Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Физико-технический факультет

Задачи по электричеству и магнетизму из разных учебников

Содержание

0.1 Закон Кулона. Принцип суперпозиции.

1. На шёлковой нити подвешен шар массы m, заряд которого q_1^+. Рассчитать на какое расстояние необходимо поднести положительно заряженный шар, с зарядом q_2^+, чтобы сила натяжения нити уменьшилась вдвое.
   Ответ: $l = \sqrt{\dfrac{2kq_1^+ q_2^+}{mg}}$.

2. К потолку в одной точке на шёлковых нитях длины l подвешены два одинаковых шара обладающих одинаковым зарядом q и массой m. Расстояние между шарами $x \ll l$. Рассчитать скорость утечки зарядов $\dfrac{dq}{dt}$ с каждого шара, если скорость их сближения, как функция от x имеет виды: $v(x) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{x}}$ (α – некоторая постоянная).
   Ответ: $\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{3\alpha}{2}\sqrt{\dfrac{mg}{2kl}}$

3. Радиус векторы двух положительных зарядов q_1 и q_2 соответственно $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Рассчитать отрицательный заряд q_3 и его радиус-вектор $\mathbf{r}_3$ точки в которую его надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из зарядов была равна 0.
   Ответ: $q_3 = -\dfrac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_1})^2}$, $\mathbf{r}_3 = \dfrac{\sqrt{q_1}\mathbf{r}_2 + \sqrt{q_2}\mathbf{r}_1}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}$.

4. Точечный заряд $q = 50$ мкКл расположен в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Найти напряжённость $\mathbf{E}$ электрического поля и её модуль в точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = 8\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$. Координаты векторов заданы в метрах.
   Ответ: $E = 4.5$ кВ/м; $\mathbf{E} = 2.7\mathbf{i} - 3.6\mathbf{j}$

5. Точечные заряды $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$ расположены по углам квадрата (рис. 1), диагональ которого равна $2l$. Найти модуль напряжённости электрического поля в точке, отстоящей на расстояние x от плоскости квадрата, симметрично относительно его

вершин.

Ответ: $E = k\dfrac{2\sqrt{2}ql}{(l^2 + x^2)^{3/2}}$.

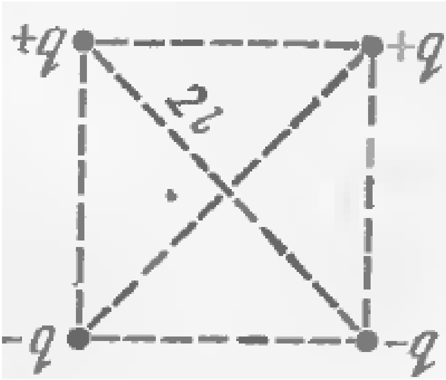

Рис. 1

6. В центре равностороннего треугольника расположен заряд $q_0 =$ 10 нКл. Рассчитайте, какие одинаковые заряды q_1 необходимо расположить в вершинах этого треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю.
Ответ: $q_1 = -17$ нКл.

7. Система состоит из протона p и электрона e, расстояние между которыми $r = 50$ пм. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля, создаваемого этими частицами в точках A и B, когда эти частицы находятся в положении, изображённом на (рис. 2).
Ответ: $E_A = 4.3 \cdot 10^{11}$ В/м, $E_B = 4.2 \cdot 10^{11}$ В/м.

8. В вершинах квадрата со сторонами $a = 0.08$ м расположены одинаковые заряды $q^{(+)} = 5$ нКл. Рассчитайте модуль напряжённости электрического поля в середине одной из сторон

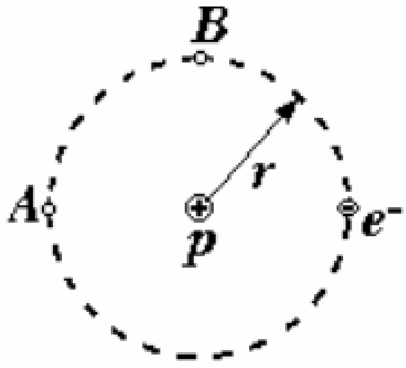

Рис. 2

квадрата.
Ответ: $E \approx 10$ кВ/м.

9. Свинцовый шарик диаметр которого $d = 7$ мм поместили в однородное электрическое поле в глицериновый раствор. Рассчитать заряд этого шарика, если электрическое поле направленно вверх, а модуль его напряжённости $E = 9$ кВ/см.
Ответ: $q \approx 20$ нКл.

10. Кусок тонкой проволоки изогнутый полукольцом радиусом R имеет равномерно распределённый заряд q. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля E в центре этого полукольца.
Ответ: $E = \dfrac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$.

11. Найти модуль напряжённости электрического поля на оси заряженного тонкого кольца, как функцию расстояния до центра кольца – $E(z)$, если заряд кольца равен q, а радиус R. Исследовать полученную зависимость при $z \gg R$. Рассчитать максимальное значение модуля напряжённости E_{max} и соответствующую ему координату точки на оси OZ.

Ответ: $E(z) = \dfrac{kqz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$, $z_{max} = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, $E_{max} = \dfrac{2kq}{3^{3/2}R^2}$.

12. Рассчитать модуль силы взаимодействия между тонким кольцом радиуса R, заряд которого равен q и длинной равномерно заряженной нитью, имеющей линейную плотность заряда равную λ, если нить расположена вдоль оси симметрии кольца, так, что один её конец совпадает с центром кольца.

    Ответ: $F = \dfrac{kq\lambda}{R}$.

13. Тонкий стержень длины l имеет равномерно распределённый заряд q. Рассчитать, модуль напряжённости электрического поля в точке расположенной на расстоянии a от одного из концов стержня, по линии стержня.

    Ответ: $E = \dfrac{kq}{a(l+a)}$.

14. Линейная плотность тонкого заряженного кольца радиуса R зависит от азимутального угла по закону $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$ (λ_0 – постоянная). Рассчитать модуль напряжённости электрического поля в центра кольца и на оси симметрии кольца в зависимости от расстояния до центра кольца.

    Ответ $E_O = \dfrac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$, $E(z) = \dfrac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$.

15. Система состоит из равномерно заряженного стержня длины $2a$, расположенного в вакууме. Рассчитать модуль вектора напряжённости как функцию расстояния r от центра стержня до точки на прямой:

    - перпендикулярной стержню и проходящей через его центр;
    - совпадающей с осью стержня, при $r > a$.

    Заряд стрежня равен q.

    Ответ: $E = \dfrac{kq}{r\sqrt{a^2+r^2}}$, $E = \dfrac{kq}{r^2-a^2}$.

16. Сфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = (\mathbf{r}, \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ некоторый постоянный вектор, а $\mathbf{r}$ – радиус вектор

точки на сфере отностительно её центра. Рассчитать вектор напряжённости электрического поля в центре сферы.
Ответ: $\mathbf{E} = \dfrac{aR}{3\varepsilon_0}\mathbf{e}_z$.

17. Рассчитать вектор напряжённости в центре заряженного шара радиуса R если объёмная плотность заряда шара $\rho = (\mathbf{r}, \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ некоторый постоянный вектор, а $\mathbf{r}$ – радиус вектор произвольной точки шара, проведённый из его центра.
Ответ: $\mathbf{E} = \dfrac{R^2 a}{6\varepsilon_0}\mathbf{e}_z$.

18. Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность круглого сечения заряжена так, что поверхностная плотность зависит только от угла φ цилиндрической системы координат: $\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$. Рассчитать модуль вектора в произвольной точке, лежащей на оси цилиндра.
Ответ: $E = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$.

0.2 Расчет напряженности непрерывного распределения заряда на основе теоремы Гаусса.

1. Напряжённость электрического поля, как функция координат имеет вид: $\mathbf{E} = \dfrac{\alpha x\mathbf{i} + \alpha y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$, где $\alpha = const$, а $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ – орты координатных осей OX и OY соответственно. Найти поток вектора $\mathbf{E}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат.
Ответ: $P = 4\pi\alpha R$.

2. Объёмная плотность положительно заряженного шара радиуса R зависит только от расстояния до центра шара: $\rho(r) = \rho_0(1 - \dfrac{r}{R})$, где $\rho_0 = const$. Найти:

   - модуль напряжённости электрического поля внутри и вне шара, как функцию r;
   - максимальное значения модуля напряжённости E_{max} и соответствующее ему значение r_{max}.

Диэлектрическая проницаемость всюду $\varepsilon = 1$.
Ответ: $E_r(r \leq R) = \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{3r}{4R}\right)$, $E_r(r \geq R) = \dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$, $r_{max} = \dfrac{2}{3}R$, $E_r(r_{max}) = \dfrac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$.

3. Система состоит из равномерно заряженного шара радиуса $R = 0.2$ м, объёмная плотность которого $\rho = 20$ нКл/м^3. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля:

   - на расстоянии $r = 0.1$ м от центра шара;
   - на поверхности шара;
   - на расстоянии $r = 0.25$ м от центра шара.

   Диэлектрическая проницаемость материала из которого состоит шар $\varepsilon = 5$.
   Ответ: $E(0.1) \approx 15$ В/м, $E(0.2) \approx 30$ В/м $(r \leq R)$, $E(0.25) \approx 96$ В/м, $E(0.2) \approx 151$ В/м $(r \geq R)$.

4. Шар радиуса R заряженный равномерно помещён в некоторую среду диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon = 1$. Среда заполнена зарядом, объёмная плотность которого $\rho = \dfrac{\alpha}{r}$, где α – постоянная, а r – расстояние от центра шара. Рассчитать заряд шара при котором модуль напряжённости электрического поля вне шара не зависит от r.
   Ответ: $q = 2\pi\alpha R^2$.

5. Система представлена областью пространства. По пространству распределён заряд, плотность которого зависит от расстояния до центра по закону $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, где α некоторая постоянная. Найти модуль напряжённости, как функцию r.
   Ответ: $E_r = \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \alpha r^2}\left(1 - \exp(-\alpha r^3)\right)$.

6. Рассчитать напряжённость электрического поля бесконечной плоскости, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда – σ. Расчёт произвести 2-мя способами:

- с использованием закона Кулона;
- с использованием теоремы Гаусса.

Ответ: $\mathbf{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}$.

7. Рассчитать напрёжённость электростатического поля создаваемого бесконечной длинной нитью, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда – λ. Расчёт произвести 2-мя способами:

   - с использованием закона Кулона;
   - с использованием теоремы Гаусса.

   Ответ: $\mathbf{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{n}$

8. Рассчитать вектор напряжённости электростатического поля в области пересечения двух шаров, равномерно заполненными разноименными зарядами с объёмной плотностью ρ и $-\rho$. Расстояния между центрами шаров характеризуется вектором a.
   Ответ: $\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{a}$.

9. Напряжённость аксиально симметричного электростатическое поля зависит от расстояния до источника по закону $\mathbf{E} = \dfrac{\alpha}{r^2}\mathbf{r}$ (α – постоянная). Рассчитать заряд внутри сферы радиуса R, центр которой расположен на источнике.

0.3 Работа кулоновских сил. Потенциал электростатического поля.

1. Потенциал электрического поля зависит от координат x,y по закону:

   - $\varphi(x,y) = \alpha(x^2 + y^2)$,
   - $\varphi(x,y) = \alpha xy$,

где $\alpha = const$. Найти вектор напряжённости этих полей.
Ответ: $\mathbf{E} = -2\alpha\mathbf{r}$, $\mathbf{E} = -\alpha y\mathbf{i} - \alpha x\mathbf{j}$.

2. Найти потенциалы, как функции координат следующих электрических полей:

   (a) $\mathbf{E} = a(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$;
   (b) $\mathbf{E} = 2axy\mathbf{i} + a(x^2 - y^2)\mathbf{j}$;
   (c) $\mathbf{E} = ay\mathbf{i} + (ax + bz)\mathbf{j} + by\mathbf{k}$.

   Ответ: $\varphi_a = -axy + C, \varphi_b = ay(\frac{y^2}{3} - x^2) + C$,
   $\varphi_c = -y(ax + bz) + C$.

3. Потенциал электрического поля имеет вид: $\varphi(x,y,z) = \alpha(xy - z^2)$, где $\alpha = const$. Найти проекцию напряжённости электрического поля в точке $M\,\{2, 1, -3\}$ на направление вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$.
   Ответ: $E_a = \dfrac{(\mathbf{E}, \mathbf{a})}{a} \approx -6\alpha$.

4. Тонкий кусок проволоки изогнутый полукольцом имеет равномерно распределённый заряд, линейная плотность которого $\lambda = 5$ нКл/м. Рассчитать потенциал φ, создаваемый зарядом проволоки в центре полукольца.
   Ответ: $\varphi = \pi k\lambda \approx 0.14$ кВ.

5. Тонкий стержень длиной $l = 10$ см заряжен равномерно. Рассчитать потенциал φ электрического поля в точке, расположенной на оси стержня на расстоянии $a = 50$ см. от его ближайшего конца, если полный заряд стержня $q = 10$ мкКл.
   Ответ: $\varphi = \dfrac{kq}{l} \ln\left(\dfrac{l + a}{a}\right) \approx 0.16$ МВ.

6. Тонкая проволока свёрнутая в кольцо несёт равномерный заряд $q = 20$ нКл. Рассчитать потенциал электрического поля кольца в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии $a = 50$ см от центра кольца. Радиус кольца $R = 8$ см.
   Ответ: $\varphi = \dfrac{q}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}} \approx 0.36$ кВ.

7. Рассчитать разность потенциалов между центрами тонких проволочных колец радиуса $R = 30$ см, если центры колец лежат на одной оси, а расстояние между центрами $l = 52$ см. Заряды колец равны q и $-q$. $|q| = 0.4$ мкКл.
   Ответ: $\Delta\varphi = 2kq\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{\sqrt{R^2+l^2}}\right) \approx 12$ кВ.

8. Кольцо радиуса R заряжено неравномерно. Рассчитать работу, совершаемую при перемещении заряда q_0 из центра кольца в произвольную точку лежащую на оси кольца, если полный заряд кольца равен q.
   Ответ: $A = kqq_0\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$.

9. Рассчитать разность потенциалов между точками (1) и (2) электрического поля, создаваемого тонкой равномерно заряженной нитью бесконечной длины, если известно, что точка (2) расположена в 7 раз дальше от нити, чем точка (1). Линейная плотность заряда нити $\lambda = 9$ мкКл/м.
   Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{\lambda}{2\pi}\ln 7 \approx 0.32$ МВ.

10. Провод, изображённый на (рис. 3)заряжен равномерно с линейной плотностью $\lambda = 0.5$ нКл/м. Длина прямого участка $a = 50$ см, радиус полукольца $R = 20$ см. Рассчитать, какую работу совершат электрические силы при удалении точечного заряда $q = 10$ нКл от центра полукольца на бесконечность.
    Ответ: $A = kq\lambda\left(\pi + \ln\left(\dfrac{R+a}{a}\right)\right) \approx 0.2$ мкДж.

11. Электрическое поле создано равномерно заряженным шаром радиуса $R = 20$ см. Объёмная плотность заряда $\rho = 10$ нКл/м^3. Рассчитать разность потенциалов между точками, лежащими на расстоянии $r_1 = 1$ см и $r_2 = 25$ см от центра шара соответственно. Диэлектрическая проницаемость всюду равна 1.
    Ответ: $\Delta\varphi \approx 11$ В.

12. В вершинах равностороннего треугольника, сторона которого $a = 5$ см, расположены 3 точечных заряда q и $-2q$, как это

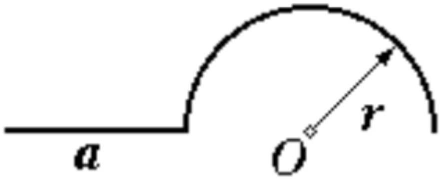

Рис. 3. К задаче 5

показано на (рис. 4). Рассчитать работу электрических сил при перемещении заряда $-2q$ из точки B в точку C если $q = 3$ нКл.

Ответ: $A = \dfrac{4kq^2}{a} \approx 6.5$ мкДж.

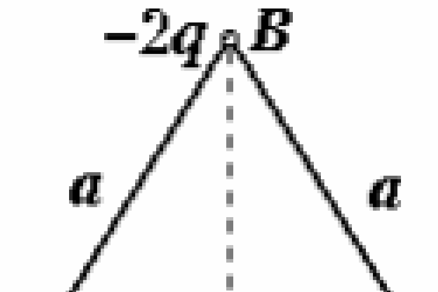

Рис. 4. К задаче 10

13. Коническая поверхность, радиус основания которой равен R равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ. Рассчитать потенциал электростатического поля в вершине конуса. **Ответ** $\varphi = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$.

14. Рассчитать потенциал в точке, расположенной на краю тонкого диска, радиуса R, если поверхностная плотность заряда, распределённого по диску равна σ.
    Ответ: $\varphi = \dfrac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$.

15. Потенциал электростатического поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до центра шара: $\varphi = ar^2 + b$. Рассчитать объёмную плотность заряда, как функцию r.
    Ответ: $\rho(r) = -6\varepsilon_0 a$.

16. Заряд q распределён равномерно по объёму шара радиуса R. Рассчитать:

    - потенциал в центре шара;
    - потенциал внутри шара как функцию r.

    Ответ: $\varphi(0) = \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}$, $\varphi(r) = \varphi(0)\left(1 - \dfrac{r^2}{3R^2}\right)$;

0.4 Электрический диполь.

1. Заряд q помещён в точку с координатами $(a{,}0)$. Найти вектор дипольного момента, если заряд $-q$ поместить в точку с координатами:

    - $(-a{,}0)$;
    - $(0{,}a)$;
    - $(-a, -a)$.

    Ответ: $\mathbf{p} = 2qa\mathbf{i}$; $\mathbf{p} = q(a\mathbf{i} - a\mathbf{j})$; $\mathbf{p} = q(2a\mathbf{i} + a\mathbf{j})$.

2. Рассчитать потенциалы и модули напряжённости электрического поля, создаваемого диполем в точках A и B, расположенных на расстоянии r от центра диполя на перпендикуляре к диполю и на оси диполя в направлении диполя, соответственно. Модуль дипольного момента $p = 0.12$ нКл/м, $|q| = 1$ нКл, $r = 8$ см.

Ответ: $\varphi(A) = 0$ В, $\varphi(B) \approx 386$ В, $E(A) \approx 1.08$ кВ/м, $E(B) = 22$ кВ/м.

3. Показать, что потенциал поля диполя с электрическим моментом $\mathbf{p}$ (рис. 5) может быть представлен, как $\varphi(r) = \dfrac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$, где r – радиус-вектор.

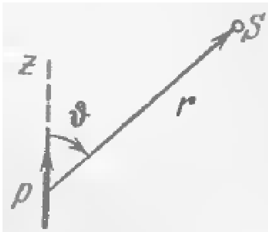

Рис. 5

- Найти с помощью этого выражения вектор напряжённости $\mathbf{E}$ как функцию $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ и модуль вектора напряжённости электрического поля диполя, как функцию r и Θ.
- Найти проекции напряжённости электрического поля диполя на ось Z – E_z, и на плоскость перпендикулярную оси Z – $E_\perp$.

Ответ: $\mathbf{E}(\mathbf{p},\mathbf{r}) = k\left(\dfrac{3(\mathbf{p},\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \dfrac{\mathbf{p}}{r^3}\right)$, $E(p,\theta) = \dfrac{kp}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$; $E_z = \dfrac{kp}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$, $E_\perp = \dfrac{3kp\cos\theta\sin\theta}{r^3}$.

4. Диполь с электрическим моментом $\mathbf{p}$ равномерно вращается с частотой ν вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плечу диполя. Получить потенциал создаваемый диполем в точке S, отстоящей от центра диполя на расстояние $r \gg l$ (l – плечо диполя), как функцию времени. Считать, что $\varphi(0) = 0$.

Ответ: $\varphi(t) = -\dfrac{kp}{r^2}\sin(2\pi\nu t)$.

5. Для системы состоящей из 2-х сонаправленных точечных диполей, лежащих на одной прямой, $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, рассчитать модуль силы взаимодействия между этими диполями если $p_1 = 1$ пКл м, $p_2 = 4$ пКл м, $r = 0.02$ м (r – расстояние между центрами диполей)

   Ответ: $F = \dfrac{3p_1p_2}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^4} \approx 1.35$ мкН.

6. Система состоит из равномерно заряженной нити, изогнутой в форме полуокружности радиуса R с зарядом $q > 0$, и отрицательного заряда $-q$, расположенного в её центре. Найти:

   - Модуль электрического дипольного момента этой системы;
   - Модуль напряжённости электрического поля в точке, расположенной на оси диполя на расстоянии $r \gg R$.

   Ответ: $p = \dfrac{2Rq}{\pi}$; $E(r) = \dfrac{Rq}{\varepsilon_0\pi^2r^3}$.

7. Система состоит из бесконечной равномерно заряженной тонкой нити и диполя, расположенного на расстоянии r от нити. $\mathbf{p}$ – дипольный момент, λ – линейная плотность заряда нити. Найти силу, действующую на диполь, если $\mathbf{p}$ ориентирован:

   - вдоль нити;
   - по вектору $\mathbf{r}$, перпендикулярному к нити;
   - перпендикулярно нити и вектору $\mathbf{r}$.

   Ответ: $\mathbf{F} = \mathbf{0}$; $\mathbf{F} = -\dfrac{\mathbf{p}\lambda}{\varepsilon_0\pi r^2}$.

8. Диполь $\mathbf{p}$ расположен во внешнем однородном поле $\mathbf{E}_0$, так что $\mathbf{p} \uparrow\uparrow \mathbf{E}_0$. При таком расположении одна из эквипотенциальных поверхностей представляет из себя сферу. Рассчитать радиус этой сферы.

0.5 Электростатическое поле при наличии диэлектриков

1. В центре шара, состоящего из однородного диэлектрика с проницаемостью ε расположен точечный заряд q. Найти поляризованность $\mathbf{P}$, как функцию радиус-вектора $\mathbf{r}$ относительно центра шара, а также связанный заряд q' внутри сферы, радиус которой меньше радиуса шара.
Ответ: $\mathbf{P} = \dfrac{q}{4\pi r^3 \varepsilon}(\varepsilon - 1)\mathbf{r}$; $q' = -\dfrac{q}{\varepsilon}(\varepsilon - 1)$.

2. Рассчитать поверхностные плотности связанных зарядов, модули векторов поляризованности и напряжённости поля, индуцированного точечным зарядом q, помещённым в центр двух концентрических сфер радиусами R_1 и R_2, если сферический слой заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью ε.
Ответ: $E(r < R_1) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $P(r < R_1) = 0$;
$E(R_1 < r < R_2) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$, $P(R_1 < r < R_2) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2}(\varepsilon - 1)$;
$E(r > R_2) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $P(r > R_2) = 0$;
$\sigma(r = R_1) = -\dfrac{q}{4\pi R_1^2 \varepsilon}(\varepsilon - 1)$, $\sigma(r = R_2) = \dfrac{q}{4\pi R_1^2 \varepsilon}(\varepsilon - 1)$.

3. Показать, что на границе однородного диэлектрика с проводником поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma_{\text{св}} = -\dfrac{\sigma(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}$, где ε – диэлектрическая проницаемость, а σ – поверхностная плотность зарядов на проводнике.

4. Система состоит из диэлектрического тела имеющего форму сферического слоя с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) и диэлектрической проницаемостью ε, расположенного в вакууме. Найти модуль напряжённости, как функцию расстояния r от центра тела, если:

   а) внутренняя поверхность тела несёт свободный поверхностный заряд q;

b) свободный заряд q равномерно распределён по объёму тела.

Ответ: $E_a(r < R_1) = 0$; $E_b(r < R_1) = 0$;
$E_a(R_1 < r < R_2) = \dfrac{\sigma R_1^2}{\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$; $E_b(R_1 < r < R_2) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{R_1^3}{r^3}\right)$;
$E_a(r > R_2) = \dfrac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}$; $E_b(r > R_2) = \dfrac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{\varepsilon_0 r^2}$

5. Вблизи некоторой точки лежащей на границе между стеклом и вакуумом модуль напряжённости электрического поля в вакууме – E_0, а угол между вектором $\mathbf{E}_0$ и вектором нормали к стеклу – α_0. Рассчитать модуль вектора напряжённости в стекле, угол между вектором напряжённости в стекле и нормалью, а также поверхностную плотность связанных зарядов.
Ответ: $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha_0 + \varepsilon^2\sin^2\alpha_0}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cot\alpha_0}{\varepsilon}$;
$\sigma = \dfrac{E_0(\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{\varepsilon}\cos\alpha_0$.

0.6 Электростатическое поле при наличии проводников

1. Над проводящей горизонтальной плоскостью на изолирующей нити, коэффициент жёсткости которой μ висит небольшой шарик. Когда шарик зарядили, он опустился на x, а расстояние до проводящей плоскости стало равно l. Рассчитайте заряд шарика.
Ответ: $q = 4l\sqrt{\mu x\pi\varepsilon_0}$.

2. Система состоит из точечного диполя $\mathbf{p}$ и проводящей плоскости. Расстояние от диполя до плоскости l. Рассчитать силу действующую на диполь, если дипольный момент перпендикулярен плоскости.
Ответ: $\mathbf{F} = \dfrac{3p^2}{32\varepsilon_0 l^4}\mathbf{j}$.

3. С одной стороны проводящей плоскости расположены 2 заряда q и $-q$. Расстояние между зарядами равно l, расстояние от

каждого заряда до плоскости равно $l/2$. Рассчитать модуль силы, действующей на каждый заряд.

Ответ: $F = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}(2\sqrt{2} - 1)$.

4. Система состоит из точечного заряда q расположенного на расстоянии y от проводящей плоскости. Рассчитать поверхностную плотность зарядов, индуцированных на плоскости, как функцию расстояния x от основания перпендикуляра, опущенного из точки расположения заряда на плоскость.

   Ответ: $\sigma = -\dfrac{qy}{2\pi(x^2 + y^2)^{3/2}}$

5. Система состоит из нити и проводящей плоскости. Нить заряжена равномерно, с линейной плотностью λ, и ориентирована перпендикулярно плоскости. Расстояние от ближайшего конца нити, ближайшего к плоскости, до плоскости l. Рассчитать поверхностную плотность индуцированного на плоскости заряда:

   - в точке O, являющейся следом нити на плоскости;
   - как функцию расстояния x до точки O.

   Ответ: $\sigma(O) = -\dfrac{\lambda}{2\pi l}$; $\sigma(x) = -\dfrac{\lambda}{2\pi(x^2 + l^2)^{1/2}}$.

6. Рассчитать потенциал незаряженной проводящей сферы радиуса R, вне которой на расстоянии d расположен заряд q.

   Ответ: $\varphi = \dfrac{kq}{d}$

0.7 Энергия электростатического поля.

1. В вершинах прямоугольника со сторонами $a = 40$ см и $b = 20$ см расположены четыре одинаковых заряда $q = 2$ мкКл. Рассчитать энергию взаимодействия этой системы.

   Ответ: $W = 2q^2k\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \approx 0.7$ Дж.

2. Система состоит из 4-х одинаковых зарядов $q = 500$ нКл, расположенных в вершинах квадрата сторона которого $a = 20$ см. Рассчитать потенциальную энергию взаимодействия данной системы.
   Ответ: $W = \dfrac{\sqrt{2}q^2 k}{a}\left(2\sqrt{2}+1\right) \approx 61$ мДж.

3. Во внешнем электростатическом поле, модуль напряжённости которого $E = 300$ кВ/м, расположен точечный диполь, модуль дипольного момента которого $p = 12$ пКл м. Под действием этого поля диполь начинает вращаться вокруг оси, проходящей через его центр. Рассчитать модуль угловой скорости вращения диполя в момент установления равновесия, если в начальный момент времени диполь был ориентирован перпендикулярно полю. Момент инерции диполя относительно оси вращения – $I = 2 \cdot 10^{-9}$ кг м^2.
   Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{2pE}{I}} = 60$ рад/с.

4. Система состоит из двух концентрических равномерно заряженных сфер, радиусами $R_1 = 1$ м и $R_2 = 1.5$ м, с поверхностными плотностями зарядов $\sigma_1 = 4$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = 10$ мкКл/м^2, расположенных в вакууме. Рассчитать энергию электрического поля заключённую между сферами.
   Ответ: $W = \dfrac{2\pi\sigma_1^2 R_1^4}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \approx 3.8$ Дж.

5. Система состоит из двух концентрических проводящих сфер радиусами $R_1 = 10$ см и $R_2 = 40$ см, имеющими одинаковый заряд $q = 200$ нКл. Рассчитать энергию электрического поля заключённого между двумя этими сферами.
   Ответ: $W = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}\right) \approx 1.35$ млДж.

0.8 Конденсаторы.

1. Получить формулы для расчёта ёмкости следующих конденсаторов (ε среды между обкладками принять равной 1):

- Сферического, если известно что радиус внутренней обкладки R_1, а внешней R_2;
- Цилиндрического, если известно, что радиус внутренней обкладки R_1, внешней R_2, а высота равна d;
- Плоского, если известно, что площадь обкладок равна S, а расстояние между обкладками d.

Ответ: $C_{\text{сф}} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$, $C_{\text{цил}} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 d}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$, $C_{\text{пл}} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

2. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого d, расположен вертикально. Конденсатор заряжен до разности потенциалов U. На расстоянии b от отрицательно заряженной пластины находится положительно заряженная пылинка массой m и зарядом q. Рассчитать время за которое пылинка достигнет пластины конденсатора.

   Ответ: $t = \sqrt{\dfrac{2bmd}{qU}}$.

3. К одной из пластин плоского заряженного конденсатора прилегает диэлектрическая пластинка толщиной d_1 и диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между пластинами конденсатора d, а разность потенциалов U. Рассчитать модули напряжённости E_1 и E_2 в диэлектрике и воздухе.

   Ответ: $E_1 = \dfrac{U}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}$, $E_2 = \dfrac{U\varepsilon}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}$

4. К одной из пластин плоского конденсатора прилегает пластина диэлектрика толщиной d_1 и диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между пластинами конденсатора d. После отключения конденсатора от источника питания пластину вынули. Рассчитать во сколько раз выросла разность потенциалов между пластинами конденсатора.

   Ответ: $n = \dfrac{\varepsilon d}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}$