \quad E_2 = \frac{U\varepsilon}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}$.

№4

Условие: К одной из пластин плоского конденсатора прилегает пластина диэлектрика толщиной d_1 и диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между пластинами конденсатора d. После отключения конденсатора от источника питания пластину вынули. Рассчитать во сколько раз выросла разность потенциалов между пластинами конденсатора.

Решение:

Ответ: $n = \frac{\varepsilon d}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}$.

Постоянное магнитное поле

Индукция магнитного поля. Закон Био-Савара

№1

Условие: Заряженная элементарная частица движется со скоростью, модуль которой $v = 900$ м/с. В некоторый момент в точке наблюдения P модуль напряжённости электрического поля этой частицы $E = 600$ В/м, а угол между векторами скорости и напряжённости $\alpha = 30°$. Рассчитать индукцию магнитного поля данной частицы.

Решение:

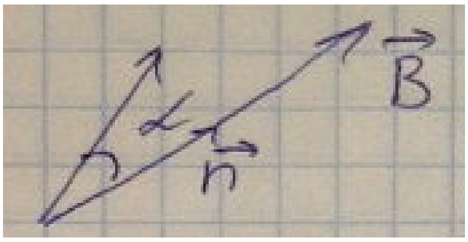


Рис. 10. Пояснительный рисунок.

$$B = \frac{\mu_0 v \sin\alpha}{4\pi r^2} \tag{18}$$

$$E = k\frac{1}{r^2} \tag{19}$$

Умножим и разделим 18 на ε_0 чтобы сделать замену на E:

$$B = \mu_0 v \sin\alpha \varepsilon_0 E \tag{20}$$

Подставив числа, получим:

$$\begin{gathered} B = 900 \cdot 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12.75 \cdot 10^{-7} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \\ = 3 \cdot 10^{-12} = 3 \text{ пТл.} \end{gathered} \tag{21}$$

Ответ: $B = 3$ пТл.

№2

Условие: Используя закон Био-Савара, получить формулу для расчёта модуля вектора индукции магнитного поля, создаваемого током I, протекающем в линейном бесконечном проводнике в точке, расположенной на расстоянии r_0 от проводника.

Решение:

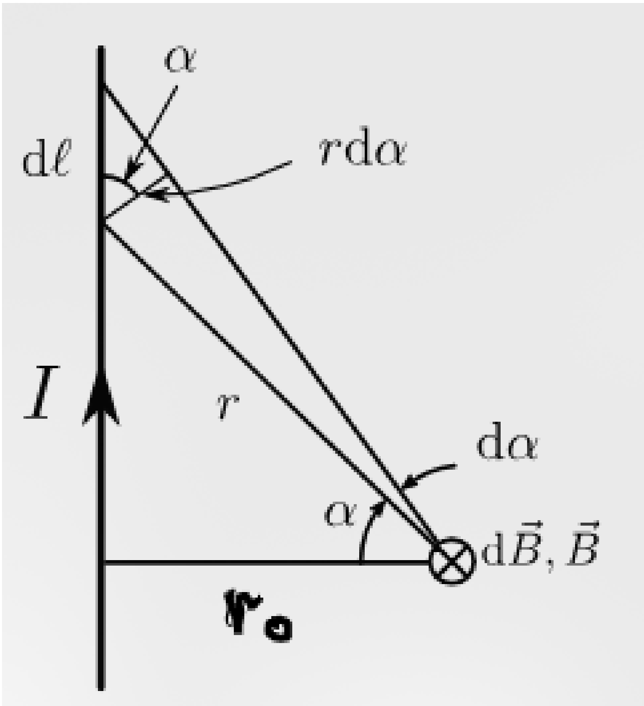


Рис. 11. Поясняющий рисунок.

Магнитное поле прямого тока, т.е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины. По свойству векторного произведения следует, что в произвольной точке A векторы $d\vec{B}$ от всех элементов токов имеют одно направление – за плоскость рисунка.

Поэтому можно складывать просто модули $d\vec{B}$. В нашем случае $d\vec{B}$ удобней выразить не через угол между $d\vec{l}$ и $\vec{r}$, а через α, тогда

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\cos\alpha}{r^3}. \tag{22}$$

Как видно из Рис. 11 $dl\cos\alpha = rd\alpha$ и $r = \frac{r_0}{\cos\alpha}$. Значит $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\cos\alpha d\alpha}{r_0}$. Интегрируя последнее выражение по углу, получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1). \tag{23}$$

Это выражение позволяет находить магнитную индукцию от конечного проводника. В случае бесконечного проводника $\left(\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \alpha_1 = -\frac{\pi}{2}\right)$:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r_0} \tag{24}$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$.

№3

Условие: Рассчитать модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого конечным прямолинейным участком проводника, длины l, по которому протекает ток I, в точке отстоящей на произвольном расстоянии r_0 от оси проводника.

Решение:

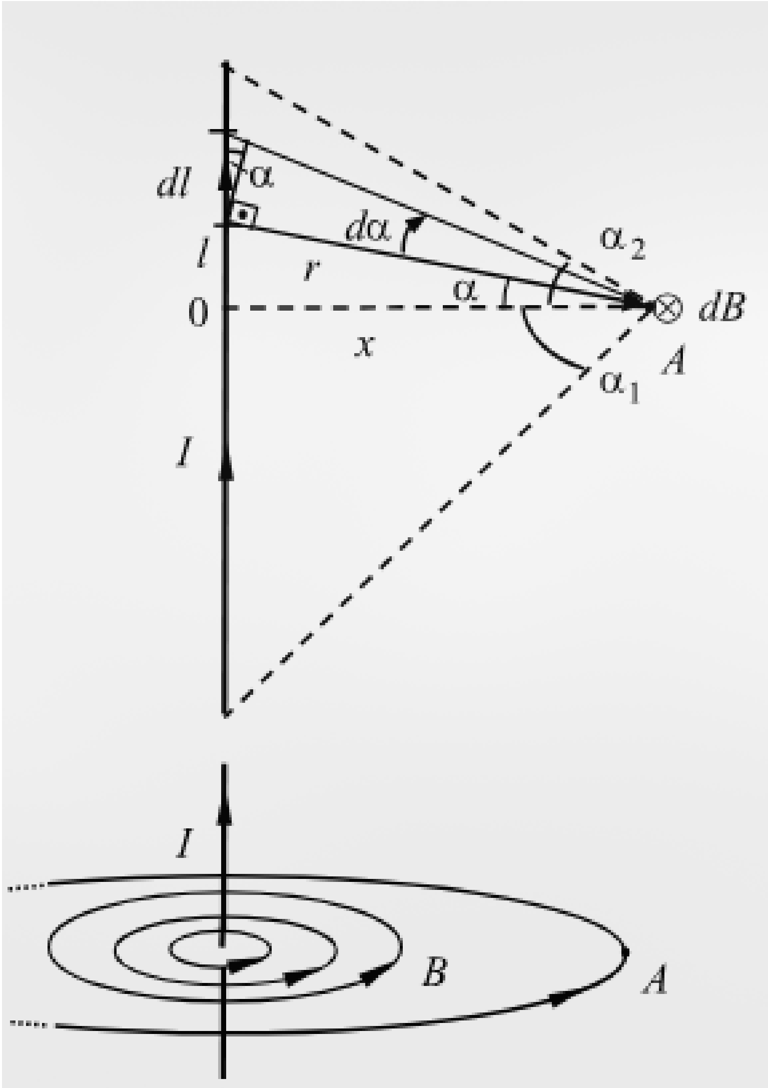


Рис. 12. Поясняющий рисунок.

Для решения задачи воспользуемся принципом суперпозиции. Разобьем проводник на элементарные участки $d\vec{l}$, по которым течет ток I (Рис. 12). Согласно закону Био-Савара, вектор магнитной индукции, создаваемого в точке A каждым элементом тока $I \cdot d\vec{l}$ равен

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}. \tag{25}$$

Векторы $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ для всех участков проводника лежат в плоскости чертежа, поэтому в точке A векторы $d\vec{B}$ имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа (от нас $\otimes$), что продемонстрировано на нижнем рисунке. Сложение векторов $d\vec{B}$ сводится к сложению их модулей. В качестве переменной интегрирования выберем угол α (угол между x и r). Выразим через угол α все остальные величины. Из Рис. 12 видно, что $r = \frac{x}{\cos\alpha}$, $l = x\operatorname{tg}\alpha$, поэтому длина элемента тока связана с приращением α соотношением

$$dl = x\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}. \tag{26}$$

Магнитная индукция, создаваемая элементом проводника, равна:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\frac{r d\alpha}{\cos\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\cos\alpha d\alpha. \tag{27}$$

Угол α для всех элементов прямого тока изменяется в пределах от α_1 до α_2 (Рис. 12), тогда

$$B = \int dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\cos\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1), \tag{28}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1), \tag{29}$$

где α_1 и α_2 углы, под которыми мы видим из точки, в которой определяем поле, концы проводника. Эти углы являются алгебраическими величинами и отсчитываются от перпендикуляра, опущенного из точки на проводник. Положительное направление отсчета угла α соответствует углу, отсчитываемому от перпендикуляра в направлении тока.

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$.

№4

Условие: Замкнутый контур с током имеет вид прямоугольника с диагональю $d = 16$ см, угол между диагоналями $\alpha = 30°$. Сила тока, протекающего по контуру $I = 5$ А. Рассчитать модуль индукции магнитного поля в центре контура.

Решение:

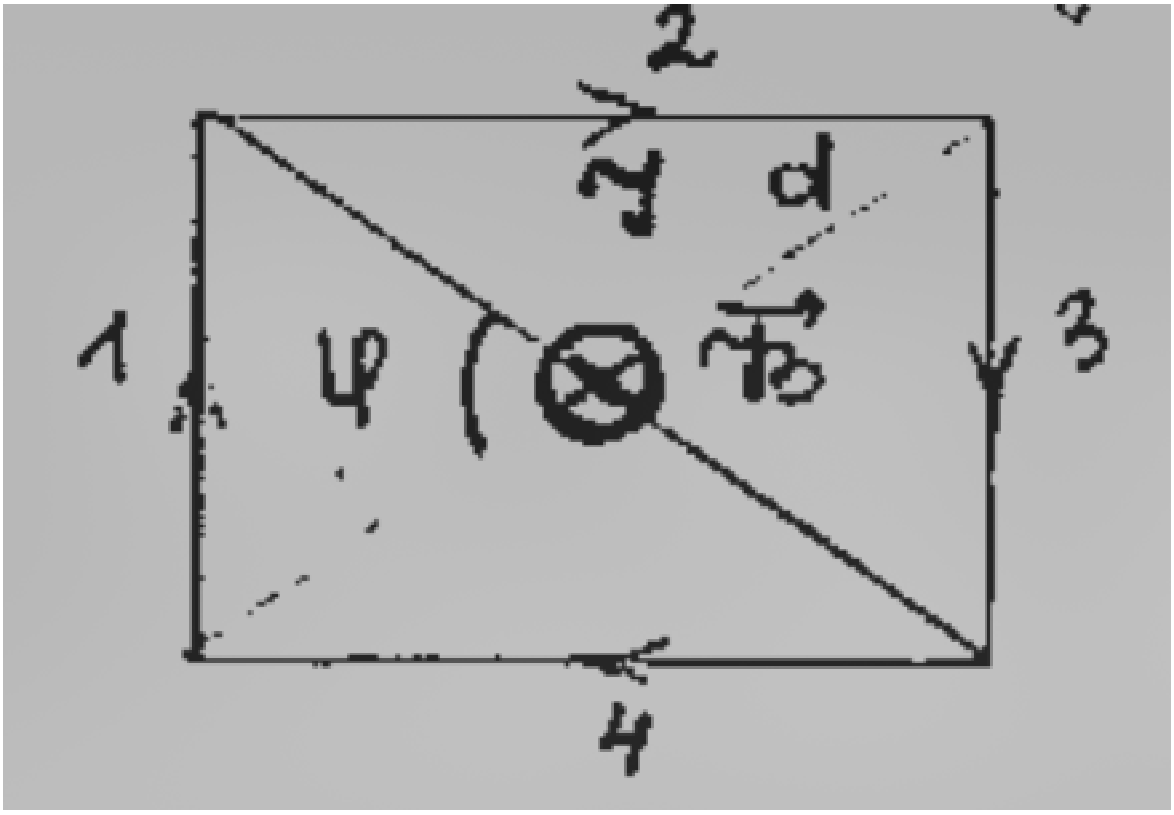


Рис. 13. Поясняющий рисунок.

В системе СИ: $d = 16$ см $= 0.16$ м.

По принципу суперпозиции для магнитного поля:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4. \tag{30}$$

Так как все $\vec{B}_i$ сонаправлены, то $B = 2(B_1 + B_2)$. По закону Био-Савара-Лапласа:

$$\begin{gathered} B = 2\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{\cos\frac{\pi-\varphi}{2}}{\frac{d}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} + \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\frac{d}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}\right)\right) = \\ = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{1}{\frac{d}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\right) = \frac{4\mu_0 I}{\pi d\sin\varphi} \end{gathered} \tag{31}$$

Подставив числа из условия, получим:

$$B = \frac{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{\pi \cdot 0.16 \cdot \sin 30^\circ} \approx 0.1 \tag{32}$$

Ответ: $B = 0.1$ мТл.

№5

Условие: Определить модуль вектора индукции магнитного поля на оси кругового тока I радиуса R, как функцию $B(z)$, где z расстояние до центра контура.

Решение:

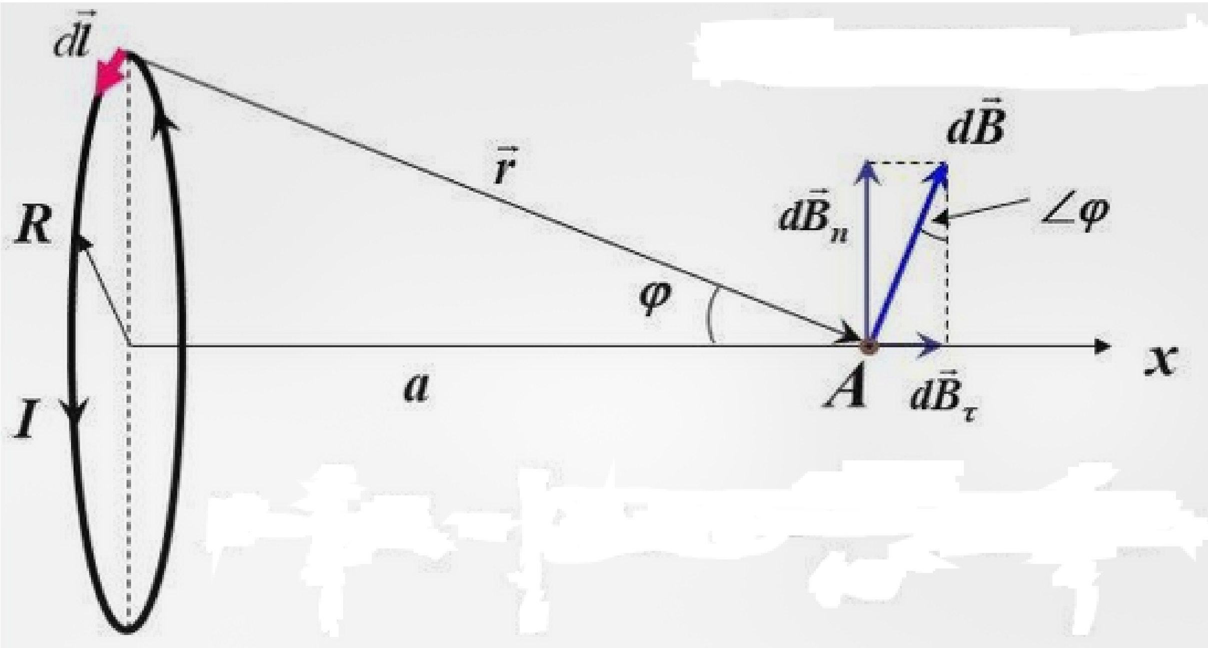


Рис. 14. Поясняющий рисунок.

Магнитное поле на оси кругового тока.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2} \tag{33}$$

$$\begin{gathered} B = \int_l dB_\tau = \int_l dB \sin\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin\varphi \int_l dl = \\ = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin\varphi 2\pi R = \frac{\mu_0 I R}{2\pi r^2} \sin\varphi \end{gathered} \tag{34}$$

Преобразуем полученное выражение, учитывая, что $\sin\varphi = \frac{R}{r}$, $r^2 = R^2 + a^2$. После подстановки получим

$$B = \frac{\mu_0 IR}{2r^2}\sin\varphi = \frac{\mu_0 IR}{2(R^2+a^2)}\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{35}$$

Ответ: $B(z) = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

№6

Условие: По тонкому замкнутому проводнику (Рис. 15) течёт ток, сила которого $I = 5$ А. Радиус изогнутой части проводника $R =$ 120 **мм**, угол $\varphi = 90°$. Рассчитать модуль вектора магнитной индукции в точке O.

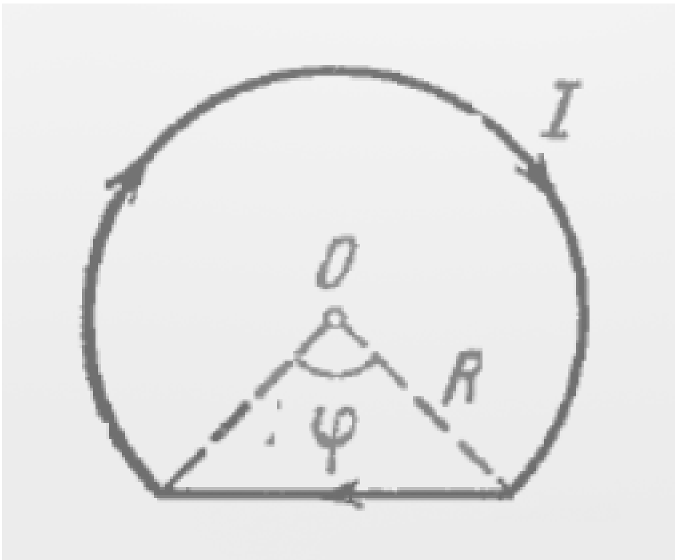


Рис. 15. Проводник.

Решение:

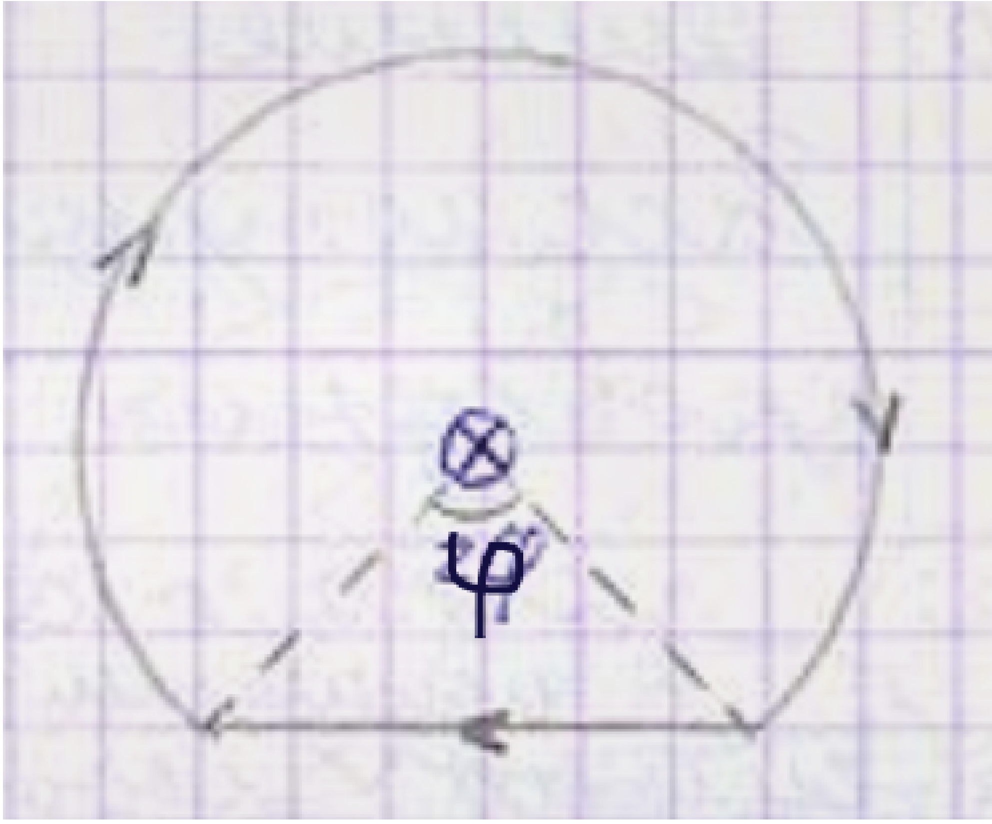


Рис. 16. Поясняющий рисунок.

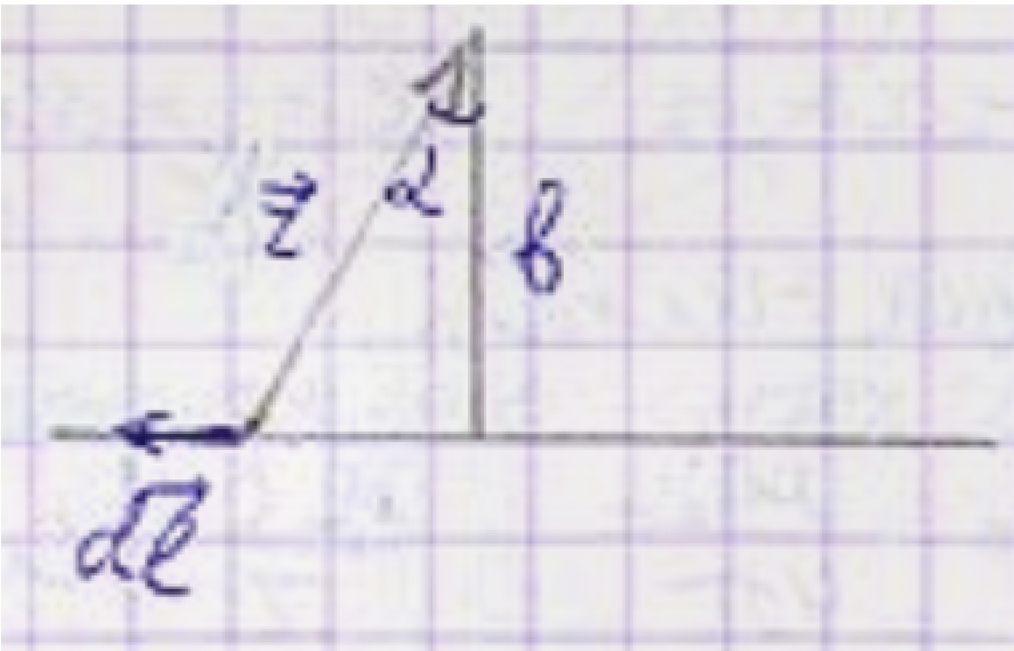
Пусть $\theta = \frac{\varphi}{2} = 45°$.

Для части окружности:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi - 2\theta} R d\alpha = \frac{\mu_0 I(\pi - \theta)}{2\pi R}. \tag{36}$$

Для отрезка:

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \angle\left(d\vec{l}; \vec{z}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} \cos\alpha \tag{37}$$



Поясняющий рисунок. 17. Рис.

$$\cos\alpha dl = zd\alpha \Rightarrow dl = \frac{zd\alpha}{\cos\alpha} \tag{38}$$

$$z = \frac{b}{\cos\alpha}, \quad b = R\cos\theta \tag{39}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{d\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot b}\cdot\cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R\cos\theta}\cdot 2\sin\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\operatorname{tg}\theta \tag{40}$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi - \theta + \tan\theta) \tag{41}$$

Подставив числа, получим:

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5}{2\pi\cdot 0.12}\left(\pi - \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) \approx 28 \text{ мкТл.} \tag{42}$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1 + \frac{3}{4}\pi\right) \approx 28$ мкТл.

№7

Условие: Замкнутый контур, по которому течёт ток силы I имеет форму показанную на (Рис. 18). Радиус окружности R, длина стороны квадрата a. Найти индукцию магнитного поля в точке O.

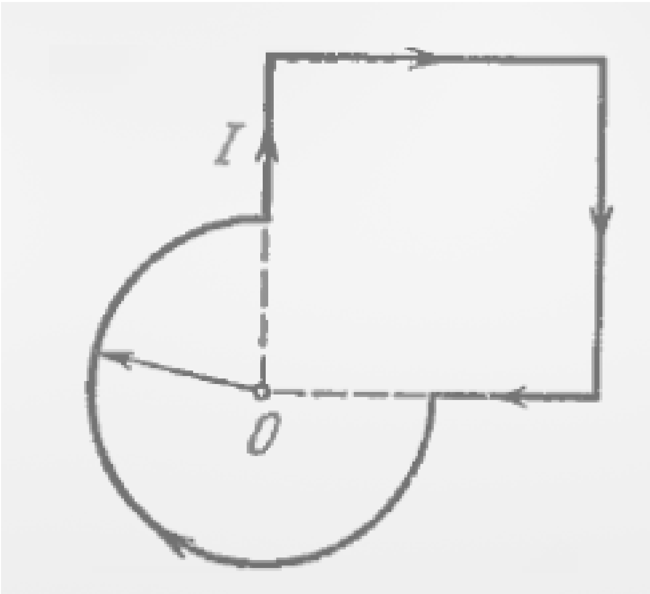


Рис. 18. Контур.

Решение:

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{3\pi}{2R} + \frac{\sqrt{2}}{a}\right)$.

№8

Условие: Тонкий провод с изоляцией образует плоскую спираль из $N = 200$ плотно прилегающих витков, по которым течёт ток $I =$ 5 мА. Радиус внутреннего витка $a = 100$ мм, радиус внешнего витка $b = 200$ мм. Рассчитать индукцию магнитного поля в центре спирали.

Решение: Магнитная индукция одного витка (окружности):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2z} \tag{43}$$

$$dN = \frac{N}{b-a}dz \tag{44}$$

Подставим 43 и 44 в

$$B = \int B_1 dN = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \int_a^b \frac{dz}{z} = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln z \,|_a^b = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a} \quad (45)$$

Подставим числа и получим

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 200}{2(0.2-0.1)} \ln \frac{0.2}{0.1} \approx 4.4 \text{ мкТл.} \quad (46)$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a} \approx 4.4$ мкТл.

№9

Условие: В параллельных плоскостях, расположенных на расстоянии $d = 8$ **см** друг от друга на одной оси находятся два круговых витка радиуса $R = 5$ **см** каждый. По виткам в одном направлении текут токи $I_1 = I_2 = 2$ А. Рассчитать напряжённость магнитного поля в центре одного из витков.

Решение:

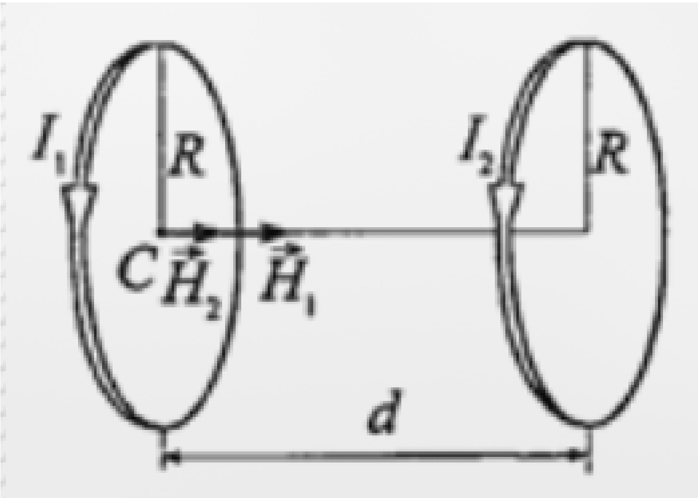


Рис. 19. Поясняющий рисунок.

Согласно принципу суперпозиции напряженность в точке C равна

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2, \quad \text{где} \quad H = \frac{I_1}{2R}, \quad (47)$$

$$H_2 = \frac{I_2 R^2}{2(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{48}$$

Если токи текут в одном направлении, то $H = H_1 + H_2$. По условию

$$I_1 = I_2 = I \tag{49}$$

Тогда

$$H = \frac{I}{2R} + \frac{IR^2}{2(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{50}$$

Подставив числа, получим:

$$H = \frac{2}{2\cdot 0.05} + \frac{2\cdot 0.05^2}{2(0.05^2+0.08^2)^{\frac{3}{2}}} \approx 23 \text{ А/м}. \tag{51}$$

Ответ: $H = \frac{I}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{R^2}{(d^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \approx 23$ А/м.

№10

Условие: Рассчитать модуль вектора магнитной индукции на оси соленоида, длина которого l, количество витков проволоки, плотно прилегающих друг к другу равно N . Через витки течёт ток I, радиус витков R_0.

Решение:

Ответ: $B(z) = \frac{\mu_0 IN}{2l}\left(\frac{\frac{l}{2}-z}{\sqrt{R_0^2+\left(\frac{l}{2}-z\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2}+z}{\sqrt{R_0^2+\left(\frac{l}{2}+z\right)^2}}\right)$.

Закон полного тока

№1

Условие: Используя закон полного тока, найти модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого током текущим по коаксиальному кабелю. Ток I течёт по центральной жиле радиуса R_1, и возвращается по оболочке, внутренний и внешний радиусы которой R_2 и R_3 соответственно. Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком. Магнитную проницаемость всюду считать равной 1.

Решение:

Ответ: $B(r < R_1) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$, $B(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $B(R_2 < r < R_3) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$, $B(r > R_3) = 0$.

№2

Условие: Определить индукцию магнитного поля тока, равномерно распределённого:

- по бесконечной плоскости с линейной плотностью j;
- по двум параллельным бесконечным плоскостям с линейными плотностями j и $-j$.

Решение:

а)

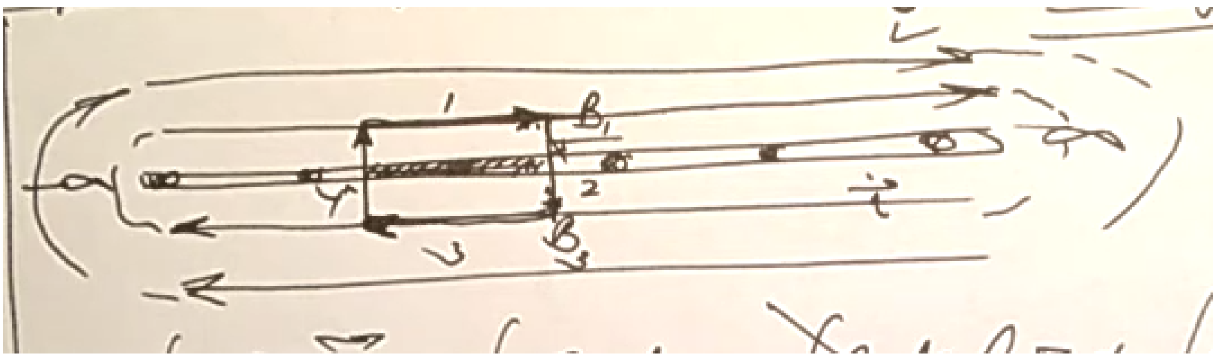


Рис. 20. Поясняющий рисунок.

По закону полного тока:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{полн}} \tag{52}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} B_1 \cdot dl + \int_{l_2} B_2 \cdot dl \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \int_{l_3} B_3 dl \cos 0 + \int_{l_4} B_4 dl \cos\frac{\pi}{2} = 2Bl \tag{53}$$

$$I_{\text{полн}} = j \cdot l \tag{54}$$

$$2Bl = \mu_0 il \Rightarrow B = \frac{1}{2}\mu_0 j \tag{55}$$

б)

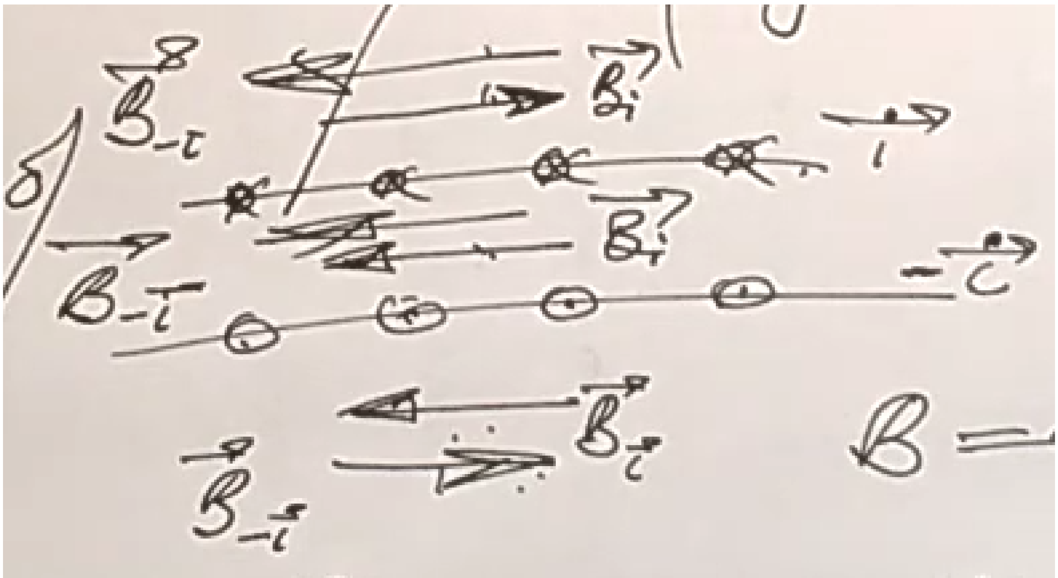


Рис. 21. Поясняющий рисунок.

$$\vec{B} = \vec{B}_{\vec{j}} + \vec{B}_{-\vec{j}} \tag{56}$$

$B = 0$ вне плоскостей.

$$B = 2B_{\text{пл}} = \mu_0 j \text{ между плоскостями.} \tag{57}$$

Ответ: а) $B = \frac{\mu_0 j}{2}$, б) $B = \mu_0 j$.

№3

Условие: Однородный ток, плотность которого j течёт внутри неограниченной пластины толщины $2d$ параллельно её поверхности. Найти индукцию магнитного поля этого тока, как функцию расстояния x от средней плоскости пластины. Магнитную проницаемость всюду считать равной 1.

Решение:

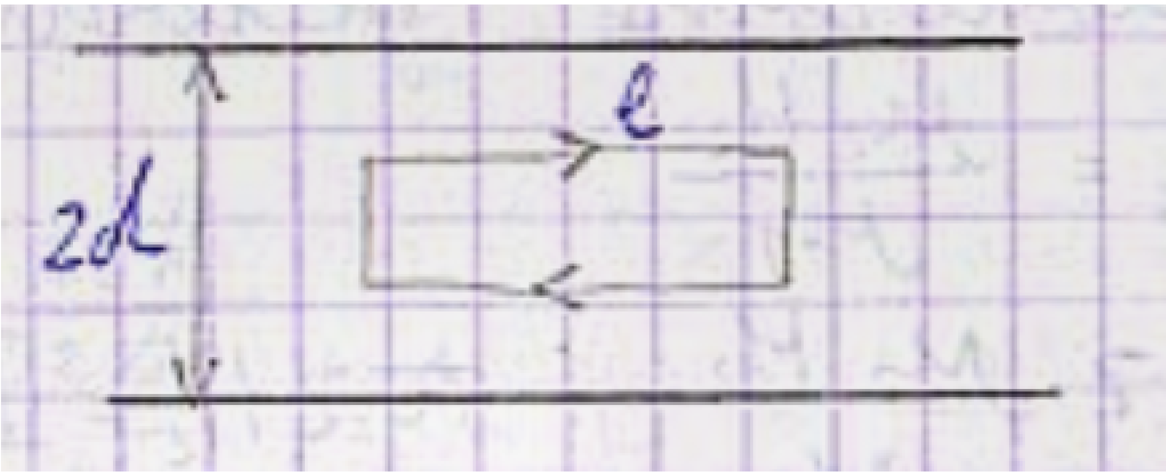


Рис. 22. Поясняющий рисунок.

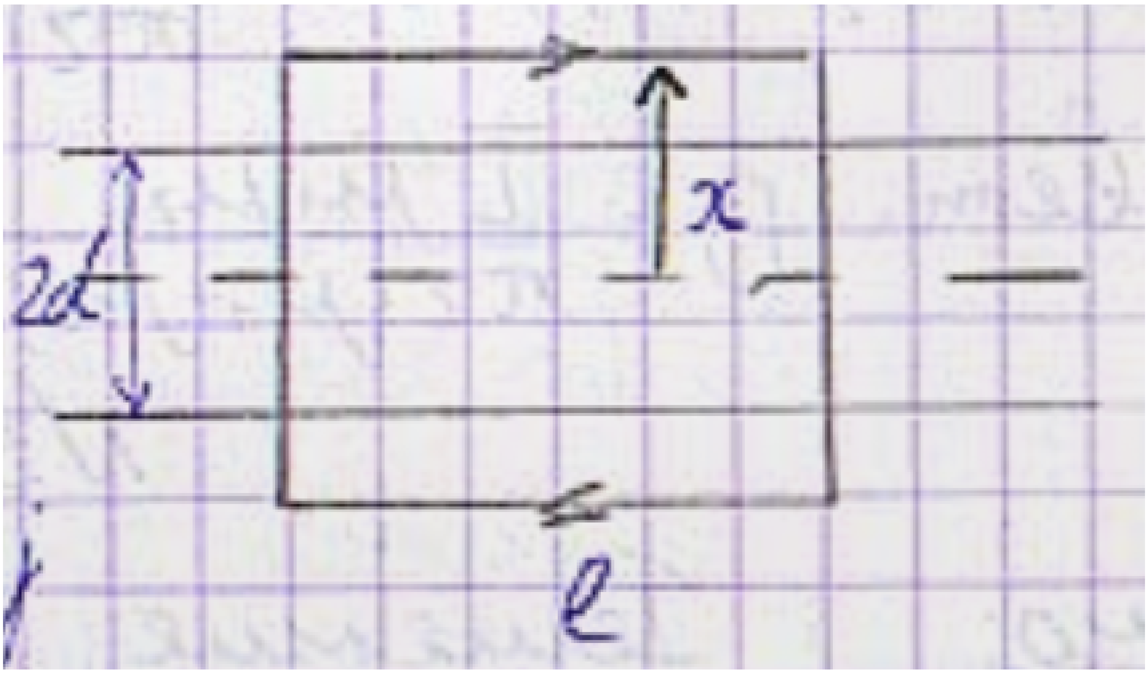


Рис. 23. Поясняющий рисунок.

По теореме о циркуляции

$$\oint B dz = \mu_0 j 2xl \tag{58}$$

$$I = 2xlj \tag{59}$$

Если $l \gg x$, то интегралом по $\perp$ составляющим можно пренебречь, тогда:

$$B \cdot 2l = \mu_0 \cdot 2xlj \tag{60}$$

$$B = \mu_0 xj \tag{61}$$

Возьмем $x > d$

$$\oint B dz = \mu_0 I = \mu_0 \cdot 2dlj \tag{62}$$

$$B \cdot 2l = \mu_0 \cdot 2dlj, \quad B = \mu_0 dj \tag{63}$$

Ответ: $B(x > d) = \mu_0 dj,\ B(x < d) = \mu_0 xj.$

№4

Условие: Найти вектор плотности тока, как функцию расстояния r от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от r как $B(r) = \beta r^{\alpha}$, где β и α положительные постоянные.

Решение:

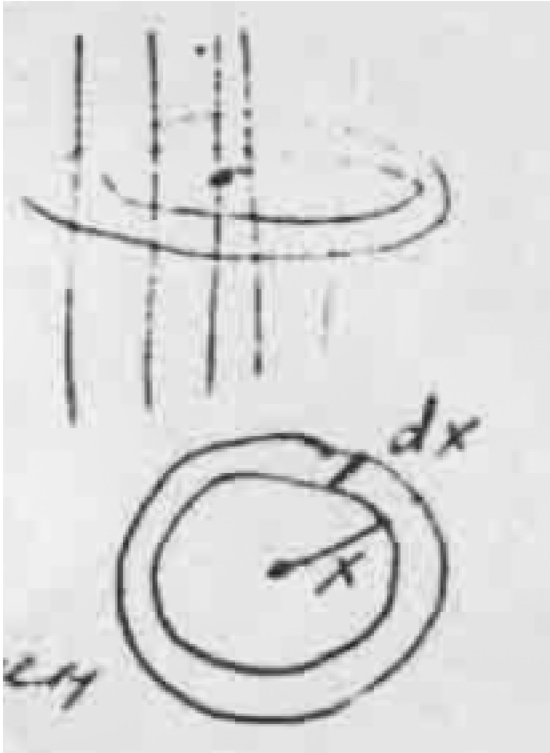


Рис. 24. Пояснительный рисунок.

Возьмем контур, $\perp$ пучку радиуса r и центром в центре пучка, тогда

$$\oint Bdr = \beta r^2 \cdot 2\pi r = 2\pi\beta r^{\alpha+1} \tag{64}$$

Пусть $j = j(r)$, тогда

$$\int_r jdS = \int_0^r 2\pi x j(x) dx \tag{65}$$

Итого

$$\begin{gathered} 2\pi\beta r^{\alpha+1} = \int^r 2\pi\mu_0 x j(x) dx = \\ = \beta r^{\alpha+1} = \mu_0 \int_0^r x j(x) dx \end{gathered} \tag{66}$$

Дифференцируем по r

$$\beta(\alpha+1)r^{\alpha}=\mu_0 rj(r)\Rightarrow j(r)=\frac{\beta(\alpha+1)}{\mu_0}r^{\alpha-1} \tag{67}$$

Ответ: $\vec{j}(r)=\frac{\beta(\alpha+1)r^{\alpha-1}}{\mu_0}\vec{e}_z$.

№5

Условие: Используя закон полного тока, рассчитать индукцию магнитного поля внутри соленоида длиной $L=0.5$ м, содержащего $N=1000$ витков плотной обмотки, если сопротивление обмоток $R=120$ Ом, а напряжение на её концах $U=60$ В.

Решение:

$$\oint_L BdL=\mu_0\sum_i I_i, \quad BL=\mu_0 IN \tag{68}$$

$$I=\frac{U}{R}, \quad B=\frac{\mu_0 UN}{RL} \tag{69}$$

Подставим числа:

$$B=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot60\cdot1000}{120\cdot0.5}\approx1.25 \text{ мТл.} \tag{70}$$

Ответ: $B=1.25$ мТл.

№6

Условие: По бесконечному прямому проводу, радиус сечения которого R, течёт постоянный ток, плотность которого $\vec{j}$. Найти вектор магнитной индукции поля, создаваемого этим током, в точке, положение которой относительно оси провода определяется радиус-вектором $\vec{r}$.

Решение:

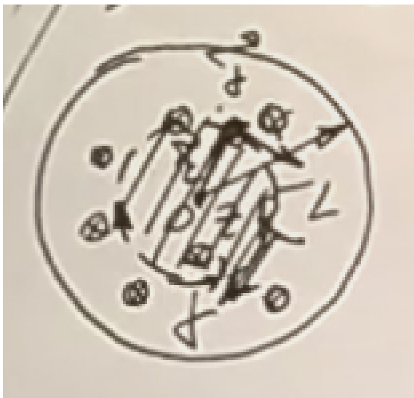


Рис. 25. Поясняющий рисунок.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int B \cdot dl \cdot \cos 0^\circ = B \cdot 2\pi r \tag{71}$$

$$I_{\text{полн}} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int j d\vec{S} = j \cdot \pi r^2 \tag{72}$$

При $r < R$:

$$B \cdot 2\pi r = j\pi r^2 \mu_0 \Rightarrow B = \frac{1}{2}\mu_0 j r \tag{73}$$

$$\vec{B}_1 = B_1 \cdot \vec{e}_\varphi \quad \vec{B}_1 = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{j} \times \vec{r} = \frac{\mu_0}{2}[\vec{j}, \vec{r}] \tag{74}$$

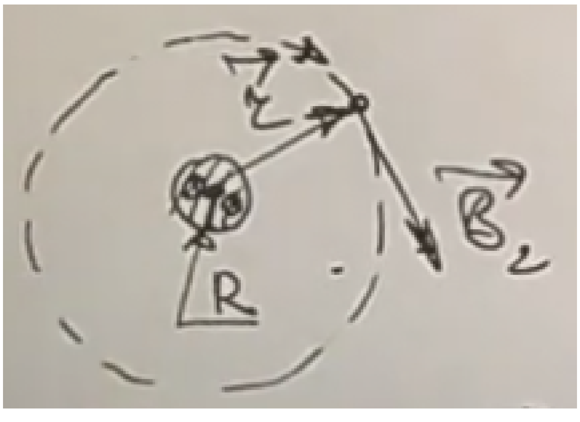


Рис. 26. Поясняющий рисунок.

При $r > R$:

$$I_{\text{полн}} = j \cdot \pi R^2 \tag{75}$$

$$B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi R^2 \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 R^2}{2} \frac{j}{r} \vec{e}_\varphi \tag{76}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 R^2}{2} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^2} \tag{77}$$

Ответ: $\vec{B}(r < R) = \frac{\mu_0 [\vec{j}; \vec{r}]}{2}$, $\vec{B}(r > R) = \frac{\mu_0 R^2 [\vec{j}; \vec{r}]}{2}$.

№7

Условие: По длинному цилиндрическому проводу течёт ток, плотность которого $\vec{j}$. Внутри провода имеется цилиндрическая полость, идущая параллельно оси провода. Расстояние от оси провода до оси полости задаётся вектором $\vec{l}$. Найти вектор индукции магнитного поля внутри полости.

Решение:

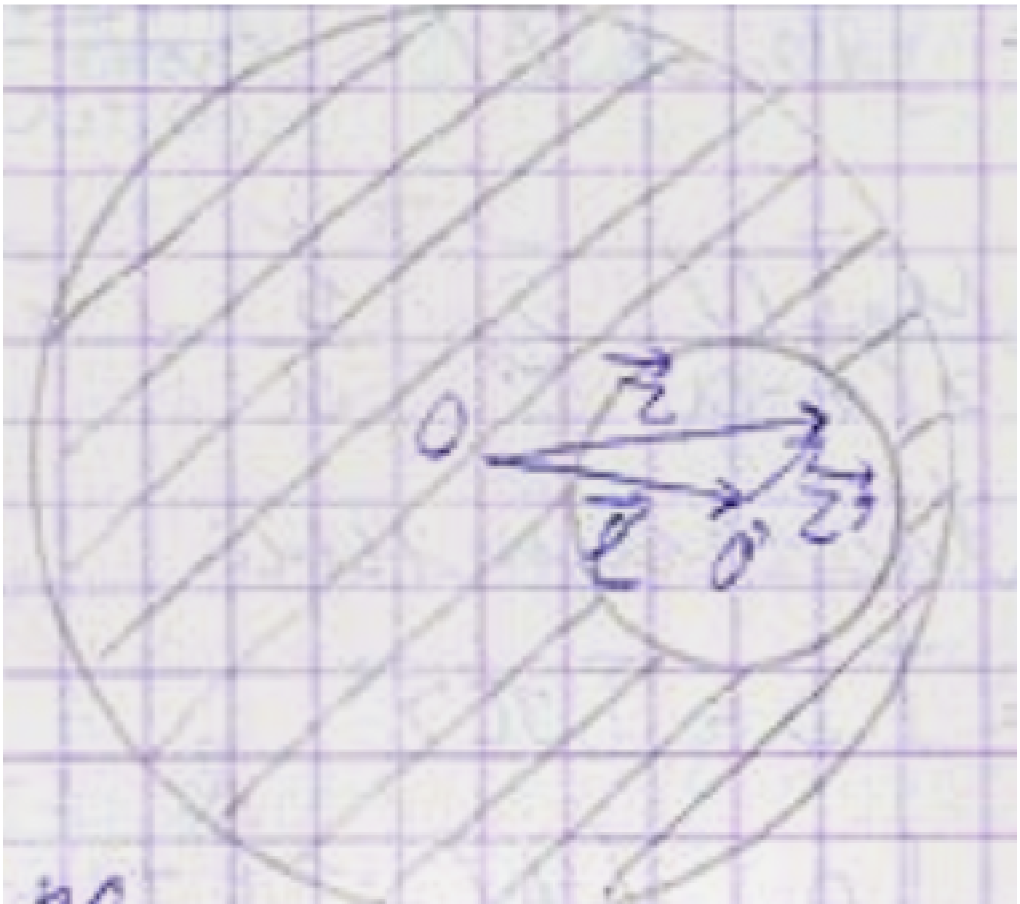


Рис. 27. Поясняющий рисунок.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}', \tag{78}$$

где $\vec{B}_0$ - если проводник сплошной.

$\vec{B}'$ - от тока, текущего по той части проводника, которую удалили.

То теореме о циркуляции:

$$2\pi z B_0 = \mu_0 \pi z^2 j \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2}\mu_0 z j \tag{79}$$

Или в векторной форме

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{2}\mu_0[\vec{\jmath}; \vec{z}] \tag{80}$$

$$\vec{B}' = \frac{1}{2}\mu_0[\vec{\jmath}; \vec{z}'] \tag{81}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0[\vec{\jmath}; \vec{z} - \vec{z}'] = \frac{1}{2}\mu_0\left[\vec{\jmath}; \vec{l}\right] \tag{82}$$

Ответ: $\vec{B} = \frac{\mu_0\left[\vec{\jmath};\vec{l}\right]}{2}$.

№8

Условие: Ток I течёт по длинному проводу и затем равномерно растекается по всем направлениям однородной проводящей среды (Рис. 28). Рассчитать индукцию магнитного поля в точке A, отстоящей от точки O на расстоянии r под углом θ.

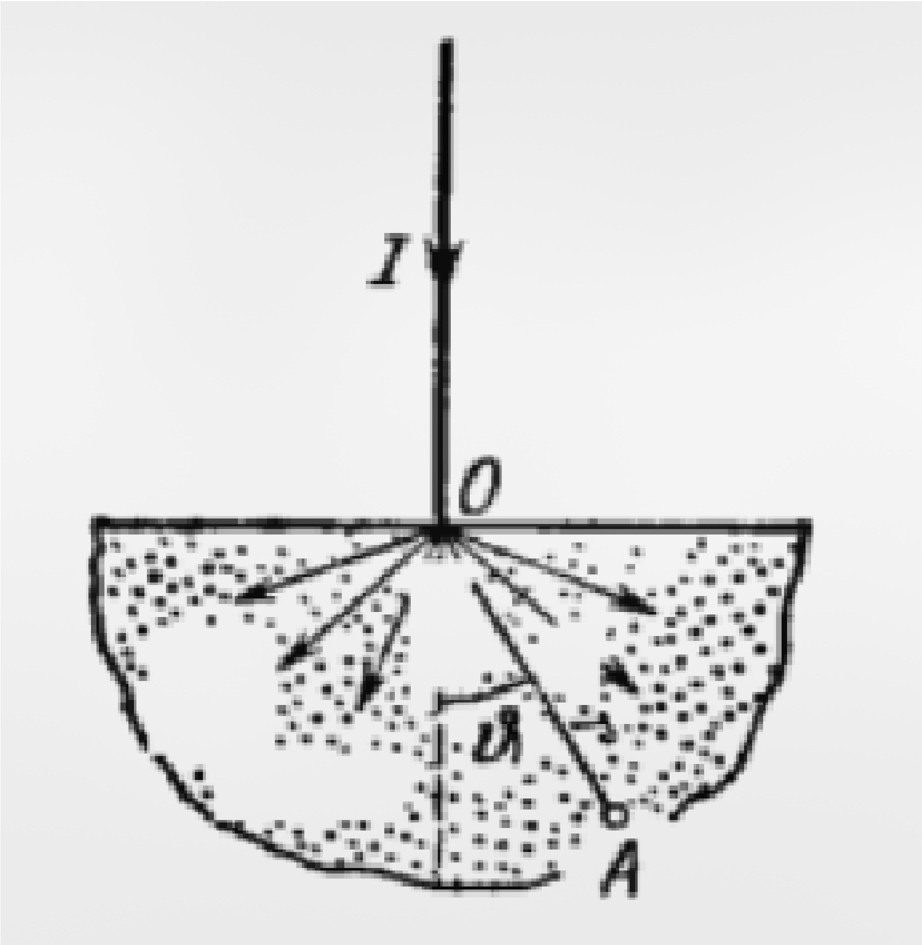


Рис. 28. Проводящая среда.

Решение:

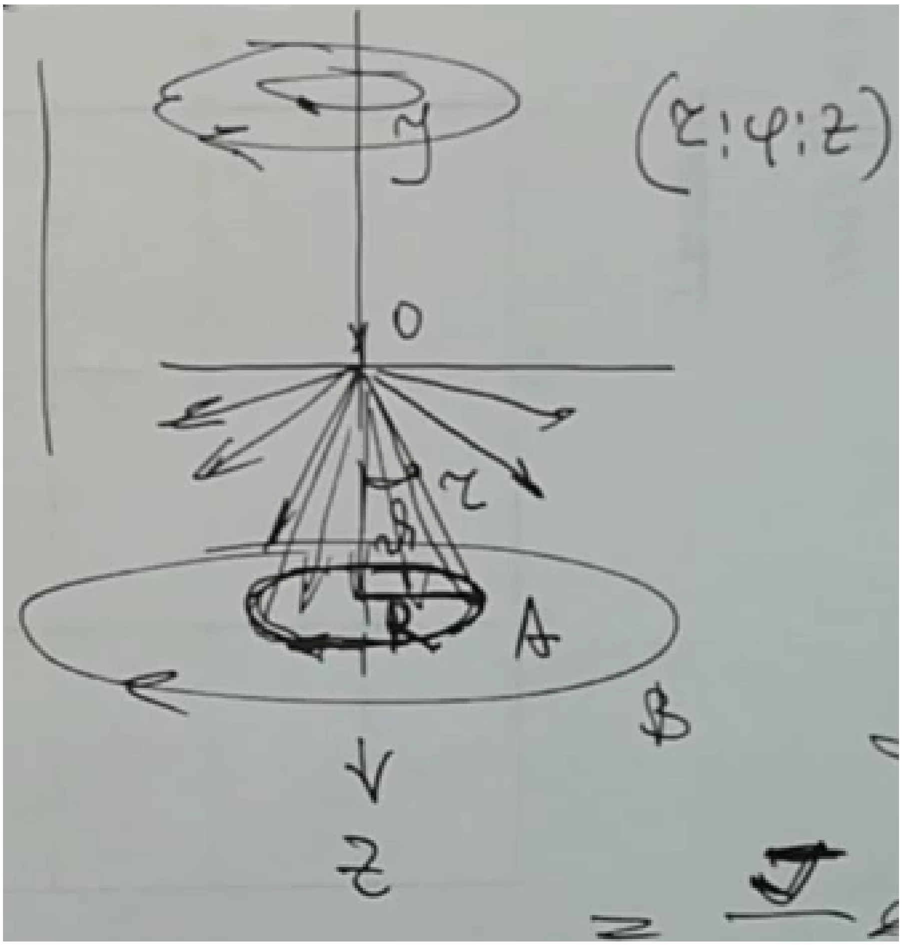


Рис. 29. Поясняющий рисунок.

Система обладает аксиальной симметрией.

$$\vec{B}\Big(0; B_\varphi; z\Big) \Rightarrow \oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{охв}}. \tag{83}$$

$$B = B(R) \tag{84}$$

$$B \cdot 2\pi R = B 2\pi r \sin\theta \tag{85}$$

$$J = \frac{dI}{d\omega} = \frac{I}{2\pi} = \text{const} \tag{86}$$

$$I_{\text{охв}} = \int_0^\theta I \cdot \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2\pi} 2\pi \cos\theta \mid_\theta^0 = I(1 - \cos\theta) \tag{87}$$

85 и 87 подставляем в 83

$$B \cdot 2\pi r \sin\theta = \mu_0 I(1-\cos\theta) \tag{88}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \sin\theta}(1-\cos\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \tag{89}$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\tan\frac{\theta}{2}$.

№9

Условие: Ток I течёт по длинному прямому проводу круглого сечения. Рассчитать поток магнитного поля через половину осевого сечения провода приходящейся на один метр его длины.

Решение: Считаем, что ток распределен по сечению равномерно с плоскостью

$$j = \frac{I}{\pi R^2} \tag{90}$$

Согласно теореме Стокса:

$$\oint B dr = \mu_0 I \text{ (через сечение)}. \tag{91}$$

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2 \tag{92}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{r^2}{R^2}\frac{1}{r} \tag{93}$$

Поток через половину сечения на единицу длины

$$\Phi = \int_0^R dr B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^R \frac{r dr}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I. \tag{94}$$

Ответ: $\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$.

Магнитное поле при наличии Магнетиков. Магнитный момент.

№1

Условие: Найти магнитный момент тонкого кругового витка с током, если радиус витка $R = 100$ **мм**, а индукция магнитного поля в центре $B = 6$ мкТл.

Решение:

Рис. 30. Поясняющий рисунок

$$p_m = I \cdot S; \quad B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{4\pi \cdot R^2} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot 2\pi \cdot R}{4\pi \cdot R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R} \Rightarrow I = \frac{B \cdot 2R}{\mu_0} \tag{95}$$

$$p_m = \frac{B \cdot 2R}{\mu_0} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{2\pi \cdot B \cdot R^3}{\mu_0} \tag{96}$$

Подставим числа и получим

$$p_m = \frac{6.28 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 0.1^3}{1.27 \cdot 10^{-6}} \approx 30 \text{ мА/м}^2 \tag{97}$$

Ответ: $p_{\text{м}} = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} \approx 30$ мА/м^2.

№2

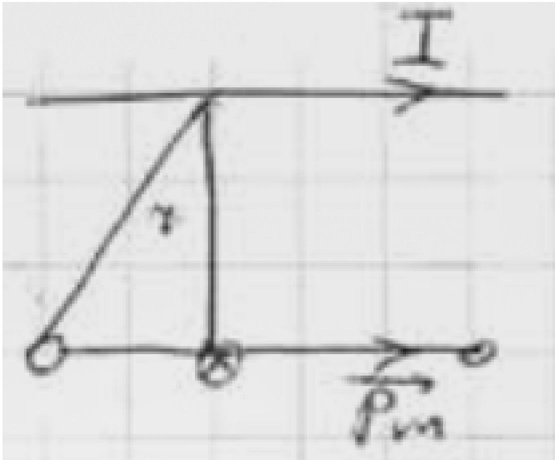
Условие: Магнитный диполь, момент которого $\vec{p}_{\text{м}}$ поместили на расстояние r от длинного провода по которому течёт ток I. Найти вектор силы действующей на диполь со стороны магнитного поля, создаваемого током I если вектор магнитного момента:

- параллелен проводнику;
- направлен по вектору $\vec{r}$;

- совпадает по направлению с магнитным полем тока I.

Решение:

а)

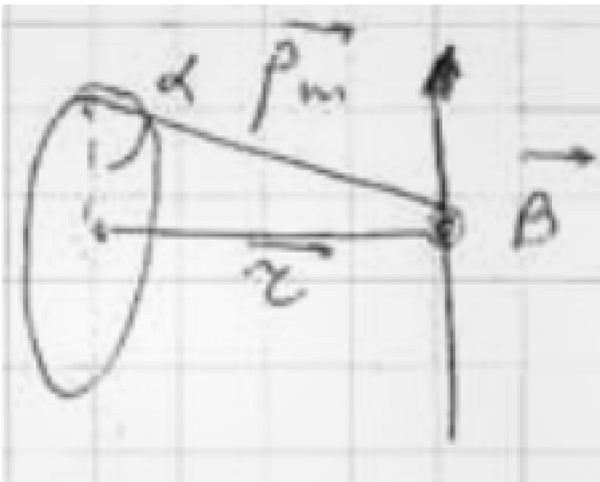


31.

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos\alpha \tag{98}$$

$$\cos\alpha = 0 \Rightarrow F = 0 \tag{99}$$

б)



32.

$$W_п = -p_m B \cos\varphi \tag{100}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \cos\varphi} \tag{101}$$

$$r' = r\cos\varphi \tag{102}$$

$$F_x = -p_m \frac{\partial B}{\partial r}\cos\varphi = -\left(p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi\cos\varphi}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right)\cos\varphi = \frac{p_m \mu_0 I}{2\pi r^2} \tag{103}$$

в)

$$F_x = -p_m \frac{\partial B}{\partial x}\cos\alpha = \frac{p_m \mu_0 I}{2\pi r^2}. \tag{104}$$

Ответ: а) $\vec{F} = \vec{0}$, б) $\vec{F} = -\frac{\mu_0 p_м I}{2\pi r^2}\vec{e}_\varphi$, в) $\vec{F} = -\frac{\mu_0 p_м I}{2\pi r^2}\vec{e}_r$.

№3

Условие: Тонкий диск из диэлектрика, несущий заряд поверхностная плотность которого σ равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Рассчитать:

- индукцию магнитного поля в центре диска;
- магнитный момент диска.

Решение:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad dq = \sigma dS \tag{105}$$

$$I = \frac{\sigma dS\omega}{2\pi} = \frac{\sigma\omega 2\pi r dr}{2\pi} = \sigma\omega r dr \tag{106}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I[dl, r]}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{dl r\sin\alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I\cdot 2\pi\cdot r}{4\pi\cdot r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r} \tag{107}$$

а) $B = \int_0^R \frac{\mu_0\sigma\omega r dr}{2R} = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$

б) $p_m = \int IdS = \int\sigma\omega\pi r^3 dr = \frac{\sigma\omega\pi R^4}{4}$

Ответ: $B = \frac{\mu_0}{2}\sigma\omega R,\ p_m = \frac{\pi\sigma R^4}{4}$.

№4

Условие: Сферическая поверхность радиуса R, состоящая из диэлектрика вращается равномерно вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω. Рассчитать магнитную индукцию в центре сферы если поверхностная плотность зарядов равна σ.

Решение:

Ответ: $B = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R$.

№5

Условие: Вдоль оси бесконечного прямого цилиндра радиуса R_0 течёт линейный ток силой I. Магнитная проницаемость вещества цилиндра μ. Вокруг цилиндра вакуум. Найти:

- напряженность магнитного поля $\vec{H}$;
- индукция магнитного поля $\vec{B}$;
- намагниченность $\vec{J}$;

во всех точках пространства. Рассчитать объёмную и поверхностную плотность молекулярных токов.

Решение:

Ответ: $\vec{H}(r < R_0) = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \vec{H}(r > R_0)$, $\vec{B}(r < R_0) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$, $\vec{J}(r < R_0) = \frac{I(\mu-1)}{2\pi r}\vec{e}_\varphi, \vec{B}(r > R_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi, \vec{J}(r > R_0) = \vec{0}, \vec{\jmath}_{\text{мо}} = \vec{0}, j_{\text{мп}} = \frac{I(1-\mu)}{2\pi R_0}$.

№6

Условие: Среда состоит из однородного изотропного магнетика и вакуума. Модуль вектора индукция магнитного поля вблизи поверхности магнетика со стороны вакуума равен B. Найти модуль индукции магнитного поля B' в магнетике вблизи его поверхности, если вектор B составляет угол α с нормалью к поверхности раздела магнетика и вакуума (поверхность можно считать плоскостью), а магнитная проницаемость магнетика μ.

Решение:

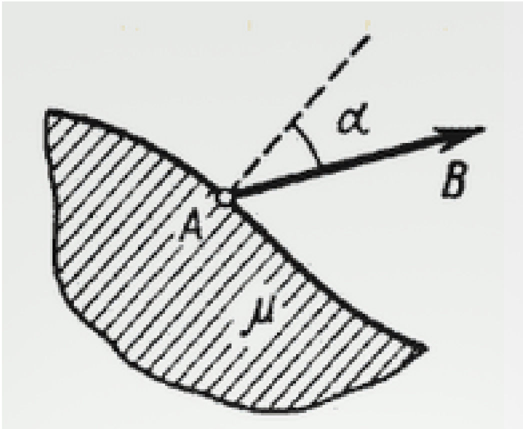


Рис. 33. Поясняющий рисунок.

$$B' = \sqrt{B_n^2 + B_\tau^2} \tag{108}$$

$$B_{2n} = B_{1n} \tag{109}$$

$$H_{2\tau} = H_{1\tau} \tag{110}$$

$$B_n = B\cos\alpha \tag{111}$$

$$B_\tau = \mu\mu_0 H_\tau = \mu\mu_0 H_{0\tau} = \mu(B)_\tau = \mu B\sin\alpha \tag{112}$$

$$B' = B\sqrt{\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha} \tag{113}$$

Ответ: $B' = B\sqrt{\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha}$.

№7

Условие: Воспользовавшись условиями предыдущей задачи рассчитать циркуляцию вектора $\vec{B}$ по замкнутому квадратному контуру, длина стороны которого l. Граница раздела сред пересекает контур параллельно двум его противоположным сторонам.

Решение:

Ответ: $\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = B\sin\alpha l(1-\mu)$.

№8

Условие: По длинному цилиндрическому проводу течёт ток перпендикулярно плоскости поперечного сечения. Сила тока I. Провод изготовлен из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ. Найти:

- силу поверхностного молекулярного тока $I'_{\text{пов}}$;
- силу объемного молекулярного тока $I'_{\text{об}}$.

Определить как эти токи направлены друг относительно друга.

Решение: Внутри цилиндрического провода имеется внешний ток плотности $\frac{I}{\pi R^2}$. Это дает магнитное поле H_ϕ с

$$H_\phi 2\pi r = I\frac{r^2}{R^2} \quad \text{или,} \quad H_\phi = \frac{Ir}{2\pi R^2} \tag{114}$$

Из этого $B_\phi = \frac{\mu\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$ и $J_\phi = \frac{\mu-1}{2\pi}\frac{Ir}{R^2} = \frac{\chi I}{2\pi R}dl = \chi I =$ намагниченность.

Следовательно, объемный молекулярный ток,

$$\oint_{r=R} \vec{J}_\phi \cdot d\vec{r} = \int \frac{\chi I}{2\pi R}dl = \chi I \tag{115}$$

Поверхностный ток получается с использованием эквивалентности плотности поверхностного тока к $\vec{J}\times\vec{n}$, это приводит к плотности поверхностного тока в z-направлении $-\frac{\chi I}{2\pi R}$

Поверхностный молекулярный ток

$$I'_{\text{пов}} = -\frac{\chi I}{2\pi R}(2\pi R) = -\chi I \tag{116}$$

Оба тока имеют противоположные знаки.

Ответ: $I_{\text{мо}} = I_\chi,\ I_{\text{мп}} = -I_\chi$.

№9

Условие: Длинный соленоид заполнен неоднородным парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого зависит от расстояния до оси как $\chi = \alpha r^2$. На оси соленоида магнитная индукция равна B_0. Рассчитать, как функцию r:

- намагниченность магнетика;
- плотности объемного молекулярного тока.

Решение:

Ответ: $J(r) = \frac{B_0 \alpha r^2}{\mu_0}$, $j(r) = \frac{2\alpha B_0}{\mu_0} r$.

Частица в магнитном поле

№1

Условие: Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью перпендикулярной полю. Напряжённость магнитного поля $H = 103$ А/м. Ускоряющая разность потенциалов, придавшая электрону скорость $U = 400$ В. Рассчитать радиус кривизны траектории R и частоту v обращения электрона в магнитном поле.

Решение:

Ответ: $R = \frac{1}{\mu_0 H}\sqrt{\frac{2U}{q_m}} \approx 5.37$ см, $\nu = \frac{\mu_0 H q_m}{2\pi} \approx 35$ МГц.

№2

Условие: В однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 0.4$ Тл перпендикулярно полю с постоянной скоростью влетает заряженная частица. В течении 6 мкс включается постоянное электрическое поле напряжённостью $E = 300$ В/м сонаправленно магнитному полю. Рассчитать шаг винтовой траектории частицы после выключения электрического поля.

Решение: По формуле силы Лоренца:

$$\vec{F} = q\Big(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\Big) \tag{117}$$

До включения электрического поля:

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{F} = q\Big(\vec{v} \times \vec{B}\Big) \tag{118}$$

Частица движется по окружности

$$F_{\text{маг}} = qvB. \tag{119}$$

Сила Лоренца равна центростремительной силе:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} \tag{120}$$

Угловая частота:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} \tag{121}$$

Когда включается электрическое поле вдоль магнитного поля, на частицу вдоль B действует $F = qE$. Соответственно вдоль оси B ускорение $a = \frac{qE}{m}$.

За время Δt скорость вдоль оси становится:

$$v = a\Delta t = \frac{qE}{m}\Delta t \tag{122}$$

После выключения электрического поля частица летит в магнитном поле с постоянной перпендикулярной скоростью и параллельной, то есть по винтовой траектории.

Расстояние за один оборот:

$$h = vT, \tag{123}$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$ - период кругового движения.

Подставим:

$$h = vT = \frac{qE}{m}\Delta t \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi E\Delta t}{B} \tag{124}$$

Подставим числа:

$$h = \frac{2\pi \cdot 300 \text{ В/м} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ с}}{0.4 \text{ Тл}} \approx 0.28 \text{ м.} \tag{125}$$

Ответ: $h = \frac{2\pi E}{B}t \approx 0.028$ м.

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

№1

Условие: В однородное магнитное поле, индукция которого $B = 1$ Тл внесли квадратный контур со стороной $a = 10$ **см**, по которому течёт ток $I = 100$ А, после чего контур свободно устанавливается в магнитном поле под действием механического момента. Рассчитать работу A', совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон на угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Решение:

Ответ: $A = BIa^2 = 1$ Дж.

№2

Условие: Магнитное поле создаётся длинным прямым проводником, по которому течёт ток I_0. В одной плоскости с проводником расположена квадратная рамка с током I, сторона рамки a. Рассчитать:

- силу ампера действующую на рамку;
- работу, которую необходимо совершить при медленном повороте рамки вокруг оси параллельной проводнику на угол $180°$, проходящей через центры противоположных сторон рамки;

если расстояние от этой оси до проводника в η раз больше стороны рамки.

Решение:

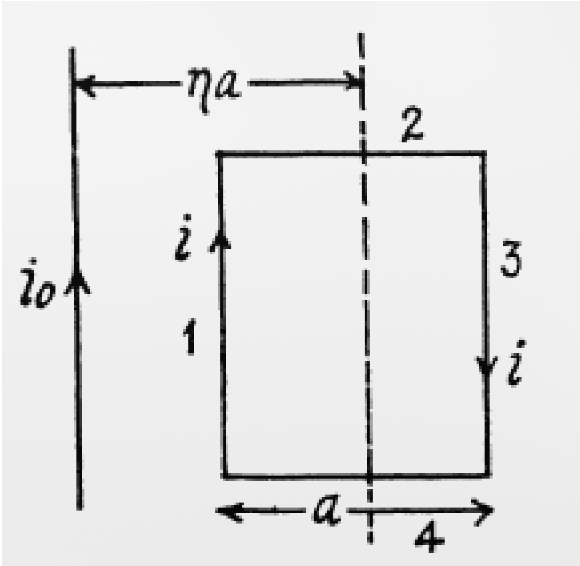


Рис. 34. Поясняющий рисунок.

а) Как видно из условия, силы Ампера на сторонах (2) и (4) равны по величине, но противоположны по направлению. Следовательно, чистая эффективная сила на рамке является результатом сил, испытываемых сторонами (1) и (3).

Теперь сила Ампера на (1),

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I I_0}{\left(\eta - \frac{1}{2}\right)} \tag{126}$$

и на (3),

$$F_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 I}{\left(\eta + \frac{1}{2}\right)} \tag{127}$$

Итак, результирующая сила на рамке $= F_1 - F_3$, (поскольку они противоположны).

$$= \frac{2\mu_0 I I_0}{\pi(4\eta^2 - 1)} \tag{128}$$

б) Выполненная работа при повороте рамки на некоторый угол $A = \int I d\Phi = I(\Phi_{\text{кон}} - \Phi_{\text{нач}})$, где $\Phi_{\text{кон}}$ - поток через рамку в конечном положении, а $\Phi_{\text{нач}}$ - в исходное положение.

Итак, $|\Phi_{\text{кон}}| = |\Phi_{\text{нач}}| = \Phi$ и $\Phi_{\text{нач}} = -\Phi_{\text{кон}}$ значит,

$$\Delta\Phi = 2\Phi \quad \text{и} \quad A = I2\Phi \tag{129}$$

Следовательно

$$A = 2I\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = 2I\int_{a\left(\eta-\frac{1}{2}\right)}^{a\left(\eta+\frac{1}{2}\right)} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_0 a}{r}dr = \frac{\mu_0 I I_0 a}{\pi}\ln\left(\frac{2\eta+1}{2\eta-1}\right) \tag{130}$$

Ответ: $F_A = \frac{2\mu_0 I I_0}{\pi(4\eta^2-1)}$, $A = \frac{\mu_0 I_0 I a}{\pi}\ln\left(\frac{2\eta+1}{2\eta-1}\right)$.

Электромагнитная индукция

Индукция токов. Закон электромагнитной индукции Фарадея

№1

Условие: В однородном магнитном поле, с индукцией модуль которой B, расположен замкнутый контур (Рис. 35). Верхнюю часть контура, представляющую с собой полуокружность радиуса R_0 вращают вокруг оси OO' с постоянной угловой частотой ω. Найти э.д.с. индукции возникающую в контуре, как функцию времени, если в момент $t = 0$ магнитный поток через контур максимальный.

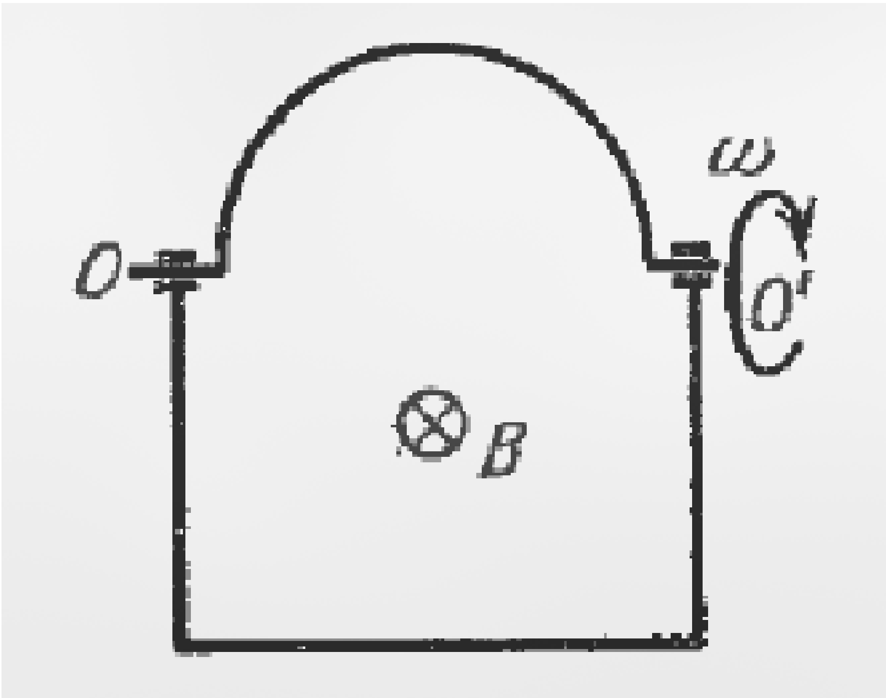


Рис. 35. Контур.

Решение:

Ответ: $\mathcal{E}^{\text{инд}} = \frac{\pi}{2} R_0^2 B\omega \sin\omega t.$

№2

Условие: В однородном магнитном поле, модуль индукции которого $B = 0.4$ Тл, с постоянной частотой $\nu = 480$ об/мин вращается замкнутая рамка, состоящая из $N = 1000$ витков проволоки. Площадь ограниченная контуром рамки $S = 200$ см^2. Рассчитать значение эдс индукции в момент, когда угол между нормалью к рамке и вектором магнитной индукции равен $30°$.

Решение:

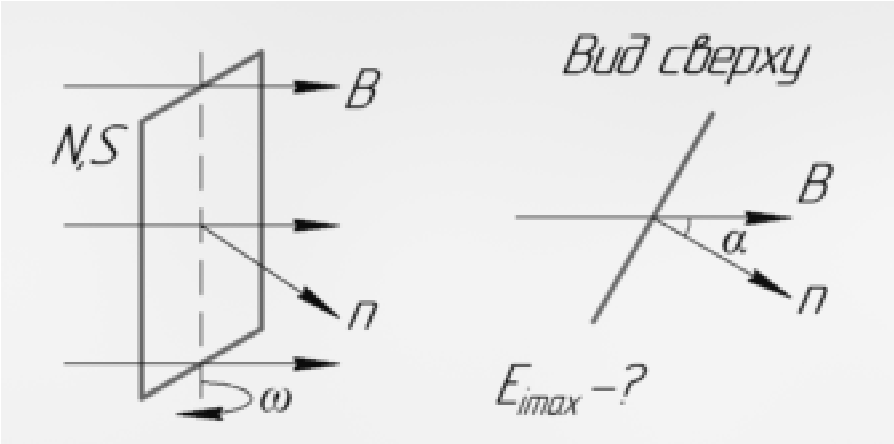


Рис. 36. Поясняющий рисунок

В общем случае магнитный поток Φ через некоторую плоскую поверхность, помещенную в однородном магнитном поле, можно определить по такой формуле:

$$\Phi = BS\cos\alpha \tag{131}$$

В этой формуле B - индукция магнитного поля, S - площадь поверхности, через которую определяется магнитный поток, α - угол между нормалью к площадке и вектором магнитной индукции.

Если учесть, что рамка имеет N витков обмотки, при этом сама рамка вращается в поле с некоторой угловой скоростью ω, то формула 131 примет следующий вид:

$$\Phi = NBS\cos\omega t \tag{132}$$

Согласно закону Фарадея для электромагнитной индукции, ЭДС индукции, возникающая в контуре при изменении магнитного потока, пересекающего этот контур, равна по модулю скорости изменения магнитного потока (то есть первой производной функции изменения потока от времени):

$$\varepsilon_i = -\Phi'(t) \tag{133}$$

Тогда

$$\varepsilon_i = -(NBS\cos\omega t)' = NBS\omega\sin\omega t \tag{134}$$

Угловая скорость вращения ω связана с частотой вращения ν по такой формуле:

$$\omega = 2\pi\nu \tag{135}$$

Получим окончательную формулу:

$$\varepsilon_i = NBS2\pi\nu\sin 2\pi\nu t \tag{136}$$

Мы значем, что $\omega t = 30°$. Тогда:

$$\varepsilon_i = NBS2\pi\nu\sin 30° = NBS2\pi\nu\frac{1}{2} = NBS\pi\nu \tag{137}$$

Подставим числа и получим:

$$\varepsilon_i = 1000 \cdot 0.4 \cdot 0.02 \cdot \pi \cdot \frac{480}{60} \approx 201 \text{ В} \tag{138}$$

Ответ: $\mathcal{E}^{\text{инд}} = NSB\nu\pi \approx 201$ В.

№3

Условие: В однородном магнитном поле, модуль индукции которого $B = 0.1$ Тл расположен плоский проволочный виток, замкнутый на гальванометр. Площадь ограниченная контуром витка $S = 10^{-2}$ м^2. В начальный момент времени плоскость витка располагалась перпендикулярно магнитному полю. После поворота витка на некоторый угол α, через гальванометр прошёл заряд $q = 7.5 \cdot 10^{-4}$ Кл. Рассчитайте угол α на который повернули виток если его сопротивление $R = 2$ Ом.

Решение: Проволочный виток (замкнутый контур) в магнитном поле. Магнитный поток, пронизывающий контур, находящийся в магнитном поле:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha. \tag{139}$$

При повороте витка, меняется угол, поэтому меняется магнитный поток, что приводит к возникновению ЭДС индукции. За время поворота Δt по витку пройдет заряд:

$$q = I \cdot \Delta t, \tag{140}$$

здесь I - сила индукционного тока. Воспользуемся законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R}, \tag{141}$$

ЭДС индукции, согласно закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \tag{142}$$

$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ - изменение магнитного потока. $\Phi_1 = BS$, т.к. по условию угол между нормалью к контуру и индукцией поля равен нулю.

$$\Phi_2 = B \cdot S \cdot \cos\alpha, \tag{143}$$

$$q = \frac{\varepsilon_i}{R}\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{B \cdot S \cdot \cos\alpha - B \cdot S}{R} \tag{144}$$

$$\cos\alpha = \mid \frac{q \cdot R + B \cdot S}{B \cdot S} \mid 1 - \frac{q \cdot R}{B \cdot S} \tag{145}$$

Ответ: $\alpha = 1 - \frac{Rq}{BS} \approx 120°$.

№4

Условие: К источнику сторонних эдс сопротивление которого пренебрежимо мало, а $\varepsilon_0 = 2$ В подключили соленоид индуктивность которого $L = 0.1$ **Гн**, а сопротивление $R = 0.02$ **Ом**. Рассчитать заряд, который пройдёт через соленоид за первые 5 **с**.

Решение:

Ответ: $q = \frac{\varepsilon}{R}\left(t + \frac{L}{R}\left(\exp\left[-\frac{R}{L}t\right] - 1\right)\right) \approx 184$ Кл.

№5

Условие: Квадратная рамка со стороной $a = 70$ **см** помещена в магнитное поле так, что нормаль к рамке составляет угол $\alpha = 45°$ с направлением магнитного поля. Индукция магнитного поря меняется по закону $B = B_0 \cos \omega t$, где $B_0 = 0.2$ Тл, $\omega = 6\text{с}^{-1}$. Рассчитать ЭДС индукции, возникающей в рамке в момент времени $t = 3$ с.

Решение:

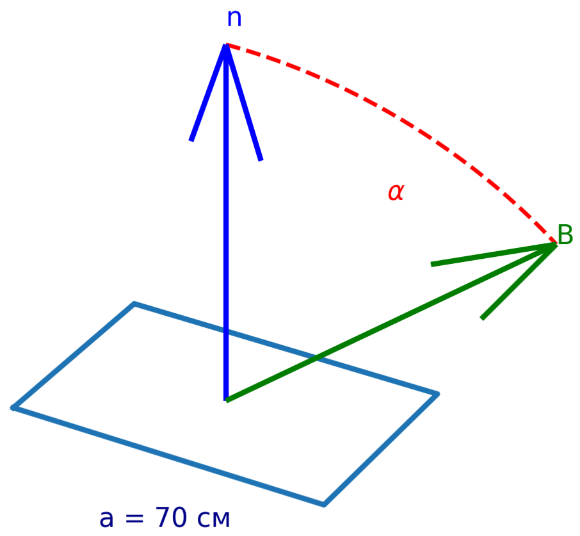


Рис. 37. Квадратная рамка в переменном магнитном поле.

По формуле магнитного потока через плоскость:

$$\Phi = BS \cos \alpha \tag{146}$$

Площадь рамки:

$$S = a^2 \tag{147}$$

Так как $B = B_0 \cos(\omega t)$:

$$\Phi = B_0 a^2 \cos\beta \cos(\omega t) \tag{148}$$

По закону Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\Phi'(t) = B_0 a^2 \omega \cos\beta \sin\omega t \tag{149}$$

Подставив числа из условия, получим:

$$\mathcal{E} = 0.2 \cdot 0.7^2 \cdot 6 \cdot \cos(45^\circ) \cdot \sin(6 \cdot 3) \approx -0.31 \text{ В.} \tag{150}$$

Ответ: $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0 \omega \sin(\omega t) \approx -0.31$ В.

№6

Условие: В прямом бесконечном проводнике течёт ток, сила которого меняется по закону $I = \beta t^3$, где $\beta = 2$ А/с^3. В одной плоскости с проводником, параллельно ему, расположена квадратная рамка, сторона которой $a = 20$ см, а сопротивление материала рамки $R = 7$ Ом. Расстояние от ближайшей стороны рамки до проводника $l = 20$ см. Рассчитать силу тока в рамке в момент времени $t = 10$ с.

Решение:

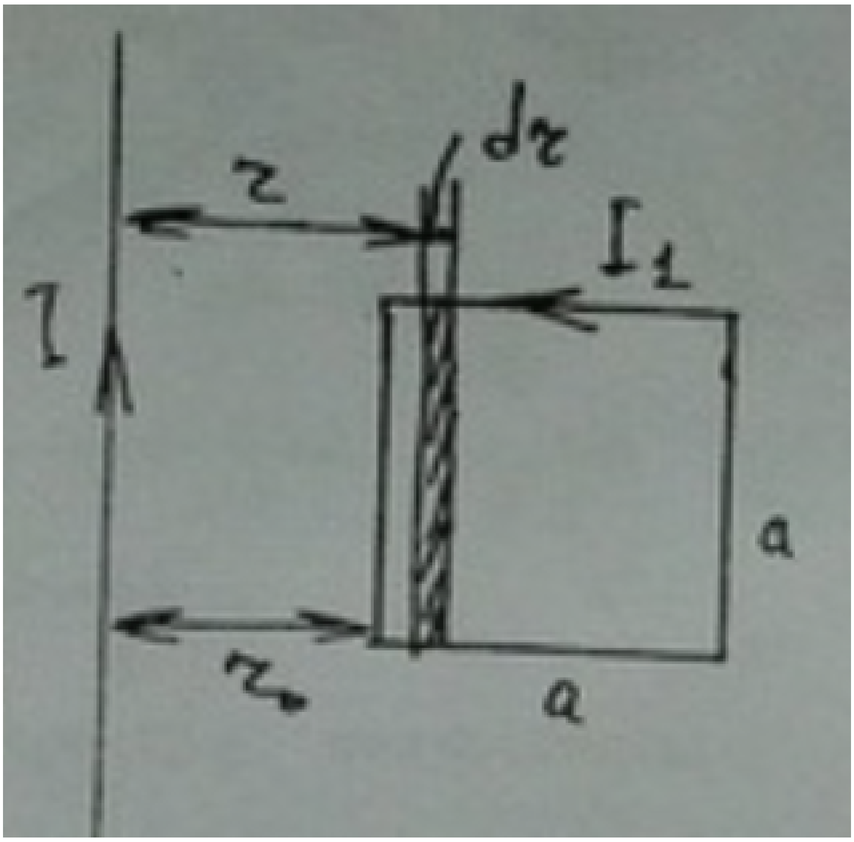


Рис. 38. Поясняющий рисунок.

Магн. индукция поля, создаваемого бесконечным проводником:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{151}$$

Найдем поток этого магнитного поля сквозь контур:

$$\begin{gathered}\Phi_m = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_l^{l+a} B \cdot a \cdot dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \int_l^{l+a} \frac{dr}{r} = \\ = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right)\end{gathered} \tag{152}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \frac{dI}{dt} \tag{153}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta t^3) = 3\beta t^2 \tag{154}$$

$$\varepsilon = -\frac{3\mu_0\beta a t^2}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{l}\right) \tag{155}$$

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{3\mu_0\beta a t^2}{2\pi R}\ln\left(1+\frac{a}{l}\right) \tag{156}$$

Подставим числа и получим:

$$I = \frac{3\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 2\cdot 0.2\cdot 10^2}{2\pi\cdot 7}\ln\left(1+\frac{0.2}{0.3}\right) \approx 2.4\cdot 10^{-6}\ \text{А}. \tag{157}$$

Ответ: $I = \frac{3\mu_0 a\beta}{2\pi}\log\left(1+\frac{a}{l}\right)t^2 \approx 2.4\cdot 10^{-6}$ А.

№7

Условие: П-образный проводник расположен в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости проводника. Магнитная индукция поля изменяется с постоянной скоростью β. Вдоль параллельных сторон проводника с постоянным ускорением a перемещают проводник перемычку, длина которой l. Рассчитать эдс индукции через время t после начала перемещения перемычки, если в начальный момент времени и индукция и площадь контура равны 0.

Решение: Площадь контура как функция времени:

$$S(t) = l\cdot s(t) = l\cdot\frac{a\cdot t^2}{2} \tag{158}$$

Индукция магнитного поля как функция времени:

$$B(t) = \beta t \tag{159}$$

ЭДС индукции (без учетного знака):

$$\begin{gathered}\varepsilon = \left|\ \frac{d}{dt}\Phi\ \right| = \left|\ \frac{d}{dt}(B(t)\cdot S(t))\ \right| = \left|\ \frac{d}{dt}\left[\beta t\left(l\cdot\frac{a\cdot t^2}{2}\right)\right]\ \right| = \\ = \frac{3}{2}\cdot\beta\cdot t^2\cdot l\cdot a.\end{gathered} \tag{160}$$

Ответ: $\varepsilon = -\frac{3l\beta a}{2}t^2$.

№8

Условие: Внутри длинного соленоида расположена катушка состоящая из N витков. Площадь поперечного сечения катушки S. Катушку поворачивают с постоянной угловой скоростью ω вдоль оси совпадающей с её диаметром и перпендикулярной к оси соленоида. Рассчитать эдс индукции в катушке если, индукция магнитного поля в соленоиде изменяется со временем как $B = B_0 \sin(\omega t)$, а в момент времени $t = 0$ ось катушки совпадала с осью соленоида.

Решение: Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, ЭДС индукции в катушке равна

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}, \tag{161}$$

где

- $\phi = N\Phi$ - полное потокосцепление катушки,
- N - число витков,
- Φ - магнитный поток через один виток.

Магнитный поток через один виток определяется выражением

$$\Phi = \int_S B_n dS = \int_S B \cos\alpha dS \tag{162}$$

где

B_n - проекция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$ к плоскости витка, α - угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{n}$.

Поскольку катушка вращается с угловой скоростью ω, угол между нормалью к витку и направлением магнитного поля меняется по закону

$$\alpha = \omega t. \tag{163}$$

В момент времени $t = 0$ ось катушки совпадает с осью соленоида, поэтому $\alpha(0) = 0$.

Поле внутри длинного соленоида однородно, следовательно, магнитный поток через один виток равен

$$\Phi = BS\cos\omega t, \tag{164}$$

где S - площадь витка.

Тогда потокосцепление катушки

$$\phi = N\Phi = NBS\cos\omega t. \tag{165}$$

Если магнитная индукция изменяется со временем по закону

$$B = B_0\sin\omega t, \tag{166}$$

то

$$\phi = NB_0S\sin\omega t\cos\omega t = \frac{1}{2}NB_0S\sin 2\omega t. \tag{167}$$

Теперь найдем ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}NB_0S\cdot 2\omega\cos 2\omega t = NB_0S\omega\cos 2\omega t. \tag{168}$$

Ответ: $\varepsilon = B_0NS\omega\cos(2\omega t)$.

№9

Условие: По длинному прямому соленоиду, радиус сечения которого R и плотностью намотки n, течёт ток, скорость изменения которого от времени равна i. Рассчитать вектор напряжённости вихревого электрического поля, как функцию расстояния r от оси соленоида.

Решение:

Ответ: