Домашняя работа. Дощенников Никита

Электростатика. Постоянный ток.

№1

Система состоит из полусферы несущей равномерно распределённый заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 5$ нКл/м^2. Рассчитать модуль напряжённости электростатического поля, создаваемого полусферой в её центре.

Решение:

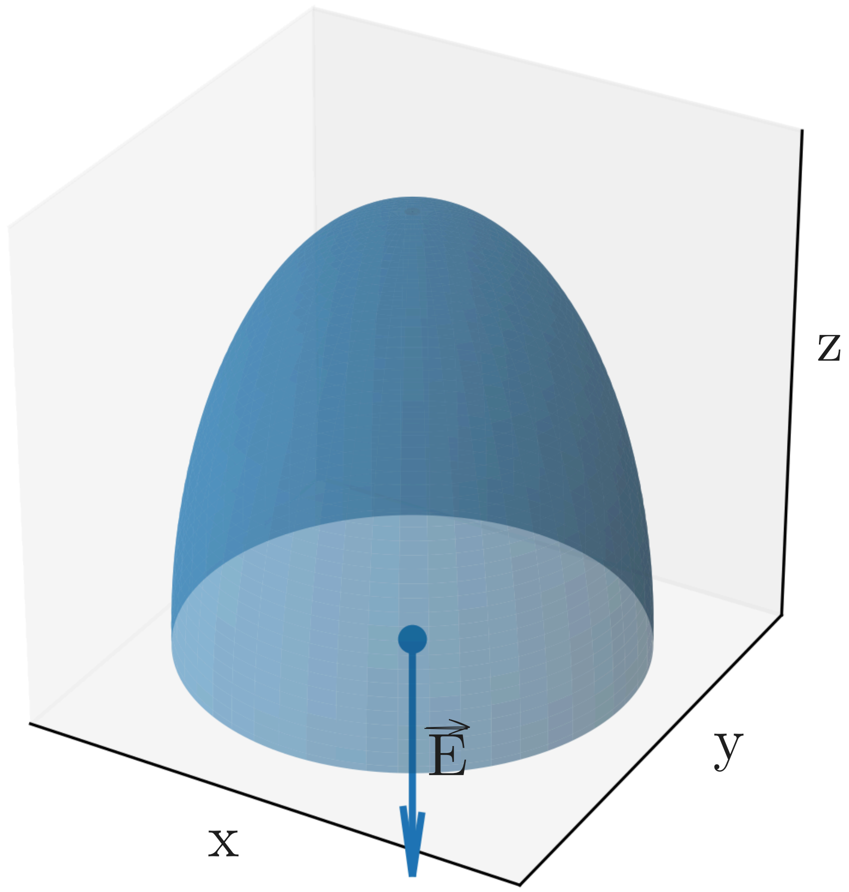

Рис. 1: Полусфера.

В системе СИ: $\sigma = 5$ нКл/м^2 $= 5 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2.

В сферических координатах с центром в искомой точке. Зададим точку на сфере полярным углом $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и азимутальным $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда поверхностный элемент сферы dS равен:

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Элемент заряда dq равен:

$$dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Поле от элементарного заряда в центра по модулю равно:

$$dE = k\frac{dq}{R^2} = k\frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{R^2} = k\sigma \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Расписав составляющие (так как поле направлено к центру, значение с минусом):

$$dE_x = -k\sigma \sin^2\theta \cos\varphi d\theta d\varphi,$$
$$dE_y = -k\sigma \sin^2\theta \sin\varphi d\theta d\varphi,$$
$$dE_z = -k\sigma \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi$$

Проинтегрировав по всей полусфере, получим:

$$E_x = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dE_x = -\sigma k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi.$$

Так как $\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0$, то $E_x = 0$. (Аналогично $E_y = 0$). Остается только z -компонента:

$$E_z = E = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dE_z = -\sigma k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta = k\sigma \cdot (2\pi) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Подставив числа, получим:

$$E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} = \frac{5\cdot 10^{-9}}{4\cdot 8.85\cdot 10^{-12}} \approx 141.2 \text{ В/м} \approx 0.14 \text{ кВ/м}.$$

Ответ: $E \approx 0.14$ кВ/м.

№2

Система представляет собой область пространства заполненного зарядом с объёмной плотностью $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, где ρ_0 и α – положительные постоянные, а r – расстояние от центра системы. Найти модуль напряжённости электростатического поля, как функцию r.

Решение:

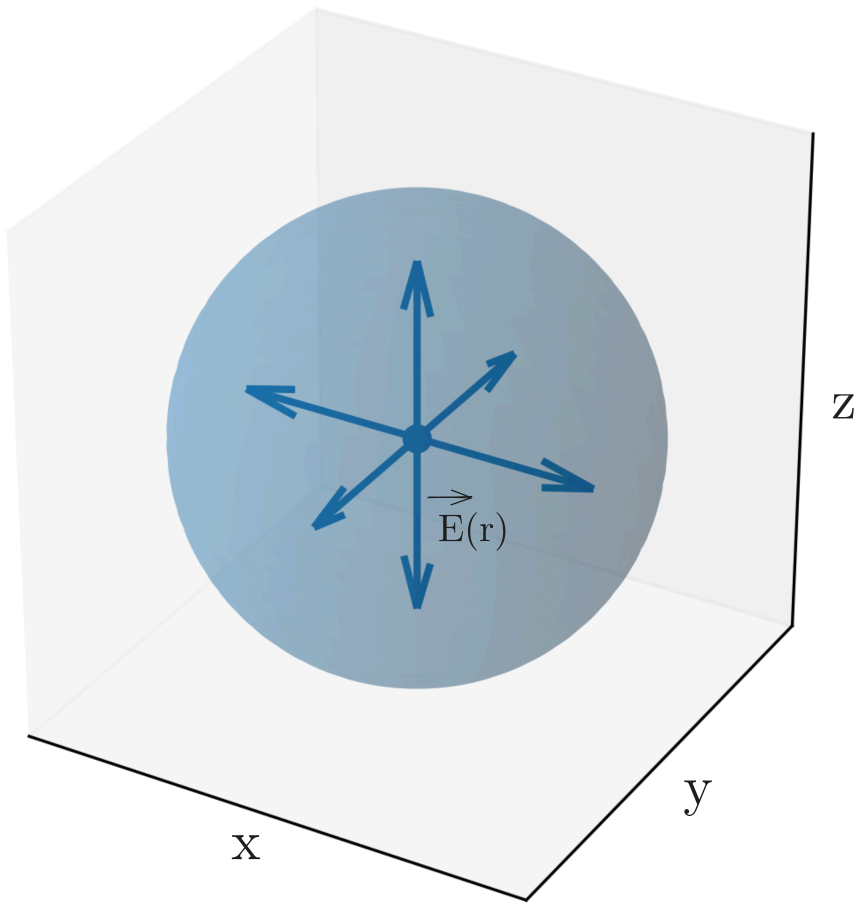

Рис. 2: Область пространства.

По закону Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{вн}}}{\varepsilon_0}$$

Система обладает сферической симметрией. Модуль $E(r)$ одинаков по всей сфере радиуса r, тогда (площадь поверхности сферы $4\pi r^2$):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \oint_S dS = E(r) \cdot S = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{вн}}(r)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{\text{вн}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Заряд внутри радиуса r:

$$Q_{\text{вн}}(r) = \int_{V_r} \rho(r') dV = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi\rho_0 \int_0^r r'^2 e^{(-\alpha r')^3} dr'.$$

Пусть $u = \alpha r'^3$.

$$du = 3\alpha r'^2 dr' \Rightarrow r'^2 dr' = \frac{du}{3\alpha}$$

$$Q_{\text{вн}}(r) = 4\pi\rho_0 \cdot \frac{1}{3\alpha}\int_0^{\alpha r^3} e^{-u}du = \frac{4\pi\rho_0}{3\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r^3}\right)$$

Подставим в закон Гаусса:

$$E(r) = \frac{Q_{\text{вн}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4\pi\rho_0}{3\alpha}(1 - e(-\alpha r^3))}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2}\left(1 - e^{-\alpha r^3}\right)$$

Ответ: $E(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2}(1 - \exp(-\alpha r^3))$.

№3

Система состоит из равномерно заряженного шара радиуса $R = 20$ см. Рассчитать разность потенциалов между точками, лежащими на расстоянии $r_1 = 1$ см и $r_2 = 15$ см от центра шара. Объёмная плотность заряда $\rho = 10$ нКл/м^3. Диэлектрическая проницаемость вещества из которого состоит шар $\varepsilon = 1$.

Решение:

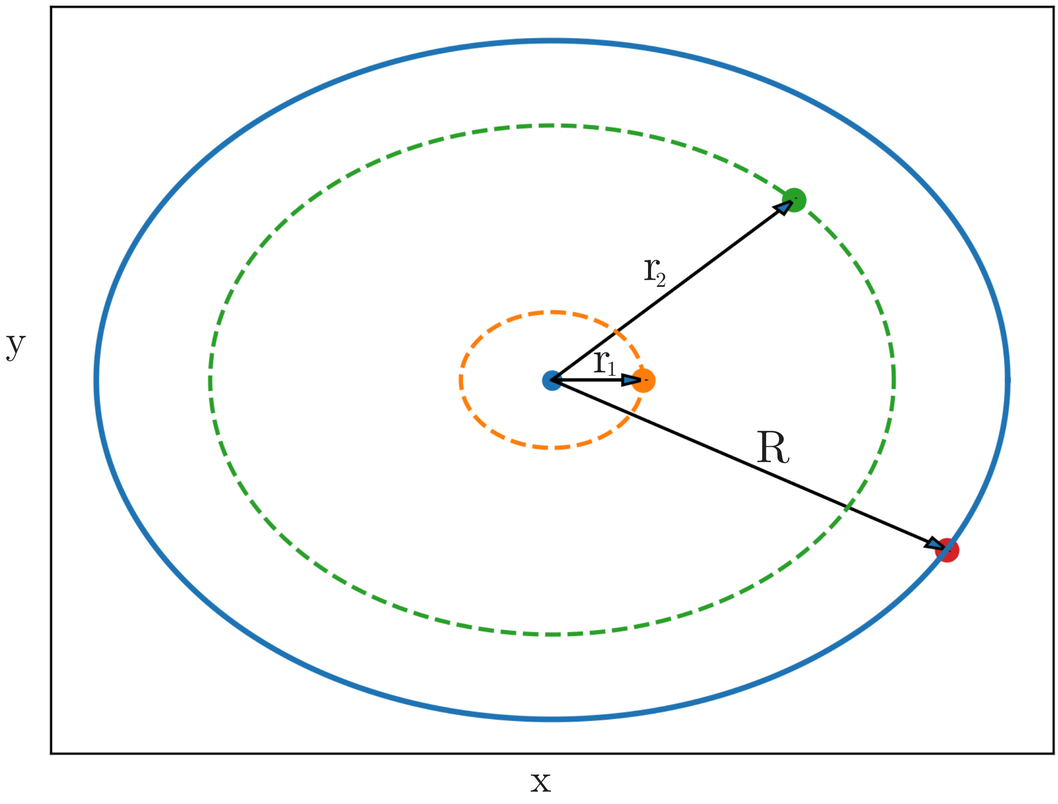

Рис. 3: Шар.

Для $r \leq R$ используем закон Гаусса. Заряд, заключенный в сфере, радиуса r:

$$Q_{\text{вн}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Поток через сферу радиуса r равен:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{вн}}}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда можно выразить $E(r)$:

$$E(r) = \frac{Q_{\text{вн}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Потенциал определяется как:

$$\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E(r)dr$$

Подставив $E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$:

$$\Delta\varphi = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r_2^2 - r_1^2)$$

Подставив числа, получим:

$$\Delta\varphi = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}(0.15^2 - 0.01^2)\ \text{В} \approx 4.2\ \text{В}.$$

Ответ: $\Delta\varphi \approx 4.2$ В.

№4

Зазор между пластинами плоского конденсатора полностью плоская слюдяная пластинка ($\varepsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 2$ мм, и слой парафина ($\varepsilon_1 = 2$) толщиной $d_2 = 1$ мм. Рассчитать модули напряжённости электрического поля в обоих диэлектриках, если разность потенциалов между пластинами $U = 200$В.

Решение:

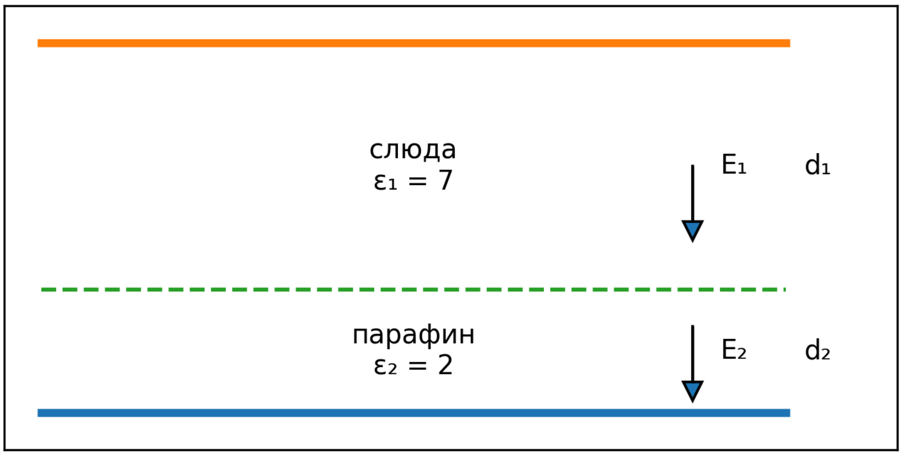

Рис. 4: Конденсатор.

При статическом поле в плоском конденсаторе нормальная компонента вектора электрической индукции $\vec{D}$ одинакова во всех слоях:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2.$$

Отсюда получаем связь между полями:

$$\varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_{r2} E_2 \Rightarrow E_1 = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2.$$

Общая разность потенциалов U равна:

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2.$$

Подставив $E_1 = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2$, получим:

$$U = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2 d_1 + E_2 d_2 = E_2 \left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} d_1 + d_2 \right)$$

Выражая E_2 и E_1:

$$E_2 = \frac{U}{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} d_1 + d_2}, \quad E_1 = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2.$$

Подставим числа из условия:

$$E_1 \approx 3.64 \cdot 10^4 \text{ В/м} \approx 36.4 \text{ кВ/м}, E_2 \approx 1.27 \cdot 10^5 \text{ В/м} \approx 0.127 \text{ МВ/м}.$$

Ответ: $E_1 \approx 36$ кВ/м, $E_1 \approx 0.13$ МВ/м.

№5

На расстоянии $l = 1.5$ см от проводящей плоскости расположен точечный заряд $q = 100$ мкКл. Рассчитайте работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы медленно удалить этот заряд от плоскости на бесконечность.

Решение:

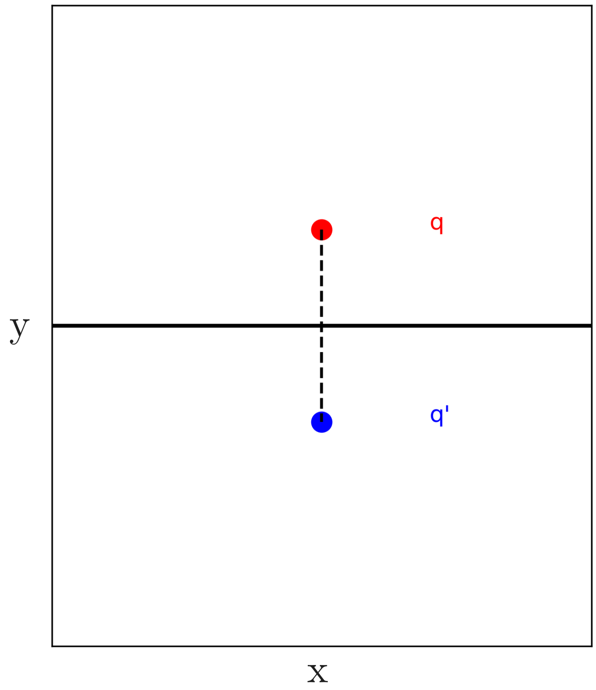

Рис. 5: Схема с проводящей плоскостью и зарядами.

В системе СИ: $l = 1.5$ см $= 0.015$ м, $q = 100$ мкКл $= 1.0 \cdot 10^{-4}$ Кл.

По закону сохранения энергии:

$$\Delta E_K + \Delta E_P = A_{\text{тр}} + A_{\text{вн}}$$

Так как мы удаляем заряд медленно, то $\Delta E_K = 0$. Про трение ничего не сказано, поэтому $A_{\text{тр}} = 1$. Тогда:

$$A = \Delta E_P = E_{P2} - E_{P1}$$

На бесконечности (E_{P2}) равна нулю так как $r = \infty$, и в формуле $E_P = k\frac{q}{r}$ стоит в знаменателе.

Реальный заряд q находится на расстоянии l от плоскости, а мнимый заряд $q' = -q$ находится на расстоянии l по другую сторону плоскости. Тогда обозначим за $r = 2l = 0.03$ м.

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов E_P равна:

$$E_P = k\frac{qq'}{r} = -k\frac{q^2}{2l}$$

Нужно учесть, что получившееся значение – работа по удалению не одного, а двух зарядов. Тогда поделим значение на 2.

Подставив числа, получим:

$$A = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l} = \frac{10^4 \cdot 10^{-12}}{16\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1.5 \cdot 10^{-2}} \approx 0.15 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

Ответ: $A \approx 0.15 \cdot 10^3$ Дж.

№6

По прямому проводнику длина которого $l = 400$ м течёт постоянный ток, сила которого $I = 10$ А. Рассчитать суммарный импульс электронов в проводнике.

Решение:

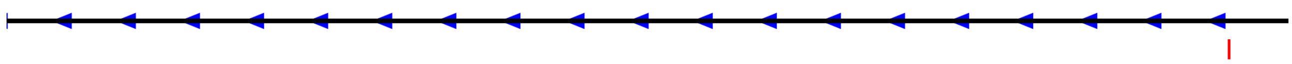

Рис. 6: Проводник с током.

По формуле плотности тока:

$$j = \rho U \text{ , где } \rho = \frac{q}{l \cdot S} \Rightarrow j = \frac{qU}{lS}$$

Так как $j = \frac{I}{S}$ по определению, то можно выразить заряд:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{qU}{lS} \Rightarrow q = \frac{Il}{U}$$

Масса всех электронов равна произведению их количества на массу одного электрона:

$$m = n_e \cdot m_e = \frac{q}{e} m_e = \frac{Il}{Ue} m_e$$

По формуле импульса:

$$p = mU = \frac{Ilm_e}{e}$$

Подставим числа из условия:

$$p = \frac{10 \cdot 400 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \approx 2.3 \cdot 10^{-8}.$$

Ответ: $p = 2.3 \cdot 10^{-8}$ Н/с.

Магнитостатика. Закон электромагнитной индукции Фарадея.

№1

Замкнутый контур с током имеет вид прямоугольника с диагональю $d = 16$ см, угол между диагоналями $\alpha = 30°$. Сила тока, протекающего по контуру $I = 5$ А. Рассчитать модуль индукции магнитного поля в центре контура.

Решение:

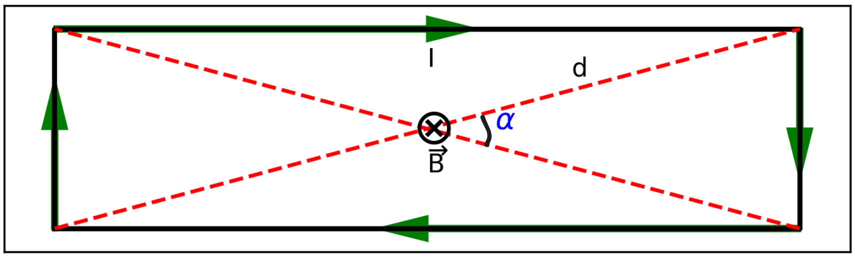

Рис. 7: Прямоугольный контур с током и его центр.

В системе СИ: $d = 16$ см $= 0.16$ м.

По принципу суперпозиции для магнитного поля:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4.$$

Так как все $\vec{B}_i$ сонаправлены, то $B = 2(B_1 + B_2)$. По закону Био-Савара-Лапласа:

$$B = 2\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{\cos\frac{\pi-\varphi}{2}}{\frac{d}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} + \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\frac{d}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{1}{\frac{d}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\right) = \frac{4\mu_0 I}{\pi d\sin\varphi}$$

Подставив числа из условия, получим:

$$B = \frac{4\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5}{\pi\cdot 0.16\cdot\sin 30°} \approx 0.1$$

Ответ: $B \approx 0.1$ мТл.

№2

Два бесконечных прямых параллельных проводника разделены расстоянием $d = 20$ см. По проводникам в противоположных направлениях текут токи $I_1 = I_2 = 10$ А. Рассчитать модуль напряжённости магнитного поля в точке, равноудалённой от обоих проводников на расстояние $a = 20$ см.

Решение:

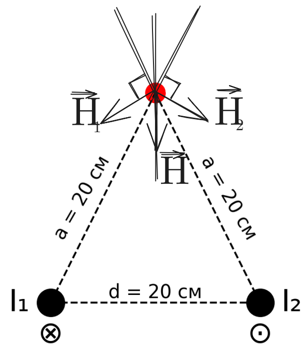

Рис. 8: Два параллельных проводника с противоположными токами.

По формуле напряженности магнитного поля для прямого тока:

$$H = 2\pi r I$$

Результирующее поле направлено вниз:

$$H = \frac{2I}{2\pi r}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{I}{2\pi r}$$

Подставив числа из условия, получим:

$$\frac{10}{2\pi \cdot 0.2} \approx 8 \text{ А/м}.$$

Ответ: $H \approx 8$ А/м.

№3

По проводу бесконечной длины, имеющего форму цилиндра радиуса R течёт постоянный ток, плотность которого зависит от расстояния до центра провода как $j = \alpha r \vec{e}_z$. Рассчитать вектор магнитной индукции создаваемый током внутри и вне провода, как функцию r (магнитная проницаемость всюду равна 1).

Решение:

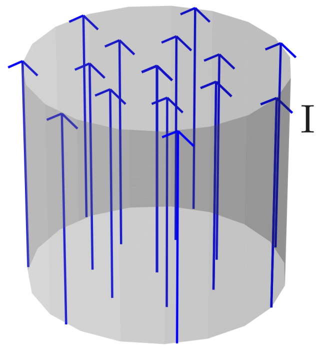

Рис. 9: Цилиндрический провод с током вдоль оси.

Для осесимметричного распределения удобно взять круговой контур радиуса r, с центром на оси цилиндра. Интеграл по контуру:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\varphi(r)(2\pi r)$$

Закон Ампера:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{вн}}(r)$$

где $I_{\text{вн}}(r)$ - суммарный ток, пронизывающий поверхность, ограниченную контуром.

Отсюда:

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_{\text{вн}}(r)$$

Ток через круг радиуса r:

$$I_{\text{вн}}(r) = \iint_{S_r} j_z(r')dS = \int_0^r \int_0^{2\pi} (\alpha r')r' d\varphi dr'$$

$$I_{\text{вн}}(r) = \alpha \cdot 2\pi \int_0^r r'^2 dr' = \alpha \cdot 2\pi \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{2\pi\alpha r^3}{3}.$$

Магнитная индукция внутри $r < R$:

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{2\pi\alpha r^3}{3} = \frac{\mu_0 \alpha r^2}{3}.$$

Магнитная индукция снаружи $r > R$:

$$I = I_{\text{вн}}(R) = \frac{2\pi\alpha R^3}{3}.$$

По закону Ампера для $r > R$:

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{2\pi\alpha R^3}{3} = \frac{\mu_0 \alpha R^3}{3r}$$

Ответ: $\vec{B}(r < R) = \frac{\mu_0 \alpha r^2}{3}\vec{e}_\varphi,\ \vec{B}(r > R) = \frac{\mu_0 \alpha R^3}{3r}\vec{e}_\varphi.$

№4

В однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 0.4$ Тл перпендикулярно полю с постоянной скоростью влетает заряженная частица. В течении 6 мкс включается постоянное электрическое поле напряжённостью $E = 300$ В/м сонаправленно магнитному полю. Рассчитать шаг винтовой траектории частицы после выключения электрического поля.

Решение: По формуле силы Лоренца:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

До включения электрического поля:

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Частица движется по окружности

$$F_{\text{маг}} = qvB.$$

Сила Лоренца равна центростремительной силе:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

Угловая частота:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

Когда включается электрическое поле вдоль магнитного поля, на частицу вдоль B действует $F = qE$. Соответственно вдоль оси B ускорение $a = \frac{qE}{m}$.

За время Δt скорость вдоль оси становится:

$$v = a\Delta t = \frac{qE}{m}\Delta t$$

После выключения электрического поля частица летит в магнитном поле с постоянной перпендикулярной скоростью и параллельной, то есть по винтовой траектории.

Расстояние за один оборот:

$$h = vT,$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$ - период кругового движения.

Подставим:

$$h = vT = \frac{qE}{m}\Delta t \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi E \Delta t}{B}$$

Подставим числа:

$$h = \frac{2\pi \cdot 300 \text{ В/м} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ с}}{0.4 \text{ Тл}} \approx 0.28 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 0.28$ м.

№5

Квадратная рамка со стороной $a = 70$ см помещена в магнитное поле так, что нормаль к рамке составляет угол $\alpha = 45°$ с направлением магнитного поля. Индукция магнитного поля меняется по закону $B = B_0 \cos \omega t$, где $B_0 = 0.2$ Тл, $\omega = 6$ с$^{-1}$. Рассчитать ЭДС индукции, возникающей в рамке в момент времени $t = 3$ с.

Решение:

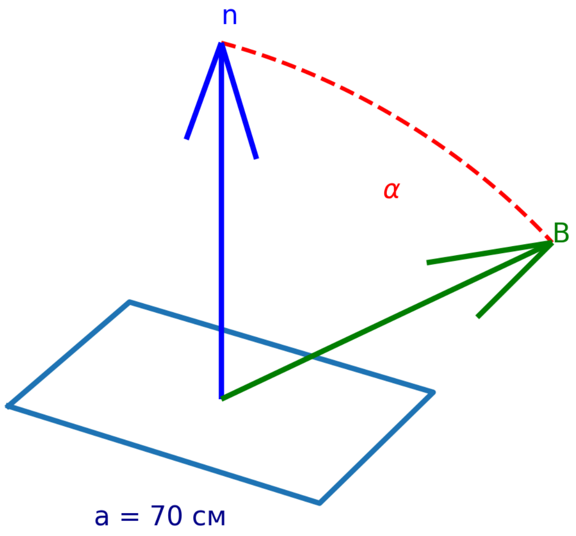

Рис. 10: Квадратная рамка в переменном магнитном поле.

По формуле магнитного потока через плоскость:

$$\Phi = BS\cos\alpha$$

Площадь рамки:

$$S = a^2$$

Так как $B = B_0\cos(\omega t)$:

$$\Phi = B_0 a^2 \cos\beta\cos(\omega t)$$

По закону Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\Phi'(t) = B_0 a^2 \omega\cos\beta\sin\omega t$$

Подставив числа из условия, получим:

$$\mathcal{E} = 0.2 \cdot 0.7^2 \cdot 6 \cdot \cos(45°) \cdot \sin(6 \cdot 3) \approx -0.31 \text{ В}.$$

Ответ: $\varepsilon = -0.31$ В.

№6

Плотность витков в катушке $n = 25$ см$^{-1}$. Рассчитать объёмную плотность энергии магнитного поля в катушке при токе $I = 2$ А.

Решение:

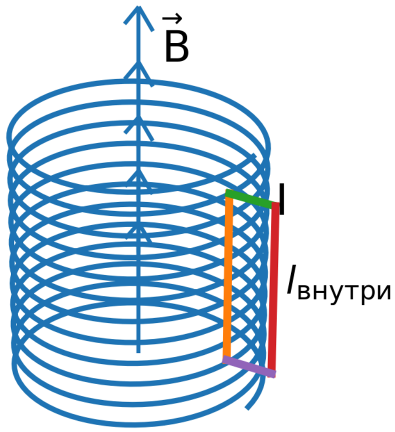

Рис. 11: Катушка с током и однородным магнитным полем внутри.

В системе СИ: $n = 25$ см$^{-1}$ $= 2500$ м$^{-1}$.

По закону Ампера:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{внутри}}$$

Возьмем прямоугольный контур. Одна сторона внутри катушки длиной $l_{\text{внутри}}$, другая снаружи. Магнитное поле внутри $\vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl_{\text{внутри}}$. Ток, охваченный контуром: $I_{\text{внутри}} = I \cdot N_{\text{охваченных витков}} = Inl_{\text{внутри}}$. Подставив в закон Ампера, получим:

$$Bl_{\text{внутри}} = \mu_0 \left(nIl_{\text{внутри}}\right) \Rightarrow B = \mu_0 nI.$$

Энергия магнитного поля катушки:

$$W = \frac{1}{2} LI^2,$$

где L - индуктивность катушки.

По определению индуктивности:

$$L = \frac{\Phi}{I},$$

где Φ - магнитный поток через катушку.

Магнитный поток через все витки равен:

$$\Phi = N \cdot B \cdot S,$$

где N - число витков, S - площадь поперечного сечения, B - магнитное поле внутри катушки.

$$L = \frac{NBS}{I}.$$

Объем катушки $V = Sl$, число витков $N = nl$. Подставим:

$$L = \frac{nlBS}{I} = \frac{BnSl}{I}.$$

Тогда энергия равна:

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{BnSl}{I}I^2 = \frac{1}{2}BnISl$$

Объемная плотность энергии w равна:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\frac{1}{2}BnISl}{Sl} = \frac{1}{2}BnI$$

Подставим $B = \mu_0 nI$:

$$w = \frac{1}{2}(\mu_0 nI)nI = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

Подставим числа:

$$w = \frac{1}{2}4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (2500)^2 \cdot 2^2 = 2\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6.25 \cdot 10^6 \cdot 4 \approx 16 \text{ Дж/м}^3$$

Ответ: $\omega \approx 16$ Дж/м^3.