

# Домашняя работа. Дощенников Никита

Электростатика. Постоянный ток. . . . .	1
№1 . . . . .	1
№2 . . . . .	3
№3 . . . . .	5
№4 . . . . .	6
№5 . . . . .	7
№6 . . . . .	8
Магнитостатика. Закон электромагнитной индукции Фарадея. . . . .	10
№1 . . . . .	10
№2 . . . . .	12
№3 . . . . .	13
№4 . . . . .	14
№5 . . . . .	15
№6 . . . . .	16

## Электростатика. Постоянный ток.

### №1

Система состоит из полусферы несущей равномерно распределённый заряд с поверхностью плотностью  $\sigma = 5 \text{ нКл/м}^2$ . Рассчитать модуль напряжённости электростатического поля, создаваемого полусферой в её центре.

**Решение:**

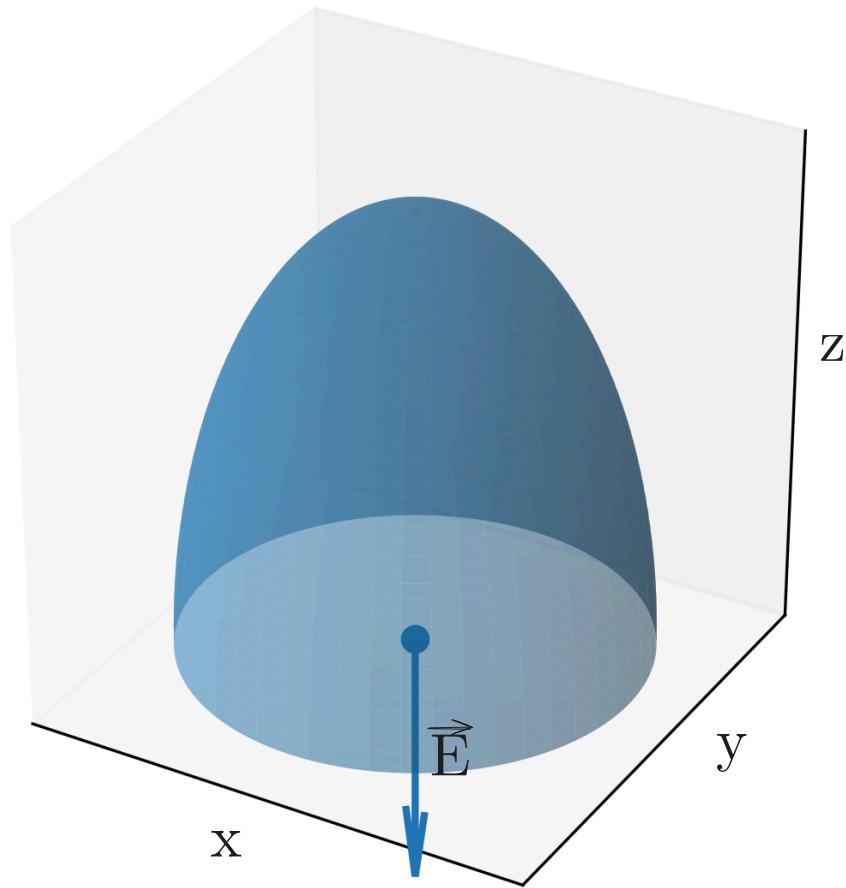


Рис. 1: Полусфера.

В системе СИ:  $\sigma = 5 \text{ нКл}/\text{м}^2 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}/\text{м}^2$ .

В сферических координатах с центром в искомой точке. Зададим точку на сфере полярным углом  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  и азимутальным  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Тогда поверхностный элемент сферы  $dS$  равен:

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Элемент заряда  $dq$  равен:

$$dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Поле от элементарного заряда в центре по модулю равно:

$$dE = k \frac{dq}{R^2} = k \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R^2} = k\sigma \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Расписав составляющие:

$$\begin{aligned} dE_x &= -k\sigma \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi, \\ dE_y &= -k\sigma \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi, \\ dE_z &= -k\sigma \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Проинтегрировав по всей полусфере, получим:

$$E_x = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dE_x = -\sigma k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi.$$

Так как  $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$ , то  $E_x = 0$ . (Аналогично  $E_y = 0$ ). Остается только  $z$ -компоненты:

$$E_z = E = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dE_z = -\sigma k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = k\sigma \cdot (2\pi) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}.$$

Подставив числа, получим:

$$E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \approx 141.2 \text{ В/м} \approx 0.14 \text{ кВ/м.}$$

**Ответ:**  $E \approx 0.14 \text{ кВ/м.}$

## №2

Система представляет собой область пространства заполненного зарядом с объёмной плотностью  $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$ , где  $\rho_0$  и  $\alpha$  – положительные постоянные, а  $r$  – расстояние от центра системы. Найти модуль напряжённости электростатического поля, как функцию  $r$ .

**Решение:**

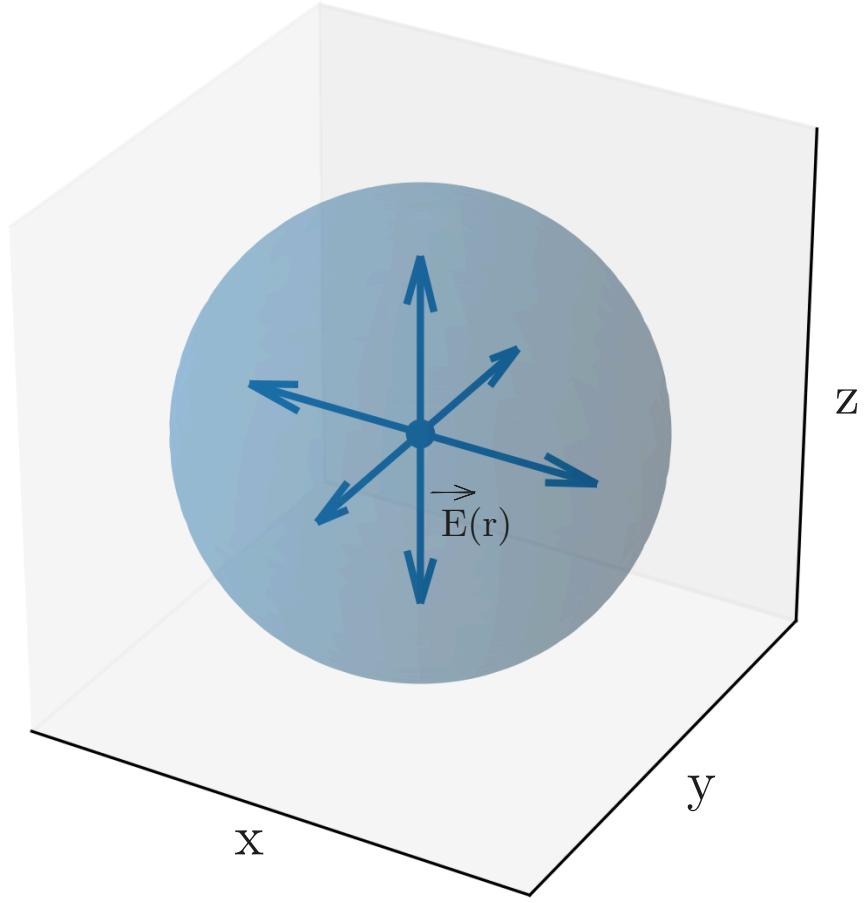


Рис. 2: Область пространства.

По закону Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{вн}}}{\varepsilon_0}$$

Система обладает сферической симметрией.

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{вн}}(r)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{\text{вн}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Заряд внутри радиуса  $r$ :

$$Q_{\text{вн}}(r) = \int_{V_r} \rho(r') dV = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi \rho_0 \int_0^r r'^2 e^{(-\alpha r')^3} dr'.$$

Пусть  $u = \alpha r'^3$ .

$$du = 3\alpha r'^2 dr' \Rightarrow r'^2 dr' = \frac{du}{3\alpha}$$

$$Q_{\text{вн}}(r) = 4\pi\rho_0 \cdot \frac{1}{3\alpha} \int_0^{\alpha r^3} e^{-u} du = \frac{4\pi\rho_0}{3\alpha} (1 - e^{-\alpha r^3})$$

Подставим в закон Гаусса:

$$E(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0\alpha r^2} (1 - e^{-\alpha r^3})$$

**Ответ:**  $E(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0\alpha r^2} (1 - \exp(-\alpha r^3))$ .

### №3

Система состоит из равномерно заряженного шара радиуса  $R = 20$  см. Рассчитать разность потенциалов между точками, лежащими на расстоянии  $r_1 = 1$  см и  $r_2 = 15$  см от центра шара. Объёмная плотность заряда  $\rho = 10$  нКл/м<sup>3</sup>. Диэлектрическая проницаемость вещества из которого состоит шар  $\epsilon = 1$ .

**Решение:**

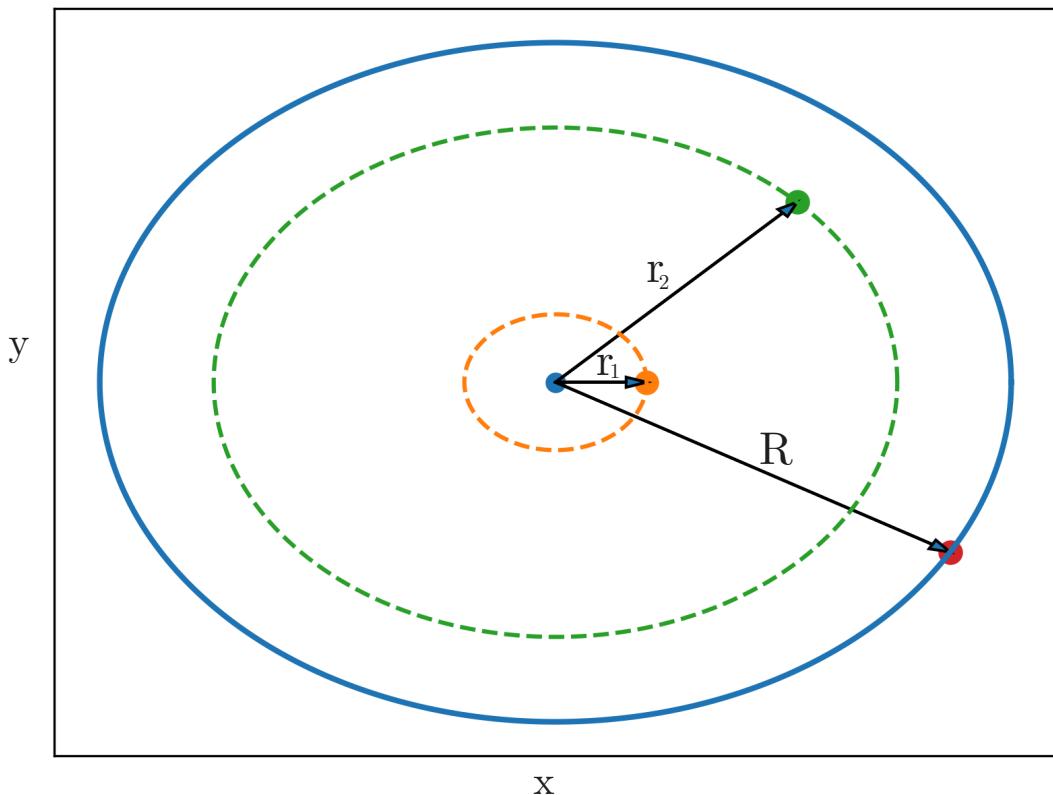


Рис. 3: Шар.

Для  $r \leq R$  используем закон Гаусса. Заряд, заключенный в сфере, радиуса  $r$ :

$$Q_{\text{вн}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Поток через сферу радиуса  $r$  равен:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{вн}}}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда можно выразить  $E(r)$ :

$$E(r) = \frac{Q_{\text{вн}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho^{\frac{4}{3}}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Потенциал определяется как:

$$\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr$$

Подставив  $E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$ :

$$\Delta\varphi = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (r_2^2 - r_1^2)$$

Подставив числа, получим:

$$\Delta\varphi = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} (0.15^2 - 0.01^2) \text{ В} \approx 4.2 \text{ В.}$$

**Ответ:**  $\Delta\varphi \approx 4.2 \text{ В.}$

#### №4

Зазор между пластинами плоского конденсатора полностью плоская слюдяная пластина ( $\varepsilon_1 = 7$ ) толщиной  $d_1 = 2 \text{ мм}$ , и слой парафина ( $\varepsilon_2 = 2$ ) толщиной  $d_2 = 1 \text{ мм}$ . Рассчитать модули напряжённости электрического поля в обоих диэлектриках, если разность потенциалов между пластинами  $U = 200 \text{ В}$ .

**Решение:**

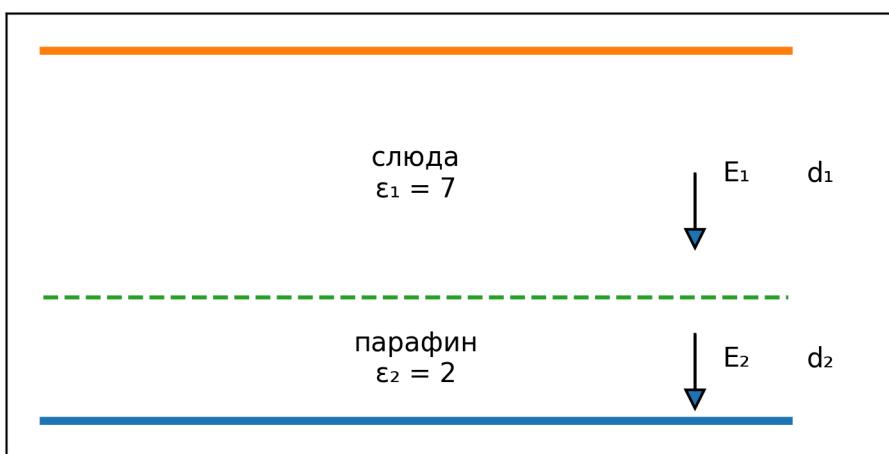


Рис. 4: Конденсатор.

При статическом поле в плоском конденсаторе нормальная компонента вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  одинакова во всех слоях:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2.$$

Отсюда получаем связь между полями:

$$\varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_{r2} E_2 \Rightarrow E_1 = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2.$$

Общая разность потенциалов  $U$  равна:

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2.$$

Подставив  $E_1 = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2$ , получим:

$$U = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2 d_1 + E_2 d_2 = E_2 \left( \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} d_1 + d_2 \right)$$

Выражая  $E_2$  и  $E_1$ :

$$E_2 = \frac{U}{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} d_1 + d_2}, \quad E_1 = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2.$$

Подставим числа из условия:

$$E_1 \approx 3.64 \cdot 10^4 \text{ В/м} \approx 36.4 \text{ кВ/м}, E_2 \approx 1.27 \cdot 10^5 \text{ В/м} \approx 0.127 \text{ МВ/м}.$$

**Ответ:**  $E_1 \approx 36 \text{ кВ/м}$ ,  $E_2 \approx 0.13 \text{ МВ/м}$ .

## №5

На расстоянии  $l = 1.5$  см от проводящей плоскости расположен точечный заряд  $q = 100 \text{ мКл}$ . Рассчитайте работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы медленно удалить этот заряд от плоскости на бесконечность.

**Решение:**

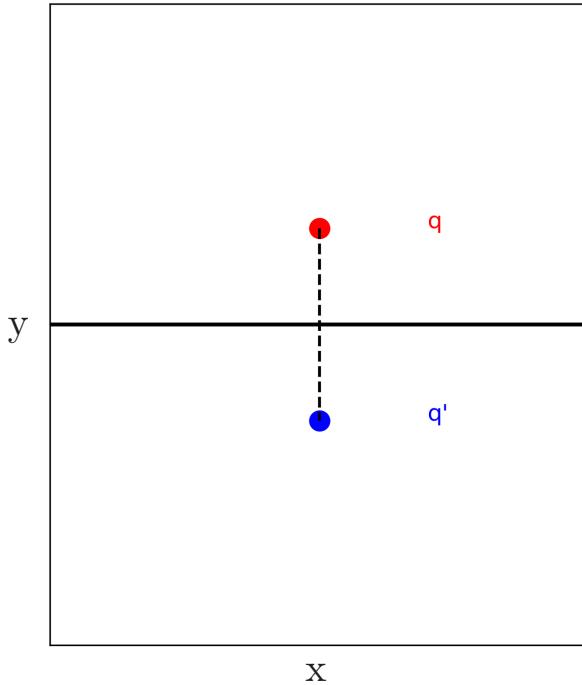


Рис. 5: Схема с проводящей плоскостью и зарядами.

В системе СИ:  $l = 1.5 \text{ см} = 0.015 \text{ м}$ ,  $q = 100 \text{ мККл} = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$ .

Реальный заряд  $q$  находится на расстоянии  $l$  от плоскости, а мнимый заряд  $q' = -q$  находится на расстоянии  $l$  по другую сторону плоскости. Тогда обозначим за  $r = 2l = 0.03 \text{ м}$ .

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов  $U$  равна:

$$U = k \frac{qq'}{r} = -k \frac{q^2}{2l}$$

Чтобы удалить заряд в бесконечность, нужно сделать работу  $A$ :

$$A = -U = k \frac{q^2}{2l}$$

Подставив числа, получим:

$$A \approx 0.15 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

**Ответ:**  $A \approx 0.15 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ .

## №6

По прямому проводнику длины  $l = 400 \text{ м}$  течёт постоянный ток, сила которого  $I = 10 \text{ А}$ . Рассчитать суммарный импульс электронов в проводнике.

**Решение:**



Рис. 6: Проводник с током.

Пусть  $v_d$  - дрейфовая скорость электронов. Тогда импульс всех электронов  $p$  равен:

$$p = Mv_d$$

где  $M$  - суммарная масса всех электронов в проводнике.

За время  $\Delta t$  электроны сдвигаются вдоль провода на расстояние:

$$\Delta x = v_d \Delta t.$$

Тогда объем, прошедший через сечение:

$$V = S\Delta x = S v_d \Delta t.$$

Если  $n$  - концентрация свободных электронов на метр кубический, то:

$$N = nV = nS v_d \Delta t$$

это число электронов, прошедших через сечение. Каждый электрон имеет заряд  $e$  по модулю, поэтому полный заряд  $\Delta Q$ :

$$\Delta Q = Ne = n e S v_d \Delta t.$$

По определению силы тока:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n e S v_d \Delta t}{\Delta t} = n e S v_d.$$

Пусть площадь сечения -  $S$ . Тогда объем  $V$  равен:

$$V = Sl$$

и число электронов  $N$ :

$$N = nV = nSl.$$

Выразив дрейфовую скорость из  $I = n e S v_d$ , получим:

$$v_d = \frac{I}{n e S}$$

Тогда, подставив это в  $p = N m_e v_d$ :

$$p = Nm_e v_d = (nSl)m_e \cdot \frac{I}{neS} = \frac{m_e I l}{e}$$

Подставим числа и получим:

$$p = \frac{3.644 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \approx 2.28 \cdot 10^{-8} \text{ H/c}$$

Ответ:  $p = 2.3 \cdot 10^{-8} \text{ H/c}$ .

**Магнитостатика. Закон электромагнитной индукции Фарадея.**

### №1

Замкнутый контур с током имеет вид прямоугольника с диагональю  $d = 16 \text{ см}$ , угол между диагоналями  $\alpha = 30^\circ$ . Сила тока, протекающего по контуру  $I = 5 \text{ А}$ . Рассчитать модуль индукции магнитного поля в центре контура.

**Решение:**

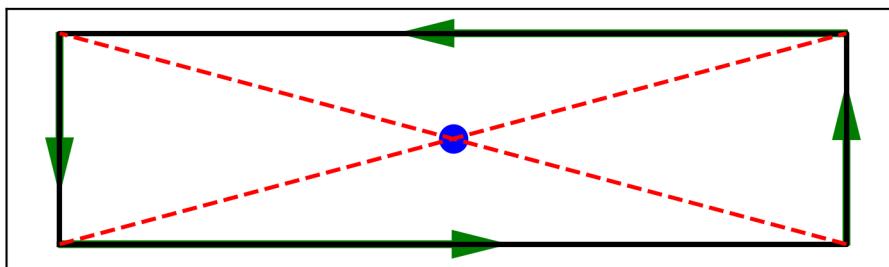


Рис. 7: Прямоугольный контур с током и его центр.

В системе СИ:  $d = 16 \text{ см} = 0.16 \text{ м}$ . Обозначим стороны прямоугольника  $a$  и  $b$ , тогда длина диагонали  $d$  равна:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Угол между диагоналями  $\alpha$  выражается через  $a$  и  $b$ . Для векторов диагоналей  $\mathbf{d}_1 = (a, b)$ ,  $\mathbf{d}_2 = (a, -b)$  получим:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_1| |\mathbf{d}_2|} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

или

$$\frac{b}{a} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

Отсюда:

$$a = d \cos \frac{\alpha}{2}, \quad b = d \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$a = d \cos 15^\circ, \quad b = d \sin 15^\circ$$

По закону Био-Савара:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \varphi}{r^2},$$

где  $dl$  - элемент проводника,  $r$  - расстояние до точки наблюдения,  $\varphi$  - угол между направлением тока и направлением на точку наблюдения. Проводник лежит вдоль оси  $x$ , точка наблюдения на оси  $y$ . Тогда расстояние  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Угол  $\varphi$  между током и направлением на точку:

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}$$

После подстановки в закон Био-Савара:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx}{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{y dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

проинтегрировав по длине проводника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} y \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \left( \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y^2}} \right)$$

Обозначим углы до концов проводника:

$$\cos \theta_1 = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y^2}}, \quad \cos \theta_2 = \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}}$$

тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1).$$

По формуле разности косинусов:

$$\cos \theta_2 - \cos \theta_1 = 2 \sin \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

Но в точке на перпендикуляре можно воспользоваться более простым выражением:

$$\cos \theta_2 - \cos \theta_1 = \sin \theta_1 + \sin \theta_2$$

Так как точка находится напротив середины проводника, то  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ . Тогда:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \sin \theta$$

Для симметричного случая можно расписать  $\sin \theta$  как:

$$\sin \theta = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}.$$

Для отрезка длины  $L$  на расстоянии  $y$  от его середины:

$$B_{\text{отр}} = \frac{\mu_0 I L}{4\pi y \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}.$$

Сумма вкладов двух противоположных сторон длины  $a$ :

$$B_a^{\text{sum}} = 2 \cdot \frac{\mu_0 I a}{4\pi \left(\frac{b}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} = \frac{\mu_0 I a}{\pi b \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}$$

Аналогично для сторон длины  $b$ :

$$B_b^{\text{sum}} = \frac{\mu_0 I b}{\pi a \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}$$

Сложив, получим:

$$\begin{aligned} B = B_a^{\text{sum}} + B_b^{\text{sum}} &= \frac{\mu_0 I}{\pi \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \frac{\mu_0 I}{\pi \frac{d}{2}} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi d} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \frac{2\mu_0 I}{\pi d} \frac{2}{\sin \alpha} = \frac{4\mu_0 I}{\pi d \sin \alpha} \end{aligned}$$

Подставив числа, получим:

$$B = \frac{4(4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot 5}{\pi \cdot 0.16 \cdot 0.5} \approx 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ Т} = 0.1 \text{ мТ.}$$

**Ответ:**  $B \approx 0.1$  мТл.

## №2

Два бесконечных прямых параллельных проводника разделены расстоянием  $d = 20$  см. По проводникам в противоположных направлениях текут токи  $I_1 = I_2 = 10$  А. Рассчитать модуль напряжённости магнитного поля в точке, равноудалённой от обоих проводников на расстояние  $a = 20$  см.

**Решение:** хз

Ответ:  $H \approx 8 \text{ A/m}$ .

### №3

По проводу бесконечной длины, имеющего форму цилиндра радиуса  $R$  течёт постоянный ток, плотность которого зависит от расстояния до центра провода как  $j = \alpha r e_z$ . Рассчитать вектор магнитной индукции создаваемый током внутри и вне провода, как функцию  $r$  (магнитная проницаемость всюду равна 1).

**Решение:**

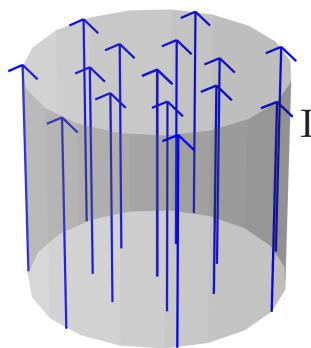


Рис. 8: Цилиндрический провод с током вдоль оси.

Для осесимметричного распределения удобно взять круговой контур радиуса  $r$ , с центром на оси цилиндра. Интеграл по контуру:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_\varphi(r)(2\pi r)$$

Закон Ампера:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{вн}}(r)$$

где  $I_{\text{вн}}(r)$  - суммарный ток, пронизывающий поверхность, ограниченную контуром.

Отсюда:

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_{\text{вн}}(r)$$

Ток через круг радиуса  $r$ :

$$I_{\text{вн}}(r) = \iint_{S_r} j_z(r') dS = \int_0^r \int_0^{2\pi} (\alpha r') r' d\varphi dr'$$

$$I_{\text{BH}}(r) = \alpha \cdot 2\pi \int_0^r r'^2 dr' = \alpha \cdot 2\pi \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{2\pi\alpha r^3}{3}.$$

Магнитная индукция внутри  $r < R$ :

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{2\pi\alpha r^3}{3} = \frac{\mu_0\alpha r^2}{3}.$$

Магнитная индукция снаружи  $r > R$ :

$$I = I_{\text{BH}}(R) = \frac{2\pi\alpha R^3}{3}.$$

По закону Ампера для  $r > R$ :

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{2\pi\alpha R^3}{3} = \frac{\mu_0\alpha R^3}{3r}$$

**Ответ:**  $B(r < R) = \frac{\mu_0\alpha r^2}{3} e_\varphi$ ,  $B(r > R) = \frac{\mu_0\alpha R^3}{3r} e_\varphi$ .

#### №4

В однородное магнитное поле с магнитной индукцией  $B = 0.4$  Тл перпендикулярно полю с постоянной скоростью влетает заряженная частица. В течении 6 мкс включается постоянное электрическое поле напряжённостью  $E = 300$  В/м сонаправленно магнитному полю. Рассчитать шаг винтовой траектории частицы после выключения электрического поля.

**Решение:** По формуле силы Лоренца:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

До включения электрического поля:

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Поскольку  $\mathbf{b} \perp \mathbf{B}$ , частица движется по окружности

$$F_{\text{маг}} = qvb.$$

Сила Лоренца равна центростремительной силе:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

Угловая частота:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

Когда включается электрическое поле вдоль магнитного поля, на частицу вдоль  $B$  действует  $F = qE$ . Соответственно вдоль оси  $B$  ускорение  $a = \frac{qE}{m}$ .

За время  $\Delta t$  скорость вдоль оси становится:

$$v = a\Delta t = \frac{qE}{m}\Delta t$$

После выключения электрического поля частица летит в магнитном поле с постоянной перпендикулярной скоростью и параллельной, то есть по винтовой траектории.

Расстояние за один оборот:

$$h = vT,$$

где  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$  - период кругового движения.

Подставим:

$$h = vT = \frac{qE}{m}\Delta t \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi E\Delta t}{B}$$

Подставим числа:

$$h = \frac{2\pi \cdot 300 \text{ В/м} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ с}}{0.4 \text{ Тл}} \approx 0.28 \text{ м.}$$

**Ответ:**  $h = 0.28 \text{ м.}$

## №5

Квадратная рамка со стороной  $a = 70 \text{ см}$  помещена в магнитное поле так, что нормаль к рамке составляет угол  $\alpha = 45^\circ$  с направлением магнитного поля. Индукция магнитного поля меняется по закону  $B = B_0 \cos \omega t$ , где  $B_0 = 0.2 \text{ Тл}$ ,  $\omega = 6 \text{ с}^{-1}$ . Рассчитать ЭДС индукции, возникающей в рамке в момент времени  $t = 3 \text{ с}$ .

**Решение:** ЭДС индукции определяется законом Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

где  $\Phi$  - магнитный поток через рамку:

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \alpha$$

Площадь рамки  $S = a^2$ ,  $\alpha$  - угол между вектором магнитной индукции и нормалью к рамке.

Магнитный поток через рамку:

$$\Phi(t) = B(t)S \cos \alpha = B_0 \cos(\omega t) \cdot a^2 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[B_0 a^2 \cos \alpha \cos(\omega t)] = -B_0 a^2 \cos \alpha \frac{d}{dt} \cos(\omega t) \\ &= -B_0 a^2 \cos \alpha \cdot (-\omega \sin(\omega t)) = B_0 a^2 \omega \cos \alpha \sin(\omega t)\end{aligned}$$

Подставляем числа:

$$\mathcal{E} = 0.2 \cdot (0.7)^2 \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin(6 \cdot 3) \approx -0.31 \text{ В}$$

**Ответ:**  $\varepsilon = -0.31$  В.

### №6

Плотность витков в катушке  $n = 25 \text{ см}^{-1}$ . Рассчитать объёмную плотность энергии магнитного поля в катушке при токе  $I = 2 \text{ А}$ .

**Решение:** В системе СИ:  $n = 25 \text{ см}^{-1} = 2500 \text{ м}^{-1}$ .

По закону Ампера:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{внутри}}$$

Возьмем прямоугольный контур. Одна сторона внутри катушки длиной  $l_{\text{внутри}}$ , другая снаружи. Магнитное поле внутри  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bl_{\text{внутри}}$ . Ток, охваченный контуром:  $I_{\text{внутри}} = I \cdot N_{\text{охваченных витков}} = Inl_{\text{внутри}}$ . Подставив в закон Ампера, получим:

$$Bl_{\text{внутри}} = \mu_0 (nIl_{\text{внутри}}) \Rightarrow B = \mu_0 nI.$$

Энергия магнитного поля катушки:

$$W = \frac{1}{2}LI^2,$$

где  $L$  - индуктивность катушки.

По определению индуктивности:

$$L = \frac{\Phi}{I},$$

где  $\Phi$  - магнитный поток через катушку.

Магнитный поток через все витки равен:

$$\Phi = N \cdot B \cdot S,$$

где  $N$  - число витков,  $S$  - площадь поперечного сечения,  $B$  - магнитное поле внутри катушки.

$$L = \frac{NBS}{I}.$$

Объем катушки  $V = Sl$ , число витков  $N = nl$ . Подставим:

$$L = \frac{nlBS}{I} = \frac{BnlSl}{I}.$$

Тогда энергия равна:

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{BnlSl}{I}I^2 = \frac{1}{2}BnlSlI^2$$

Объемная плотность энергии  $w$  равна:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\frac{1}{2}BnlSlI^2}{Sl} = \frac{1}{2}BnlI^2$$

Подставим  $B = \mu_0 nI$ :

$$w = \frac{1}{2}(\mu_0 nI)nI = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

Подставим числа:

$$w = \frac{1}{2}4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (2500)^2 \cdot 2^2 = 2\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6.25 \cdot 10^6 \cdot 4 \approx 16 \text{ Дж/м}^3$$

**Ответ:**  $\omega \approx 16 \text{ Дж/м}^3$ .