

Кинематика

Q: 1. *Что изучает раздел механики - кинематика?*

A: Кинематика — это раздел механики, который изучает **механическое движение тел**, то есть изменение их положения во времени относительно других тел, **без рассмотрения причин этого движения** (то есть без учёта сил и масс).

В кинематике рассматривают:

- траектории движения тел (прямолинейное, криволинейное);
 - путь и перемещение;
 - скорость (мгновенную, среднюю);
 - ускорение (тангенциальное, нормальное, полное);
 - законы движения (равномерное, равноускоренное и т.д.).
-

Q: 2. *В чем заключается абстракция, которая позволяет заменить реальное тело понятием «материальная точка»? Приведите примеры.*

A: Абстракция «материальная точка» заключается в том, что при изучении движения **размеры и форма реального тела заменяются одной точкой с массой**, если этими размерами можно пренебречь по сравнению с расстояниями движения или если они несущественны для задачи.

То есть тело рассматривается как материальная точка, когда:

- его **размеры малы** по сравнению с расстоянием движения;
- **форма и вращение тела не важны** для анализа задачи;
- нас интересует **только траектория центра масс**.

Примеры:

1. **Автомобиль на трассе Москва – Санкт-Петербург:** расстояние в сотни километров намного больше размеров автомобиля → можно считать его материальной точкой.
2. **Самолет в полёте:** при изучении траектории полета размеры самолета несущественны.
3. **Земля в движении вокруг Солнца:** диаметр Земли ничтожен по сравнению с расстоянием до Солнца.

4. **Капля дождя, падающая вниз:** её размеры малы относительно высоты падения.

Q: 3. Перечислите способы описания движения материальных тел. Дайте их краткую характеристику.

A: Существует три основных способа описания движения материальных тел в кинематике:

1. Координатный способ (задаётся уравнение движения)

- Движение описывается через **зависимость координат тела от времени:**

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

- Позволяет точно задать траекторию и положение тела в любой момент времени.
- Используется, например, при описании равномерного или равноускоренного движения.

2. Векторный способ

- Положение тела описывается **радиус-вектором** $\vec{r}(t)$, проведённым из начала координат в точку нахождения тела.
- Удобен при решении задач в пространстве, так как сразу учитывает направление.
- На его основе определяются скорость $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ и ускорение $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

3. Скалярный (траекторный) способ

- Движение описывается через **путь** $s(t)$, пройденный телом вдоль траектории за время t .
 - Подходит для простых задач, когда важна только длина траектории, а не положение в пространстве.
 - Применяется, например, в задачах о движении по дороге или поезда по рельсам.
-

Q: 4. Какие элементы входят в состав системы отсчета?

А: Система отсчёта в механике — это совокупность средств, с помощью которых описывается движение тел. В её состав входят три основных элемента:

1. Тело отсчёта

- Тело, относительно которого рассматривается движение других тел.
- Примеры: Земля, поезд, автомобиль, лабораторный стол.

2. Система координат

- Способ задания положения точки в пространстве.
- Может быть прямоугольная декартова, цилиндрическая, сферическая и т.д.

3. Часы (прибор для измерения времени)

- Позволяют отслеживать, как меняются координаты тела во времени.
-

Q: 5. С помощью каких кинематических характеристик описывается движение материальной точки?

А: Движение материальной точки в кинематике описывается рядом основных характеристик:

1. **Траектория** – линия, которую описывает точка в процессе движения.
2. **Путь s** – длина участка траектории, пройденного точкой за определённое время.
3. **Перемещение $\Delta\vec{r}$** – вектор, соединяющий начальное и конечное положение точки.
4. **Радиус-вектор $\vec{r}(t)$** – вектор, задающий положение точки в данный момент времени относительно начала координат.
5. **Скорость:**

- **Средняя** $v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}$ или $\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.
- **Мгновенная** $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

6. Ускорение:

- **Среднее** $\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.
 - **Мгновенное** $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$.
-

Q: 6. Что называют траекторией? Как подразделяют движения по типу траекторий?

A: Траектория — это воображаемая линия в пространстве, по которой движется материальная точка. Она получается, если соединить все последовательные положения точки во времени.

По типу траектории движение подразделяют на:

1. **Прямолинейное** — если траектория является прямой линией.
 - Примеры: движение поезда по прямому участку пути, падение тела вблизи поверхности Земли без учёта сопротивления воздуха.
 2. **Криволинейное** — если траектория представляет собой кривую линию.
 - Примеры: движение автомобиля по повороту дороги, движение планет по орбитам, полёт мяча по параболе.
-

Q: 7. Что называют перемещением точки? При каком движении модуль вектора перемещения будет равен пройденному точкой пути?

A: Перемещение точки — это **вектор**, соединяющий начальное положение материальной точки с её конечным положением.

- Обозначается $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.
- Всегда направлен **из начальной точки в конечную**.

Различие с путём:

- **Путь** s — это длина траектории, по которой двигалась точка.
- **Перемещение** — это прямая «стрелка» из начальной в конечную точку.

Когда модуль перемещения равен пути?

- Только при **прямолинейном движении в одном направлении** (без возвратов и изменения направления).
- В этом случае:

$$|\Delta\vec{r}| = s$$

Q: 8. *Что называют мгновенной скоростью точки? Как направлен вектор мгновенной скорости? Что называют средней скоростью движения? Какой ее физический смысл? Как направлен вектор средней скорости?*

A: Разберём по порядку:

1. Мгновенная скорость точки

- Это векторная величина, равная производной радиус-вектора по времени:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Показывает, с какой **быстротой** и в каком **направлении** движется точка в **данный момент времени**.

Направление вектора мгновенной скорости — касательно к траектории в данной точке, в сторону движения.

2. Средняя скорость движения

- Определяется как отношение вектора перемещения ко времени движения:

$$\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

- Её **физический смысл**: показывает, с какой **скоростью** и в каком **направлении** в **среднем** перемещалась точка за **рассматриваемый промежуток времени**.

Направление вектора средней скорости — совпадает с направлением вектора перемещения (из начальной точки в конечную).

Отличие:

- **Мгновенная скорость** — «здесь и сейчас», направлена по касательной к траектории.
- **Средняя скорость** — «в среднем за время», направлена от начала пути к концу.

Q: 9. *Что называют средним ускорением точки? Что характеризует эта величина? Как направлен вектор среднего ускорения? Какой физический смысл имеет мгновенное ускорение точки?*

А:

1. Среднее ускорение точки

- Это векторная величина, равная отношению изменения скорости к промежутку времени:

$$\vec{a}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

2. Что характеризует среднее ускорение

- Оно показывает, **как изменилась скорость тела (по величине и направлению) в среднем за данный промежуток времени.**

3. Направление вектора среднего ускорения

- Совпадает с направлением вектора приращения скорости $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.
- То есть указывает туда, куда «сдвинулась» скорость за время Δt .

4. Мгновенное ускорение точки

- Это предел среднего ускорения, когда промежуток времени стремится к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Физический смысл: мгновенное ускорение показывает, с какой **быстротой и в каком направлении** изменяется скорость точки в **данный момент времени.**

Q: 10. Как по графику зависимости проекции скорости от времени $v_x = v_x(t)$ построить графики зависимостей координаты $x = x(t)$ и проекции ускорения $a_x = a_x(t)$?

А: Из $v_x(t)$ к $x(t)$

- Формула: $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(\tau) d\tau$.
- На практике: площадь под графиком $v_x(t)$ от t_0 до t . Площадь **выше** оси t — прибавляет x ; **ниже** — вычитает.
- Геометрические признаки:

- ▶ Наклон касательной к $x(t)$ равен v_x : если $v_x > 0$, $x(t)$ растёт; если $v_x < 0$, убывает.
- ▶ Точки экстремума $x(t)$ там, где $v_x = 0$ (и меняет знак).
- Для кусочно-простых участков:
 - ▶ $v_x = \text{const} \rightarrow x(t)$ — прямая.
 - ▶ v_x — линейная функция времени $\rightarrow x(t)$ — парабола.
 - ▶ Площадь прямоугольников/треугольников удобно считать по формулам $S = v \cdot h$, $S = \frac{1}{2}b \cdot h$.

Из $v_x(t)$ к $a_x(t)$

- Формула: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$.
- На практике: **наклон** графика $v_x(t)$:
 - ▶ Наклон $> 0 \rightarrow a_x > 0$; наклон $< 0 \rightarrow a_x < 0$; горизонтальный участок $\rightarrow a_x = 0$.
 - ▶ Если $v_x(t)$ — прямая с постоянным наклоном $\rightarrow a_x$ — горизонтальная линия (константа).
 - ▶ Излом/разрыв $v_x(t) \rightarrow a_x$ скачкообразно меняется (в точке производная не определена).

Q: 11. Почему при криволинейном движении направление вектора ускорения не совпадает с направлением скорости?

A: Причина

При **криволинейном движении** меняется не только **величина скорости**, но и её **направление**.

- **Скорость** \vec{v} всегда направлена **по касательной** к траектории.
- Чтобы изменять **направление вектора скорости**, нужен вектор ускорения, который будет иметь **компоненту, перпендикулярную скорости**.

Состав ускорения

Полное ускорение \vec{a} раскладывается на две части:

1. **Тангенциальное ускорение** \vec{a}_τ — вдоль траектории, изменяет **величину скорости**.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

2. **Нормальное (центростремительное) ускорение** \vec{a}_n — перпендикулярно скорости, направлено к центру кривизны траектории, изменяет **направление скорости**.

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Q: 12. Дайте определение радиуса кривизны плоской криволинейной траектории.

A: Радиус кривизны плоской криволинейной траектории — это радиус той окружности, которая в данной точке траектории наилучшим образом её «приближает» (так называемая **оскуляющая окружность**).

Формально: радиус кривизны R характеризует степень «изгиба» траектории в данной точке.

- Если R велик \rightarrow кривая почти прямая (слабый изгиб).
- Если R мал \rightarrow кривая резко поворачивает (сильный изгиб).

Связь с ускорением

Для точки, движущейся по траектории:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

где a_n — нормальное (центростремительное) ускорение, v — скорость, R — радиус кривизны.

Q: 13. Автомобиль движется по закруглению дороги. Одинаковое ли расстояние проходят его правые и левые колеса?

A: Нет, расстояния будут разными.

Автомобиль при движении по закруглению описывает **движение по дуге окружности**.

- Центр поворота находится слева от автомобиля (если поворот налево) или справа (если поворот направо).
- Тогда:
 - **Левые колёса** движутся по окружности с меньшим радиусом $R - \frac{d}{2}$.
 - **Правые колёса** — по окружности с большим радиусом $R + \frac{d}{2}$, где d — ширина колеи автомобиля.

Следствие

- Длины дуг окружностей (а значит, пройденные расстояния) различаются:

$$s_{\text{прав}} = \left(R + \frac{d}{2} \right) \varphi, \quad s_{\text{лев}} = \left(R - \frac{d}{2} \right) \varphi$$

где φ — угол поворота в радианах.

- Таким образом, **правые колёса проходят большее расстояние, чем левые** (при повороте влево; при повороте вправо — наоборот).

Q: 14. Каков физический смысл вектора бесконечно малого угла поворота $d\vec{\varphi}$?

A: Вектор **бесконечно малого угла поворота** $d\vec{\varphi}$ — это векторная величина, характеризующая **поворот твёрдого тела на бесконечно малый угол** за малый промежуток времени dt .

Физический смысл

- **Модуль** $|d\vec{\varphi}|$ равен величине угла поворота $d\varphi$ (в радианах).
- **Направление** определяется по **правилу правого винта**: если вращать винт по ходу поворота тела, то поступательное движение винта укажет направление вектора $d\vec{\varphi}$.
- В отличие от конечного угла поворота (который не является вектором), бесконечно малый угол $d\vec{\varphi}$ можно рассматривать как вектор, так как в пределе операции сложения углов становится коммутативной.

Связь с другими величинами

Из этого определения вводится **вектор угловой скорости**:

$$\omega = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Он показывает, с какой скоростью и вокруг какой оси вращается тело.

Q: 15. *Что называют угловым ускорением? Дайте определение и запишите единицу измерения углового ускорения. Как определяется направление вектора углового ускорения и чему равен его модуль?*

А: Угловое ускорение — это векторная величина, равная производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Единица измерения

- В СИ:

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

(радиан на секунду в квадрате).

Физический смысл

- Модуль ε показывает, **с какой быстротой изменяется угловая скорость по величине.**
- Направление $\vec{\varepsilon}$ показывает, **как изменяется направление вектора угловой скорости.**

Направление вектора углового ускорения

- Совпадает с направлением приращения угловой скорости $d\vec{\omega}$.
 - Определяется по правилу правого винта:
 - ▶ если тело «раскручивается» $\rightarrow \vec{\varepsilon}$ направлено так же, как $\vec{\omega}$;
 - ▶ если «тормозится» \rightarrow противоположно $\vec{\omega}$.
-

Q: 16. *Запишите формулу связи между векторами линейных и угловых скоростей.*

А: Формула выглядит так:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Где:

- \vec{v} — линейная скорость точки тела,
- $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения,
- \vec{r} — радиус-вектор точки относительно оси вращения,
- знак « \times » — векторное произведение.

Свойства:

- $|\vec{v}| = \omega r_{\perp}$, где r_{\perp} — перпендикуляр от оси вращения до точки.
 - Направление \vec{v} всегда **перпендикулярно плоскости**, образованной $\vec{\omega}$ и \vec{r} , то есть **касательно к траектории**.
-

Q: 17. Что характеризует тангенциальное ускорение? Как направлен вектор тангенциального ускорения? Чему равен его модуль?

A: Тангенциальное ускорение \vec{a}_{τ} показывает, **с какой скоростью изменяется по величине линейная скорость точки**, движущейся по криволинейной траектории.

- Если $|\vec{v}|$ растёт $\rightarrow \vec{a}_{\tau}$ направлено по движению.
- Если $|\vec{v}|$ убывает $\rightarrow \vec{a}_{\tau}$ направлено против движения.

2. Направление вектора

\vec{a}_{τ} всегда направлено **по касательной к траектории**:

- вдоль вектора скорости при разгоне,
- противоположно вектору скорости при торможении.

3. Модуль тангенциального ускорения

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}$$

где v — модуль линейной скорости.

Q: 18. Что характеризует нормальное ускорение? Как направлен вектор нормального ускорения? Чему равен модуль этого ускорения? Зависит ли направление вектора нормального ускорения от направления движения точки по траектории?

А: Нормальное (или центростремительное) ускорение \vec{a}_n отвечает за **изменение направления вектора скорости** при криволинейном движении.

- Оно не меняет модуль скорости, а «поворачивает» её.

2. Направление вектора

\vec{a}_n всегда направлено **перпендикулярно скорости** и обращено к **центру кривизны траектории**.

3. Модуль нормального ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

где v — скорость точки, R — радиус кривизны траектории.

4. Зависимость от направления движения

Направление \vec{a}_n **не зависит** от того, движется точка «вперёд» или «назад» по траектории.

- В обоих случаях вектор направлен к центру кривизны.

Q: 19. Запишите связь между модулями нормального, тангенциального и полного ускорений. Как направление вектора полного ускорения связано с направлением вектора скорости точки?

А: 1. Связь модулей ускорений

Полное ускорение \vec{a} складывается из двух взаимно перпендикулярных составляющих:

- **тангенциального** \vec{a}_τ (изменяет модуль скорости),
- **нормального** \vec{a}_n (изменяет направление скорости).

По теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

2. Направление полного ускорения

- \vec{a} всегда лежит в плоскости, образованной векторами \vec{v} и \vec{a}_n .
- Оно образует угол с вектором скорости:

- ▶ если $\vec{a}_\tau \neq 0$, то \vec{a} имеет наклон вперёд или назад вдоль траектории;
 - ▶ если $\vec{a}_\tau = 0$, то \vec{a} перпендикулярно \vec{v} (чисто нормальное ускорение, равномерное движение по окружности).
-

Q: 20. *Может ли полное ускорение точки при криволинейном движении быть направлено по касательной? По нормали?*

A:

1. Может ли полное ускорение быть направлено по касательной?

Да, **может**, но только в частном случае:

- если движение **прямолинейное**, тогда $a_n = 0$, а остаётся только тангенциальная составляющая \vec{a}_τ ;
- тогда полное ускорение совпадает с касательной (совпадает с направлением скорости при разгоне, противоположно при торможении).

При криволинейном движении строго по касательной \vec{a} быть не может, потому что всегда существует ненулевая нормальная составляющая a_n .

2. Может ли полное ускорение быть направлено по нормали?

Да, это возможно при **равномерном движении по окружности**:

- скорость тела постоянна по величине, значит $a_\tau = 0$;
 - остаётся только нормальное ускорение \vec{a}_n , направленное к центру кривизны;
 - тогда полное ускорение полностью совпадает с нормалью.
-

Q: 21. *Что называют угловой скоростью движения точки по окружности? Дайте определение единицы угловой скорости.*

A: **Угловая скорость** — это физическая величина, которая показывает, с какой быстротой изменяется угол поворота радиус-вектора, проведённого из центра окружности к точке.

Формула:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

где φ — угол поворота (в радианах), t — время.

2. Единица измерения

В системе СИ:

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

(радиан в секунду).

Физический смысл единицы: угловая скорость равна 1 рад/с, если радиус-вектор точки за одну секунду поворачивается на угол 1 радиан.

Q: 22. Запишите формулу угловой скорости в векторной форме. Как направлен вектор угловой скорости и чему равен ее модуль?

A: 1. Формула в векторной форме

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

2. Направление вектора угловой скорости

- Определяется **по правилу правого винта**: если вращать винт в направлении вращения тела, то поступательное движение винта укажет направление $\vec{\omega}$.
- То есть $\vec{\omega}$ всегда направлен **вдоль оси вращения**.

3. Модуль угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Он равен **скорости изменения угла поворота радиус-вектора** и измеряется в рад/с.

Q: 23. Запишите выражения для нормального и тангенциального ускорений в векторной форме.

A: 1. Тангенциальное ускорение

Характеризует изменение **модуля скорости**:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$$

где $\vec{\tau}$ — единичный вектор по касательной к траектории (совпадает с направлением скорости).

2. Нормальное ускорение

Характеризует изменение **направления** скорости:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали, направленный к центру кривизны траектории, R — радиус кривизны.

Q: 24. Запишите формулу связи между векторами тангенциальног \vec{a}_τ и углового $\vec{\beta}$ ускорения. Изобразите эти векторы на рисунке.

А: Формула связи

- Векторно: $\vec{a}_\tau = \vec{\beta} \times \vec{r}$.
- По модулям: $a_\tau = \beta r$, направление - по касательной в сторону увеличения скорости (правило правой руки относительно $\vec{\beta}$).

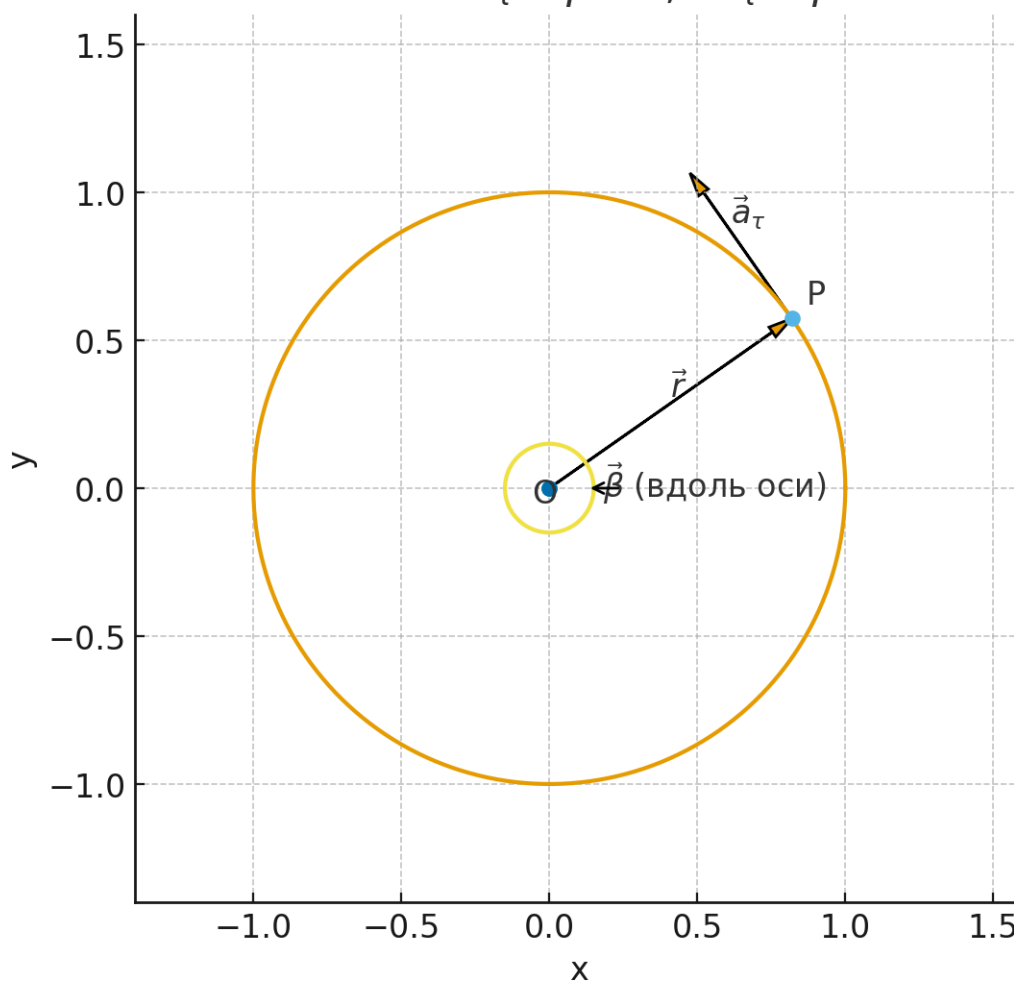
Где \vec{r} — радиус-вектор точки от оси вращения, $\vec{\beta}$ — угловое ускорение (вдоль оси вращения).

Дополнительно в полной формуле ускорения точки вращательного движения:

$$\vec{a} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

но здесь нас интересует именно первая часть.

Связь: $\vec{a}_\tau = \vec{\beta} \times \vec{r}$, $a_\tau = \beta r$

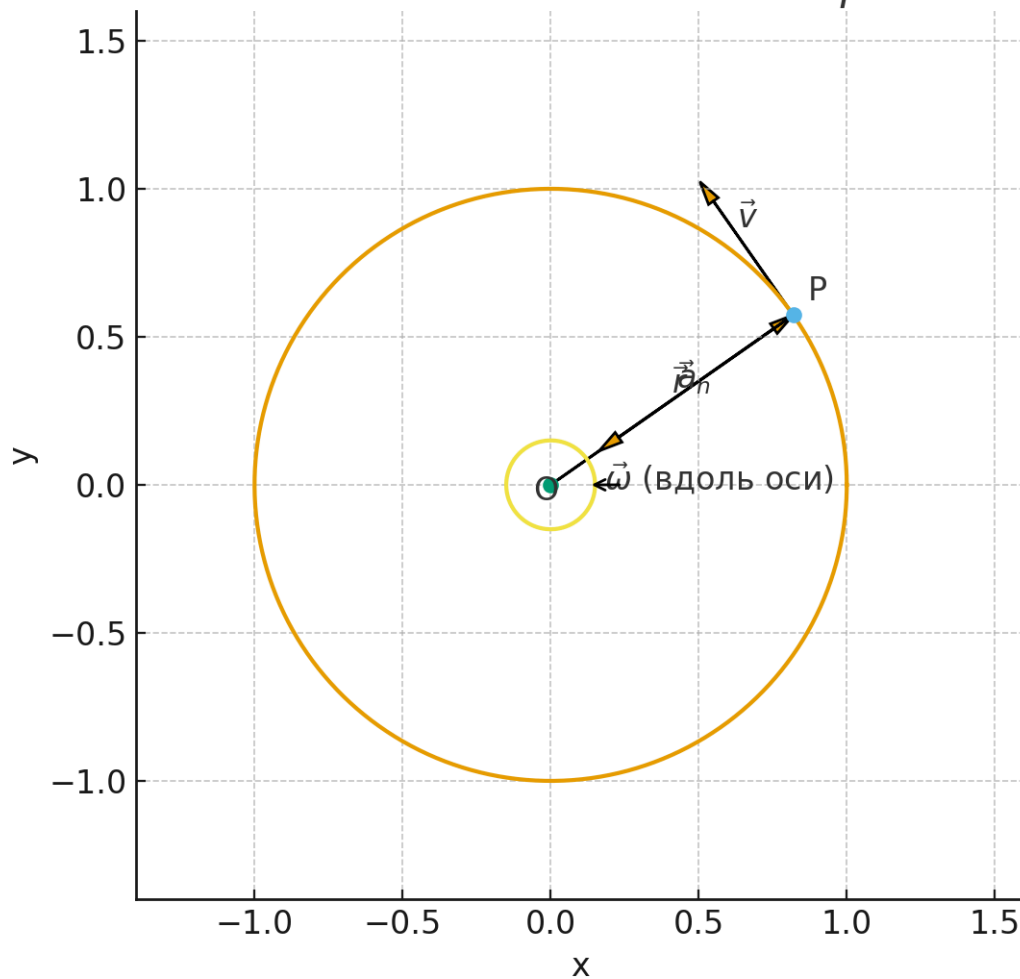


Q: 25. Запишите формулу связи между векторами нормального ускорения \vec{a}_n , угловой $\vec{\omega}$ и линейной \vec{v} скоростей. Изобразите связь между ними графически.

A: Формулы связи:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Связи: $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, $a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



Q: 26. Дайте определение понятию «число степеней свободы механической системы». Каково это число для свободного твердого тела? для тела закрепленного на неподвижной оси вращения?

А: Число степеней свободы механической системы — это минимальное количество независимых координат, необходимых для однозначного описания положения системы в пространстве.

Иными словами: сколько независимых параметров нужно задать, чтобы точно определить положение тела.

Для различных случаев

1. Свободное твёрдое тело в пространстве

- Положение определяется **3 координатами поступательного движения** (например, координаты центра масс x, y, z) и **3 углами, задающими ориентацию** тела (например, углы Эйлера).

$$f = 6$$

То есть у свободного твёрдого тела — **6 степеней свободы**.

2. Тело, закреплённое на неподвижной оси вращения

- Такое тело может только вращаться вокруг одной оси.
- Его положение задаётся **одним углом поворота φ** .

$$f = 1$$

Q: 27. *Какое движение называют поступательным? Какие физические величины характеризуют кинематику поступательного движения твёрдого тела? Приведите примеры прямолинейного и криволинейного поступательного движения.*

A: **Поступательное движение** твёрдого тела — это движение, при котором **все точки тела движутся одинаково**:

- их траектории одинаковы по форме и параллельны друг другу,
- в любой момент времени скорости всех точек равны по величине и направлению.

2. Физические величины, характеризующие кинематику поступательного движения

Поскольку все точки тела движутся одинаково, его движение описывается так же, как движение **материальной точки**:

- координата/радиус-вектор $\vec{r}(t)$,
- перемещение $\Delta\vec{r}$,
- скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$,
- ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

3. Примеры

- **Прямолинейное поступательное движение:**
 - лифт, движущийся вверх или вниз;
 - автомобиль на прямом участке дороги.

- **Криволинейное поступательное движение:**

- ▶ кабина аттракциона «колесо обозрения» (если рассматривать движение кабины как целого);
 - ▶ поезд, движущийся по повороту пути;
 - ▶ автобус на закруглении дороги.
-

Q: 28. *Какое движение называют вращательным? Какие различают оси вращения? Что такое мгновенная ось вращения? Приведите примеры мгновенных осей вращения. Какое движение называют свободным?*

A: **Вращательное движение** твёрдого тела — это движение, при котором **все его точки описывают окружности**, центры которых лежат на одной прямой. Эта прямая называется **осью вращения**.

2. Виды осей вращения

- **Неподвижная ось** — ось фиксирована в пространстве (например, колесо, закреплённое на оси).
- **Подвижная ось** — ось меняет положение в пространстве (например, вращение волчка, когда его ось наклоняется).

3. Мгновенная ось вращения

Это такая воображаемая ось, вокруг которой тело **в данный момент времени** вращается.

- Даже при сложном движении твёрдого тела (например, качении) всегда можно указать мгновенную ось вращения.

Примеры:

- При качении колеса по дороге мгновенная ось вращения проходит через точку касания с поверхностью.
- При падении волчка мгновенная ось проходит через его контакт с плоскостью.

4. Свободное движение

Свободное движение твёрдого тела — это движение, происходящее **без наложенных связей**, то есть тело может перемещаться и вращаться как угодно в пространстве.

- У свободного тела — **6 степеней свободы** (3 поступательных + 3 вращательных).

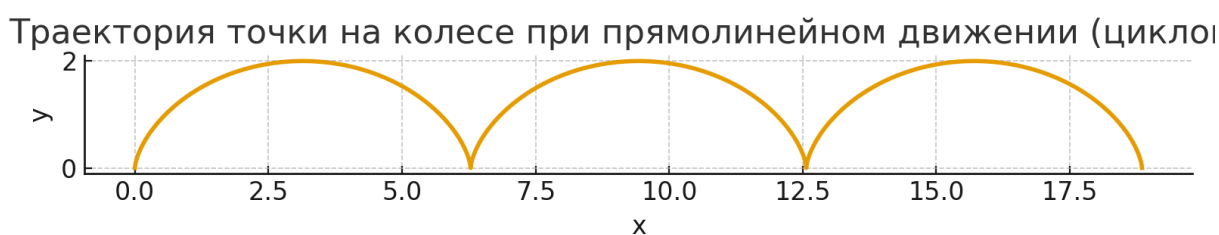
Q: 29. Какое движение называют плоским? Постройте примерную траекторию движения точки, расположенной на колесе автомобиля, который движется прямолинейно.

A: Плоское движение твёрдого тела — это движение, при котором **все точки тела движутся в параллельных плоскостях** (чаще — в одной плоскости). Эквивалентно: мгновенная ось вращения всегда перпендикулярна этой плоскости; у такого движения 3 степени свободы.

Траектория точки на колесе при прямолинейном качении

Для точки на ободе колеса (качение без проскальзывания) траектория — **циклоид**:

$$x(t) = R(t - \sin t), \quad y(t) = R(1 - \cos t).$$



Q: 30. Запишите преобразования Галилея. Какие ньютоновские представления о пространстве и времени лежат в основе этих преобразований?

A: 1. Преобразования Галилея

Они связывают координаты и время одной и той же точки в двух инерциальных системах отсчёта:

- Пусть система K' движется относительно системы K поступательно и равномерно со скоростью v вдоль оси x .
- Тогда:

$$x' = x - vt,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = t.$$

2. Ньютоновские представления, лежащие в основе

1. Абсолютное время

- Время течёт одинаково для всех наблюдателей, независимо от движения систем отсчёта.
- Поэтому в преобразованиях Галилея: $t' = t$.

2. Абсолютное пространство

- Пространство считается неизменным и одинаковым для всех наблюдателей.
- Разные инерциальные системы отсчёта отличаются только относительным поступательным движением.

Q: 31. *Используя преобразования Галилея, получите закон сложения скоростей в классической физике. Обратите внимание на принятую терминологию для определения скоростей в этом законе.*

A: Галилеевы преобразования (K' движется вдоль $+x$ со скоростью V относительно K)

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Дифференцируем по времени:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V = u_x - V \Rightarrow u_x = u'_x + V,$$

$$u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z.$$

Закон сложения скоростей (векторно)

$$\vec{u} = \vec{V} + \vec{u}'$$

- \vec{u} — **абсолютная скорость** точки (скорость точки в системе K);
- \vec{u}' — **относительная скорость** той же точки (в системе K');
- \vec{V} — **переносная скорость** (скорость системы K' относительно K).

Для осевого движения: $u_x = u'_x + V$, а поперечные компоненты не меняются: $u_y = u'_y, u_z = u'_z$.

(При постоянном \vec{V} : ускорения совпадают, $\vec{a} = \vec{a}'$.)

Динамика

Q: 1. *Сформулируйте первый закон Ньютона.*

A: Существуют такие системы отсчёта (называемые **инерциальными**), в которых **каждое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения**, пока на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано.

Q: 2. *Что называют инерцией тела? Приведите примеры движения по инерции.*

A: Инерция — это свойство тела **сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения**, если на него не действуют силы или их действие взаимно компенсируется.

Инерция отражает «ленивость» тела менять своё состояние движения.

Примеры движения по инерции

- Машина после выключения двигателя продолжает катиться по прямой (пока не остановят силы трения и сопротивления воздуха).
 - Камень, брошенный горизонтально, продолжает двигаться вперёд по инерции, даже когда начинает падать вниз.
 - Пассажир в автобусе при резкой остановке «по инерции» наклоняется вперёд.
 - Конькобежец или хоккеист, оттолкнувшись, некоторое время скользит почти равномерно по льду.
 - Планеты движутся по своим орбитам, сохраняя скорость благодаря инерции (при действии силы тяготения, которая меняет только направление).
-

Q: 3. *Как объяснить, что бегущий человек, споткнувшись, падает в направлении своего движения, а поскользнувшись – в направлении, противоположном направлению своего движения?*

A:

Случай 1. Человек **споткнулся**

- Ноги внезапно **останавливаются** (наталкиваются на препятствие).
- Но верхняя часть тела по инерции продолжает двигаться вперёд.

- Центр масс смещается за пределы опоры → человек падает **вперёд, по направлению движения**.

Случай 2. Человек **поскользнулся**

- Нога внезапно скользит вперёд (нет трения, которое её удерживает).
 - Нижняя часть тела уходит вперёд, а верхняя по инерции остаётся «позади».
 - Центр масс оказывается позади опоры → человек падает **назад, противоположно движению**.
-

Q: 4. Какие системы отсчёта называют инерциальными и неинерциальными? Приведите примеры таких систем.

A: 1. **Инерциальные системы отсчёта (ИСО)**

Это такие системы отсчёта, в которых выполняется **первый закон Ньютона**: тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на него не действуют силы или их действие скомпенсировано.

Примеры ИСО:

- Земля и связанные с ней системы отсчёта с **хорошим приближением** (если пренебречь её вращением вокруг оси и Солнца).
- Космический корабль, движущийся равномерно и прямолинейно вдали от звёзд и планет.
- Вагон поезда, движущийся без ускорения по прямому пути.

2. **Неинерциальные системы отсчёта (НИСО)**

Это системы, которые движутся с **ускорением** относительно инерциальных. В них тела **меняют своё движение даже без действия сил**, и для объяснения приходится вводить фиктивные (инерционные) силы.

Примеры НИСО:

- Карусель: пассажиров «отбрасывает» к краям из-за центробежной силы инерции.
- Лифт, ускоренно движущийся вверх или вниз.

- Автомобиль, резко тормозящий или ускоряющийся (пассажиры «кидают» вперёд или назад).
 - Земля с учётом её суточного вращения вокруг оси (поэтому в механике учитывают силы Кориолиса и центробежные силы).
-

Q: 5. В каких системах отсчёта выполняются законы Ньютона?

A: Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчёта (ИСО).

Обоснование

- В ИСО выполняется **первый закон Ньютона**: тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения при отсутствии сил.
 - Во всех **неинерциальных системах отсчёта** (движущихся с ускорением относительно ИСО) для сохранения законов Ньютона приходится **вводить фиктивные силы** — силы инерции (центробежная, сила Кориолиса и др.).
-

Q: 6. Что является причиной изменения состояния покоя или равномерного прямолинейного движения тела в инерциальной системе отсчёта?

A: Причиной изменения состояния покоя или равномерного прямолинейного движения тела в инерциальной системе отсчёта является **действие силы** (взаимодействие с другими телами).

Формулировка через второй закон Ньютона

$$\vec{F}_{\text{рез}} = m\vec{a}$$

- если $\vec{F}_{\text{рез}} = 0 \rightarrow$ тело сохраняет своё состояние покоя или равномерного прямолинейного движения (закон инерции);
 - если $\vec{F}_{\text{рез}} \neq 0 \rightarrow$ у тела появляется ускорение, и оно изменяет скорость по величине или направлению.
-

Q: 7. Сформулируйте определение механической силы.

А: Механическая сила — это векторная физическая величина, являющаяся мерой механического взаимодействия тел, в результате которого изменяется скорость движения (или форма) тела.

Основные свойства

- Сила имеет **модуль, направление и точку приложения**.
- В ИСО изменение скорости тела определяется вторым законом Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- Сила может вызывать как **изменение состояния движения** (ускорение, торможение, изменение направления), так и **деформацию тела**.

Q: 8. *Какие взаимодействия называются фундаментальными? Назовите критерии, которые лежат в основе характеристики этих взаимодействий.*

А: Фундаментальные взаимодействия — это такие взаимодействия, которые лежат в основе всех физических явлений и **не сводятся к другим, более простым взаимодействиям**.

2. Четыре фундаментальных взаимодействия

1. **Гравитационное** — между всеми телами, имеющими массу.
2. **Электромагнитное** — между электрически заряженными частицами.
3. **Сильное** — связывает протоны и нейтроны в ядрах (действует между кварками и глюонами).
4. **Слабое** — отвечает за превращения элементарных частиц (например, β -распад).

3. Критерии характеристики фундаментальных взаимодействий

- **Универсальность** — на какие частицы и тела оно действует (все массы, все заряды, только кварки и т.д.).
- **Интенсивность (сила взаимодействия)** — насколько велико действие (сильное \gg электромагнитное \gg слабое \gg гравитационное).
- **Дальность действия** — бесконечная (гравитация, электромагнетизм) или очень малая (сильное, слабое).

- **Переносчики взаимодействия** — кванты поля (гравитон, фотон, глюоны, W/Z-бозоны).
-

Q: 9. Приведите примеры физических явлений, в которых проявляются известные типы фундаментальных взаимодействий.

A: Примеры проявления фундаментальных взаимодействий

1. Гравитационное взаимодействие

- Падение яблока на Землю.
- Движение планет вокруг Солнца.
- Приливы и отливы под действием Луны.
- Держит галактики и Вселенную в целом.

2. Электромагнитное взаимодействие

- Притяжение и отталкивание электрических зарядов.
- Работа электродвигателя и генератора.
- Свет — это электромагнитные волны.
- Химические реакции (связи между атомами и молекулами).

3. Сильное взаимодействие

- Удерживает протоны и нейтроны внутри атомного ядра.
- Обеспечивает существование атомов тяжелее водорода.
- Является источником энергии в термоядерных реакциях (Солнце, водородная бомба).

4. Слабое взаимодействие

- β -распад (распад нейтрона на протон, электрон и антинейтрино).
 - Процессы в Солнце: превращения протонов, обеспечивающие ядерный синтез.
 - Радиоактивность, используемая в медицине и геологии.
-

Q: 10. Сформулируйте условие равенства двух сил. Какая сила называется результирующей? Как находится результирующая нескольких сил, направленных под углом друг к другу?

A: 1. Условие равенства двух сил

Две силы равны, если они имеют:

- одинаковый **модуль**,
- одно и то же **направление**,
- одну и ту же **линию действия** (прямая, вдоль которой приложены силы).

2. Результирующая сила

Результирующая сила — это единственная сила, которая производит на тело такое же действие, как несколько данных сил вместе.

3. Как найти результирующую нескольких сил

- Если силы направлены под углом, их нужно **складывать как векторы**.
- Геометрические способы:
 - **правило параллелограмма** (для двух сил),
 - **правило многоугольника** (для нескольких).
- Аналитически (для двух сил под углом φ):

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \varphi}$$

где R — модуль результирующей.

Q: 11. При каком условии тело в системе, где действуют силы, будет находиться в состоянии покоя, или двигаться равномерно прямолинейно?

A: Чтобы тело находилось **в покое** или двигалось **равномерно и прямолинейно** (т.е. без ускорения), необходимо и достаточно, чтобы **результирующая всех сил, действующих на него, была равна нулю**:

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

Обоснование

- Это напрямую следует из **второго закона Ньютона**:

$$\vec{F}_{\text{рез}} = m\vec{a}$$

- Если $\vec{F}_{\text{рез}} = 0$, то $\vec{a} = 0$.
- При $a = 0$ тело сохраняет своё состояние:

- ▶ остаётся в покое, если скорость была равна нулю,
 - ▶ или движется равномерно и прямолинейно, если имело ненулевую скорость.
-

Q: 12. *Что называют инертностью тела? Приведите примеры, которые подтверждают проявление инертности. Какая физическая величина служит мерой инертности тела?*

А: **Инертность** тела — это свойство тела **сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения и сопротивляться изменению скорости** (т.е. изменению модуля или направления движения) под действием сил.

2. Примеры проявления инертности

- Автомобиль при разгоне: требуется сила двигателя, чтобы изменить скорость (чем больше масса, тем труднее разогнаться).
- При резкой остановке поезда пассажиров по инерции бросает вперёд.
- Труднее сдвинуть с места тяжёлый ящик, чем лёгкий.
- Космический аппарат, выведенный за пределы атмосферы, движется по инерции без двигателя.

3. Мера инертности

Мерой инертности тела служит его **масса** m .

- Чем больше масса, тем большее воздействие (сила) нужно приложить, чтобы изменить скорость:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Q: 13. *Сформулируйте определение массы. Опишите известные вам способы измерения массы.*

А: **Масса** — это физическая величина, которая:

- служит **мерой инертности** тела (способности сопротивляться изменению движения под действием силы),
- одновременно является **мерой гравитационного взаимодействия** тел (тяжести).

2. Способы измерения массы

1. Динамический метод (через второй закон Ньютона)

- Измеряют силу и ускорение:

$$m = \frac{F}{a}$$

- Пример: определение массы через действие силы пружины или двигателя.

2. Статический метод (сравнение с эталоном на весах)

- Сравнивают силу тяжести данного тела с силой тяжести известной массы.
- Пример: лабораторные рычажные весы.

3. Инерционный метод (через сравнение ускорений тел)

- Два тела, на которые действуют одинаковые силы, будут иметь ускорения, обратно пропорциональные массам:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

4. Современные методы

- Электронные весы (по силе реакции опоры).
- Метод крутильных весов (Кавендиш) — для гравитационного измерения массы.
- В микрофизике: определение масс частиц по радиусу траектории в магнитном поле.

Q: 14. Сформулируйте второй закон Ньютона и дайте определения всех входящих в него физических величин.

A: Ускорение, приобретаемое телом, прямо пропорционально равнодействующей сил, приложенных к нему, и обратно пропорционально его массе.

Математическая форма:

$$\vec{F}_{\text{рез}} = m\vec{a}$$

Физические величины

1. $\vec{F}_{\text{рез}}$ — результирующая сила

- Векторная сумма всех сил, действующих на тело.
- Определяет, как изменяется движение тела.
- Измеряется в ньютонах (Н).

2. m — масса тела

- Мера инертности тела (сопротивления изменению скорости).
- Измеряется в килограммах (кг).

3. \vec{a} — ускорение тела

- Характеризует изменение скорости тела по модулю и/или направлению.
- Определяется как $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.
- Измеряется в м/с².

Q: 15 Из второго закона Ньютона следует, что ускорение тела $\vec{a} = 0$, если результирующая внешних сил $\vec{F} = 0$. Можно ли утверждать, что первый закон Ньютона является частным случаем второго закона?

A: Разбор вопроса

• **Второй закон Ньютона:**

$$\vec{F}_{\text{рез}} = m\vec{a}.$$

Если $\vec{F}_{\text{рез}} = 0$, то $\vec{a} = 0$. Значит, тело движется **равномерно и прямолинейно** или находится **в покое**.

- **Первый закон Ньютона (закон инерции):** Говорит именно об этом — тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на него не действуют силы (или силы скомпенсированы).

Ответ

Да, по содержанию первый закон Ньютона можно рассматривать как частный случай второго закона при $\vec{F}_{\text{рез}} = 0$.

Но есть важный нюанс:

- **Первый закон** вводит само понятие **инерциальных систем отсчёта** и постулирует их существование.

- **Второй закон** формулируется и работает только внутри таких систем.
-

Q: 16. Сформулируйте второй закон Ньютона в самой общей форме. В чем отличие этой формулировки от выраженной уравнением $\vec{F} = m\vec{a}$?

A: Второй закон Ньютона в общей форме

Сила, действующая на тело, равна **производной от импульса тела по времени**:

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \text{где } \vec{p} = m\vec{v}.$$

Отличие от формы $\vec{F} = m\vec{a}$

1. **Общая формулировка применима всегда:**

- для переменной массы (ракета, струя газа, сыпучие тела и т.п.);
- для релятивистских случаев (когда масса зависит от скорости);
- для систем тел.

2. **Упрощённая форма $\vec{F} = m\vec{a}$ справедлива только при условии:**

- масса тела постоянна ($m = \text{const}$);
 - движение рассматривается в нерелятивистской механике (скорости $v \ll c$).
-

Q: 17. Что называют импульсом тела? В каких единицах измеряется импульс тела?

A: Импульс тела (или количество движения) — это векторная величина, равная произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Свойства

- Направление импульса совпадает с направлением скорости.
- Импульс характеризует «количество движения» тела и играет ключевую роль в законе сохранения импульса.

Единицы измерения

В системе СИ:

$$[\vec{p}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

Q: 18. *Что называют импульсом силы? Как рассчитать импульс силы за конечный интервал времени в случаях, если: а) сила не изменяется, б) сила изменяется с течением времени?*

А: Импульс силы — это векторная величина, равная произведению силы на время её действия:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

Импульс силы показывает, какое изменение импульса тела вызывает данная сила.

2. Закон связи

$$\Delta \vec{p} = \vec{I}$$

т.е. импульс силы за время действия равен изменению импульса тела.

3. Вычисление импульса силы

а) Если сила постоянна во времени:

$$\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F} \Delta t$$

б) Если сила изменяется во времени:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

(геометрически — это площадь под графиком зависимости силы от времени).

Q: 19. *Сформулируйте третий закон Ньютон. Приведите примеры его проявления.*

А: Третий закон Ньютона

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, **всегда равны по модулю, противоположны по направлению и приложены к разным телам:**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Примеры проявления

1. Опора и тело

- Человек стоит на полу: он давит на пол силой тяжести, пол действует на него силой реакции опоры.

2. Удар молотка по гвоздю

- Молоток действует на гвоздь, забивая его; гвоздь действует на молоток противоположной силой (поэтому рука ощущает удар).

3. Движение ракеты

- Газы вылетают из сопла с силой, а ракета получает реактивную силу, направленную в противоположную сторону.

4. Плавание человека

- Пловец отталкивает воду руками и ногами назад, вода толкает его вперёд.

5. Прыжок

- Человек отталкивается ногами от земли вниз, земля «отталкивает» его вверх.

Q: 20. *Являются ли уравновешивающими силы действия и противодействия? Имеют ли эти силы результирующую?*

A: 1. **Являются ли силы действия и противодействия уравновешивающими?**

Нет

- **Уравновешивающие силы** действуют на **одно и то же тело** и в сумме дают ноль \rightarrow тело не ускоряется.

- **Силы действия и противодействия** по третьему закону Ньютона действуют **на разные тела**, поэтому они не могут уравновешивать друг друга.

2. Имеют ли силы действия и противодействия результирующую?

Нет

- Так как они приложены к разным телам, их нельзя складывать как силы, действующие на одно тело.
- Каждое тело испытывает свою силу, и для каждого из них действуют **свои уравнения движения**.

Q: 21. *Человек тащит тележку. Перечислите силы, действующие на человека и тележку при движении по горизонтальной и наклонной дороге.*

A: Разберём отдельно человека и тележку и два случая дороги.

1. Горизонтальная дорога

На человека действуют силы:

- сила тяжести \vec{F}_t , направленная вниз;
- сила нормальной реакции опоры \vec{N} , направленная вверх;
- сила трения между обувью и дорогой (реакция опоры), которая обеспечивает движение (толкает человека вперёд, т.к. он сам давит ногой назад);
- сила со стороны тележки через ручку (обычно назад и немного вниз).

На тележку действуют силы:

- сила тяжести \vec{F}_t (вниз);
- сила нормальной реакции дороги \vec{N} (вверх);
- сила тяги со стороны человека (через ручку, вперёд и немного вверх);
- сила трения качения или трения скольжения (против движения, назад).

2. Наклонная дорога (вверх или вниз)

На человека:

- сила тяжести (вертикально вниз);
- нормальная реакция поверхности (перпендикулярно наклону);

- сила трения (вдоль наклонной, удерживает или помогает движению);
- сила со стороны тележки (через ручку, направлена вниз по склону, если тележка тянет назад).

На тележку:

- сила тяжести (вертикально вниз, раскладывается на компоненту вдоль наклона $mg \sin \alpha$ и перпендикулярную $mg \cos \alpha$);
 - нормальная реакция наклонной поверхности;
 - сила тяги человека (вдоль наклона вверх, иногда с вертикальной компонентой);
 - сила трения качения/скольжения (против движения).
-

Q: 22. Какое трение называют сухим и какое — вязким?

А: 1. Сухое трение

- Возникает при **касании твёрдых поверхностей**.
- Обусловлено неровностями поверхностей и силами молекулярного сцепления.
- Характеризуется коэффициентом трения.
- Бывает:
 - **трение покоя** (удерживает тело до определённой силы),
 - **трение скольжения**,
 - **трение качения**.

Примеры: скольжение ящика по полу, качение колеса по дороге.

2. Вязкое трение

- Возникает при **движении тела в жидкости или газе**.
- Сила сопротивления пропорциональна скорости (при малых скоростях):

$$F = -kv$$

или зависит от квадрата скорости (при больших скоростях):

$$F \sim v^2$$

- Обусловлено внутренним трением (вязкостью) среды.

Примеры: движение шарика в масле, сопротивление воздуха движению автомобиля или парашютиста.

Q: 23. *Что определяет сила трения покоя? Как эту силу можно измерить на практике? Какие значения может принимать эта сила? В каких границах изменяется сила трения покоя? Что называют максимальной силой трения покоя?*

A: 1. Что определяет сила трения покоя

Сила трения покоя — это сила, возникающая между соприкасающимися поверхностями, которая **удерживает тело от начала движения**.

- Она направлена **вдоль поверхности**, противоположно действующей силе, которая пытается сдвинуть тело.

2. Как измерить на практике

- На тело прикладывают постепенно возрастающую силу (например, динамометром).
- Пока тело не двигается, динамометр показывает силу трения покоя.
- При срыве с места сила достигает максимума — **максимальной силы трения покоя**.

3. Какие значения может принимать сила трения покоя

- Сила трения покоя изменяется в зависимости от приложенной силы, **адаптируясь к ней**:

$$F_{\text{тр.п}} = F_{\text{прил}}, \quad \text{пока тело покоится.}$$

4. Границы изменения силы трения покоя

$$0 \leq F_{\text{тр.п}} \leq F_{\text{тр.п}}^{\text{max}}$$

5. Максимальная сила трения покоя

- Это наибольшее значение силы трения покоя, при котором тело ещё остаётся неподвижным.
- Определяется формулой:

$$F_{\text{тр.п}}^{\text{max}} = \mu N$$

где μ — коэффициент трения покоя, N — сила нормальной реакции.

Q: 24. Запишите аналитический вид закона Амонтона - Кулона. От чего зависит коэффициент трения покоя? Может ли быть он больше > 1 ?

A: 1. Закон Амонтона – Кулона (аналитический вид)

Для скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

Для предельного трения покоя:

$$F_{\text{тр.п}}^{\text{max}} = \mu N$$

где:

- $F_{\text{тр}}$ — сила трения,
- N — сила нормальной реакции поверхности,
- μ — коэффициент трения (покоя или скольжения).

2. От чего зависит коэффициент трения покоя

- От **материала и состояния поверхностей** (сталь по льду, дерево по асфальту и т.д.).
- От **шероховатости** и чистоты поверхностей.
- От **наличия смазки** (уменьшает μ).
- Слабо зависит от площади соприкосновения (в отличие от интуитивного ожидания).

3. Может ли коэффициент трения покоя быть больше 1?

- $\mu > 1$ означает, что сила трения больше силы нормального давления.
- Это возможно для очень шероховатых или «липких» поверхностей (резина по сухому асфальту, специальные покрытия).
- Например, для хорошей автомобильной шины на сухом асфальте $\mu \approx 1.0-1.2$.

Q: 25. Как при помощи наклонной плоскости можно определить коэффициент трения покоя? Что называют углом трения покоя? Нарисуйте качественный график зависимости силы трения, которая действует на тело, от угла наклона плоскости в границах от 0° до 90° .

А: Как определить коэффициент трения покоя с помощью наклонной плоскости

Кладём брусок на гладко меняющий наклон стол. Медленно увеличиваем угол α до момента **начала скольжения**. При «срыве» выполняется условие равновесия по касательной:

$$mg \sin \alpha^* = \mu_s mg \cos \alpha^* \Rightarrow \mu_s = \tan \alpha^*$$

Где α^* — угол, при котором брусок только начинает скользить.

Что такое угол трения покоя

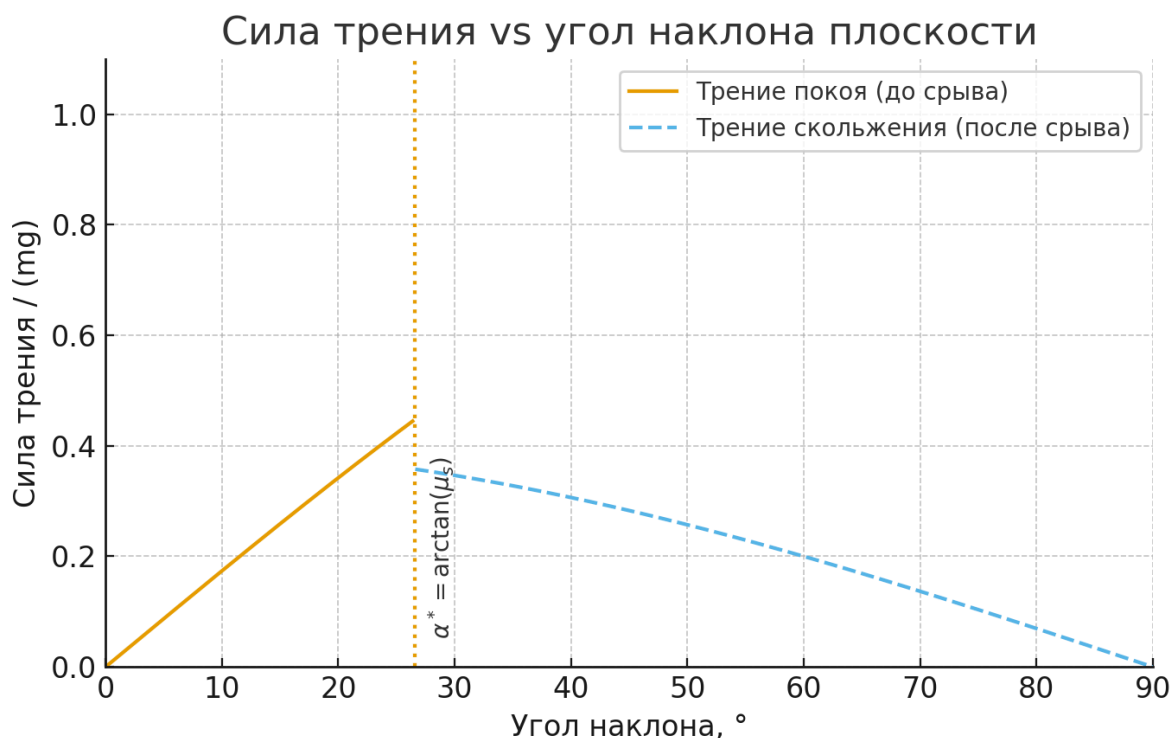
$$\alpha^* = \arctan \mu_s$$

Это угол наклона плоскости, при котором максимальная сила трения покоя равна касательной составляющей веса и начинается скольжение.

Качественный график $F_{\text{тр}(\alpha)}$ при $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$

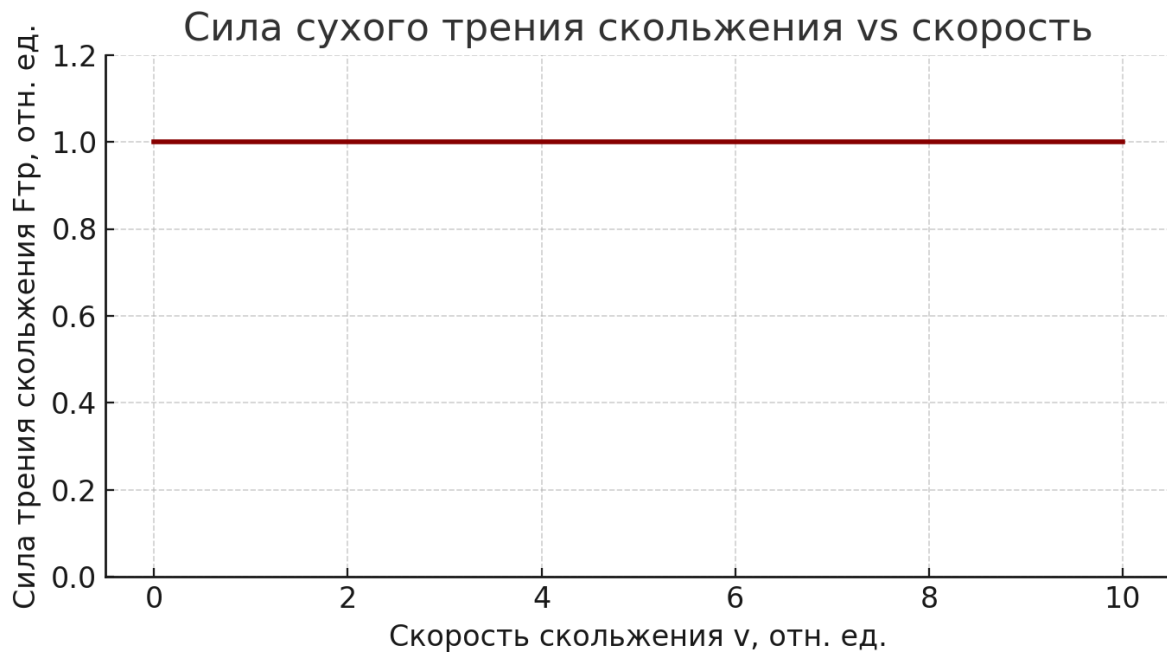
- До срыва: $F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha$ (растёт линейно по синусу) до α^* .
- После срыва (движение): сила становится силой **трения скольжения** $F_{\text{тр}} = \mu_k mg \cos \alpha$ и убывает с ростом α ($\mu_k \leq \mu_s$).

Я построил наглядный график (по оси $y - \frac{F_{\text{тр}}}{m}g$) с «переломом» в точке $\alpha^* = \arctan \mu_s$:



Q: 26. Начертите график зависимости силы сухого трения скольжения от относительной скорости движения. Как можно объяснить эту зависимость?

A:



Особенности зависимости

- Сила трения скольжения практически **не зависит от скорости**:

$$F_{тр} \approx \mu_k N$$

- Поэтому на графике она изображается как почти горизонтальная линия.
- В реальных условиях при очень малых скоростях возможны колебания (stick-slip), а при очень больших – небольшое уменьшение силы из-за разогрева и образования смазочного слоя.

Q: 27. Запишите уравнения движения тела при его равноускоренном скольжении по шероховатой наклонной плоскости.

A: Кладём ось x вдоль плоскости, вверх по наклону. Нормальная реакция $N = mg \cos \alpha$. Сила трения скольжения $F_{тр} = \mu_k N = \mu_k mg \cos \alpha$.

1) Скатывание вниз (вдоль $-x$): тело движется вниз

Ускорение вдоль оси x (со знаком!):

$$a = -g(\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha).$$

Если считать вниз положительным направлением, модуль ускорения:

$$a_{\downarrow} = g(\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha).$$

Уравнения движения (для произвольных x_0, v_0 в принятом направлении):

$$v(t) = v_0 + at, \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

2) Бросок вверх по плоскости (тело скользит вверх)

Обе силы по касательной (проекция веса $mg \sin \alpha$ и трение $\mu_k mg \cos \alpha$) направлены вниз, поэтому

$$a = -g(\sin \alpha + \mu_k \cos \alpha),$$

а уравнения движения те же по форме:

$$v(t) = v_0 + at, \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Время до остановки: $t_{\text{ст}} = -\frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu_k \cos \alpha)}$.

Q: 28. Запишите закон Кулона для трения качения. Проанализируйте, от каких факторов зависит эта сила? В чем заключается физический смысл коэффициента трения качения?

A: Закон Кулона для трения качения

Сила трения качения пропорциональна силе нормальной реакции и обратно пропорциональна радиусу катящегося тела:

$$F_{\text{кач}} = \frac{M_{\text{кач}}}{R} = \frac{\mu_{\text{кач}} N}{R}$$

где:

- $F_{\text{кач}}$ — сила трения качения,
- $M_{\text{кач}} = \mu_{\text{кач}} N$ — момент сопротивления качению,

- $\mu_{\text{кач}}$ — коэффициент трения качения (имеет размерность **длины**),
- R — радиус катящегося тела,
- N — сила нормальной реакции опоры.

От чего зависит сила трения качения

- От **величины силы нормальной реакции** (массы тела).
- От **радиуса катящегося тела** (чем больше радиус, тем меньше сопротивление качению).
- От **коэффициента трения качения $\mu_{\text{кач}}$** , который определяется:
 - ▶ свойствами материалов (твёрдость, упругость);
 - ▶ степенью деформации поверхностей (колесо и дорога, шарик и подшипник);
 - ▶ качеством смазки.

Физический смысл коэффициента трения качения

$\mu_{\text{кач}}$ — это **плечо силы нормальной реакции**, т.е. расстояние от линии действия силы нормального давления до геометрической точки контакта.

- Чем больше деформация поверхностей \rightarrow тем больше $\mu_{\text{кач}}$.
- Поэтому коэффициент трения качения измеряется в **метрах**, в отличие от коэффициента трения скольжения (безразмерного).

Q: 29. Объясните возникновение силы трения качения. Какую роль при этом играют пластичность и упругое последствие? Могла бы возникнуть сила трения качения, если бы тело, которое катится, и поверхность были абсолютно упругими?

А: 1. Причина возникновения силы трения качения

При качении соприкасающихся тел (шар, колесо, цилиндр) в точке касания возникает **не точечный, а площадной контакт**.

- Из-за деформации катящегося тела и (или) поверхности линия действия силы нормальной реакции **смещается вперёд** относительно вертикали.
- Это смещение создаёт момент сопротивления качению — и именно он проявляется как **сила трения качения**.

2. Роль пластичности и упругого последствия

- **Пластичность** (необратимая деформация) приводит к тому, что часть материала остаётся «смятой» после контакта → это увеличивает плечо силы и, значит, трение качения.
- **Упругое последствие** (запаздывание восстановления формы после снятия нагрузки) также вызывает смещение реакции вперёд, усиливая сопротивление качению.

3. Абсолютно упругий случай

Если бы и катящееся тело, и поверхность были **совершенно упругими и недеформируемыми**, контакт происходил бы в одной идеальной точке.

- Смещения реакции не было бы.
- Следовательно, **сила трения качения отсутствовала бы.**

Q: 30. Материальная точка массой m движется по окружности радиуса R с угловым ускорением β . Можно ли по этим данным определить действующую на точку силу? Дайте ответ и приведите необходимые пояснения.

A: полную силу определить нельзя — данных недостаточно.

Почему: при движении по окружности ускорение точки

$$\vec{a} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Следовательно,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})),$$

и нужна ещё **угловая скорость ω** (или v) для нормальной составляющей.

Что можно сказать по данным:

- Тангенциальная часть определяется: $F_\tau = m\beta R$ (по касательной; направление по знаку β).
- Нормальная часть: $F_n = m\omega^2 R$ — **неопределима без ω** .
- Частные случаи:
 - в момент пуска из покоя ($\omega = 0$) $\Rightarrow \vec{F} = m\beta R\vec{\tau}$;

- зная ω (или v), $|\vec{F}| = mR\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$ и $\tan \varphi = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{\beta}{\omega^2}$ (угол φ между \vec{F} и нормалью).
-

Q: 31. Можно ли утверждать полную идентичность протекания некоторого явления или процесса во всех инерциальных системах отсчета? Подтвердите сделанный вывод примерами.

А: Да. Согласно **принципу относительности Галилея (Ньютона)**, **законы механики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчёта.**

Это означает, что процессы в разных ИСО протекают одинаково, и **по самим законам движения** невозможно выделить «привилегированную» систему.

Пояснение

- В ИСО одинаково выполняются законы Ньютона.
- Следовательно, полная механическая картина явления (траектории, силы, ускорения, уравнения движения) будет тождественна, если учесть относительные скорости систем.

Примеры

1. Бросок тела вверх в поезде, движущемся равномерно

- В системе, связанной с поездом, мяч подлетает и возвращается в руку.
- В системе Земли — мяч движется по наклонной траектории, но относительно пассажира результат одинаков.

2. Опыт Галилея с падающими телами

- Камень падает одинаково на палубе равномерно движущегося корабля и на неподвижной земле.

3. Маятник Фуко в равномерно движущейся лаборатории

- Колебания маятника будут происходить так же, как если бы лаборатория покоилась.
-

Q: 32. В чем заключается принцип относительности Галилея?

А: Принцип относительности Галилея

Все механические явления во **всех инерциальных системах отсчёта** протекают одинаково. Законы механики имеют **одинаковый вид** во всех инерциальных системах, поэтому никакими механическими опытами, проведёнными внутри такой системы, невозможно определить, находится ли она в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Примеры

- В равномерно движущемся поезде предметы ведут себя так же, как и в покоящемся (яблоко падает вертикально в руку, маятник качается одинаково).
- На корабле, идущем с постоянной скоростью по гладкой воде, механические эксперименты дают те же результаты, что и на неподвижном.

Q: 33. Приведите примеры, когда реальные объекты можно рассматривать как системы материальных точек. Какова природа сил взаимодействия между точками?

A: 1. Когда реальные объекты можно рассматривать как системы материальных точек

Реальные тела состоят из большого числа частиц, и в механике их часто упрощают, представляя как **систему материальных точек**.

Примеры:

- **Газ** → как совокупность большого числа молекул (каждая молекула — материальная точка).
- **Жидкость** → при изучении движения частиц в гидродинамике (каждый элементарный объём жидкости — система точек).
- **Население планеты или города** → при моделировании транспортных потоков или движения толпы.
- **Звёзды в галактике** → каждая звезда рассматривается как материальная точка в задаче о движении галактики.
- **Рой спутников** или движущихся тел → при анализе их гравитационного взаимодействия.

2. Природа сил взаимодействия между точками

- **Гравитационные силы** — притяжение всех тел, имеющих массу (действуют на большие расстояния).
 - **Электромагнитные силы** — взаимодействия заряженных частиц и атомов (определяют упругость, трение, сопротивление и т.п.).
 - **Сильное и слабое взаимодействия** — действуют на уровне элементарных частиц и ядер (удерживают протоны и нейтроны в ядре, вызывают радиоактивные превращения).
-

Q: 34. *Что понимают под аддитивностью массы? Какими опытами подтверждается аддитивность массы?*

A: **Аддитивность массы** — это свойство массы быть **суммой масс частей системы**:

$$m_{\text{сист}} = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

если тела движутся с малыми скоростями (в нерелятивистской механике) и не учитывать превращения энергии в массу.

2. Физический смысл

- Масса сложной системы равна массе её компонентов.
- Это свойство делает массу удобной мерой количества вещества.

3. Опыты, подтверждающие аддитивность массы

1. Взвешивание смеси тел

- Масса двух тел, помещённых вместе на весы, равна сумме масс каждого по отдельности.

2. Опыт Лавуазье (закон сохранения массы)

- При химических реакциях (например, горении) масса продуктов равна массе исходных веществ, если учесть все выделившиеся газы.

3. Механическое сложение

- Соединение грузов на одной чаше весов → показания равны сумме масс.
-

Q: 35. Что называют центром масс механической системы? Запишите формулы для нахождения радиуса - вектора и координат центра масс системы материальных точек.

A: Центр масс механической системы — это воображаемая точка, положение которой описывает «среднее» распределение массы в системе.

- При движении система ведёт себя так, **как если бы вся её масса была сосредоточена в центре масс**, а на него действовала равнодействующая всех внешних сил.

Формулы для системы материальных точек

1. Радиус-вектор центра масс

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

где:

- m_i — масса i -й точки,
- \vec{r}_i — радиус-вектор i -й точки,
- \vec{R} — радиус-вектор центра масс.

2. Координаты центра масс Если заданы координаты точек

(x_i, y_i, z_i) :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Q: 36. Что называют импульсом системы материальных точек?

A: Импульс системы материальных точек — это векторная сумма импульсов всех точек системы:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

где:

- $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ — импульс i -й точки,
- m_i — масса точки,

- \vec{v}_i — её скорость.

Свойства

- Импульс системы равен произведению её полной массы на скорость центра масс:

$$\vec{P} = M\vec{V}_{\text{ц.м.}}, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$

- Изменение импульса системы определяется действием **внешних сил** (внутренние силы взаимно компенсируются по третьему закону Ньютона).

Q: 37. Опираясь на третий закон Ньютона, покажите, что в замкнутой системе сумма внутренних сил равна нулю.

A: Пусть в замкнутой системе из N материальных точек внутренняя сила, с которой j -я точка действует на i -ю, равна \vec{F}_{ij} . По третьему закону Ньютона

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}.$$

Суммарная внутренняя сила по системе:

$$\vec{F}_{\text{вн}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij}.$$

Сгруппируем попарно действия и противодействия:

$$\vec{F}_{\text{вн}} = \sum_{i < j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \sum_{i < j} (\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij}) = \vec{0}.$$

Итак, в замкнутой системе (внешние силы отсутствуют) сумма **внутренних** сил равна нулю. Отсюда следует

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} + \sum \vec{F}_{\text{вн}} = \vec{0},$$

то есть импульс системы \vec{P} сохраняется.

Q: 38. Сформулируйте закон сохранения импульса системы материальных точек. Приведите примеры применения закона сохранения импульса системы.

A: Закон сохранения импульса системы материальных точек

В замкнутой системе (где отсутствуют внешние силы или их равнодействующая равна нулю) **векторный импульс сохраняется во времени:**

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

или

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{const.}$$

Примеры применения закона

1. Удар тел

- При абсолютно упругих и неупругих ударах сумма импульсов тел до удара равна сумме импульсов после удара.

2. Реактивное движение (ракета)

- Импульс системы «ракета + истекающие газы» сохраняется, поэтому ракета получает движение в противоположную сторону относительно струи газов.

3. Выстрел оружия

- Пуля получает вперёд импульс, ружьё — назад (отдача).

4. Разлет осколков при взрыве

- Сумма импульсов всех осколков равна импульсу системы до взрыва.

5. Движение по воде или льду

- Человек, толкая лодку от берега, придаёт ей импульс, а сам получает равный и противоположный (лодка уплывает, человек отталкивается).

Q: 39. Каким образом необходимо выбрать начало координат системы отсчета для того, чтобы импульс механической системы был равен нулю?

A: Импульс системы выражается через скорость центра масс:

$$\vec{P} = M\vec{V}_{\text{ц.м.}}, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Следовательно, чтобы $\vec{P} = 0$, необходимо, чтобы скорость центра масс системы была равна нулю:

$$\vec{V}_{\text{ц.м.}} = 0.$$

Как этого достичь?

Нужно выбрать **систему отсчёта с началом координат в центре масс и неподвижную относительно него** (т.е. систему отсчёта, связанную с центром масс).

В такой системе:

$$\vec{P} = 0,$$

и импульс системы в целом равен нулю, хотя отдельные точки могут двигаться относительно центра масс.

Q: 40. Покажите, что для незамкнутых систем импульс может сохраняться неизменным относительно некоторых направлений. Приведите примеры.

A: Из уравнения для системы $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$ следует, что для любого направления с единичным вектором \hat{n}

$$\frac{d}{dt}(\vec{P} \cdot \hat{n}) = \vec{F}_{\text{внеш}} \cdot \hat{n}.$$

Значит, **проекция импульса на \hat{n} сохраняется, если проекция равнодействующей внешних сил на \hat{n} равна нулю.**

Примеры

1. **Бросок тела в однородном поле тяжести.** $\vec{F}_{\text{внеш}} = m\vec{g}$
вертикальна \Rightarrow горизонтальные компоненты импульса (P_x, P_y)
сохраняются.
 2. **Столкновение тел на горизонтальной гладкой поверхности.**
Внешние силы (вес и реакции опор) вертикальны \Rightarrow
горизонтальный импульс системы во время удара **сохраняется.**
 3. **Тело на гладкой наклонной плоскости.** Перпендикулярно
плоскости: $N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow$ проекция внешней силы на нормаль
нулевая \Rightarrow **импульс по нормали** сохраняется (остаётся нулём).
Вдоль плоскости действует $mg \sin \alpha \Rightarrow$ там импульс не сохраняется.
 4. **Заряженная частица в однородном магнитном поле \vec{B} .** Сила
 $\vec{F} = q, \vec{v} \times \vec{B} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{F} \cdot \hat{B} = 0 \Rightarrow$ **проекция импульса на**
направление \vec{B} постоянна.
-

Q: 41. Сформулируйте закон сохранения импульса механической системы, используя скорость движения центра масс системы.

A: Запишем связь импульса с центром масс

Импульс системы из n точек:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_{\text{ц.м.}}$$

где

- $M = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса системы,
- $\vec{V}_{\text{ц.м.}}$ — скорость центра масс.

Формулировка закона

Импульс механической системы сохраняется, если равнодействующая внешних сил равна нулю.

В терминах центра масс это означает:

- Если $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, то

$$\vec{V}_{\text{ц.м.}} = \text{const}, \quad \vec{P} = M \vec{V}_{\text{ц.м.}} = \text{const}.$$

Физический смысл

- Центр масс замкнутой системы либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно.
 - Даже если внутри системы происходят столкновения, взрывы, деформации — **движение центра масс не меняется.**
-

Q: 42. Сформулируйте второй закон Ньютона для системы материальных точек. Поясните, почему в изменении импульса играют роль только внешние силы.

А: Второй закон Ньютона для системы материальных точек

Для системы из n точек суммарная производная импульса по времени равна равнодействующей **внешних сил**, действующих на систему:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}}, \quad \text{где } \vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i.$$

Почему в изменении импульса играют роль только внешние силы?

1. Внутренние силы подчиняются 3-му закону Ньютона:

- Если на i -ю точку действует сила от j -й \vec{F}_{ij} , то на j -ю — сила $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$.
- При суммировании по системе эти силы **взаимно компенсируются.**

2. Остаются только внешние силы:

- Вклад во изменение импульса системы дают лишь силы, действующие извне.
 - Поэтому траектория центра масс и закон сохранения импульса зависят именно от внешних сил.
-

Q: 43. Запишите формулу движения тела переменной массы. Покажите, что уравнение движения тела переменной массы представляет собой второй закон Ньютона в его общей форме.

А: Уравнение движения тела переменной массы (Мещерского)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}} + \vec{u}_{\text{отн}} \left(-\frac{dm}{dt} \right)$$

где

- $m(t)$ — масса тела, $\vec{v}(t)$ — скорость тела,
- $\vec{F}_{\text{внеш}}$ — равнодействующая внешних сил,
- $\vec{u}_{\text{отн}}$ — скорость отделяющейся/присоединяющейся массы **относительно тела** (вектор из тела к струе). Принято: при **истечении** массы $\dot{m} < 0$, тогда тяга $\vec{T} = \vec{u}_{\text{отн}}(-\dot{m})$.

Эквивалентная форма:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}_{\text{внеш}} + \vec{u}_{\text{отн}}\dot{m}$$

(здесь $\dot{m} > 0$ трактуется как **приток** массы к телу, $\dot{m} < 0$ — отток.)

Почему это — второй закон Ньютона в общей форме

Общая формулировка второго закона:

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = m\vec{v}.$$

Для **открытой** системы «тело» обменивается массой со средой, поэтому помимо изменения собственного импульса $\frac{d(m\vec{v})}{dt}$ нужно учесть импульс уносимой/притекающей массы. Баланс импульса за dt даёт именно добавочный член $\vec{u}_{\text{отн}} \cdot m$. Отсюда:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}} + \vec{u}_{\text{отн}} \cdot m,$$

что и есть применение $\vec{F}_{\text{внеш}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ к открытой системе.

Частный случай $\dot{m} = 0 \Rightarrow m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{\text{внеш}}$ возвращает привычную форму $\vec{F} = m\vec{a}$.

Механическая работа и энергия

Q: 1. Запишите формулу для расчета работы постоянной силы.

A: Формула для работы постоянной силы:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos(\alpha),$$

где:

- \vec{F} — постоянная сила,
- \vec{s} — перемещение точки приложения силы,
- (α) — угол между направлением силы и перемещением.

Если сила направлена вдоль перемещения $\alpha = 0$, то $A = F s$. Если перпендикулярно $\alpha = 90^\circ$, то $A = 0$.

Q: 2. Что можно сказать относительно работы центростремительной силы? Чему равна работа силы, которая действует на тело, движущееся по окружности с ускорением?

A: 1. **Центростремительная сила** всегда направлена к центру окружности, а перемещение тела в данный момент — по касательной. \rightarrow угол между $\vec{F}_{\text{цс}}$ и \vec{s} равен 90° .

2. Работа силы:

$$A = F s \cos \alpha,$$

при $\alpha = 90^\circ$ получаем $A = 0$.

Вывод: центростремительная сила работы не совершает. Она лишь изменяет направление скорости, но не её модуль.

3. Если на тело, движущееся по окружности, действует ускорение вдоль траектории (тангенциальное ускорение), то появляется касательная составляющая силы F_τ .

- Именно эта сила и совершает работу, изменяя скорость тела.
- Тогда работа равна:

$$A = F_\tau s = m a_\tau s.$$

Q: 3. В каких случаях элементарную работу постоянной силы следует обозначать δA , а в каких dA ?

A: Отличный вопрос, это как раз про **математическую строгость записи**.

- δA (дельта- A) используют, когда речь идёт об **элементарной работе силы** в физике:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos \alpha.$$

Здесь важно, что работа — не полный дифференциал некоторой функции, а **в общем случае** зависит от траектории. Поэтому пишут « δ » вместо « d ».

- dA пишут тогда, когда работа может быть представлена как полный дифференциал некоторой функции состояния (например, если сила потенциальная и можно ввести потенциальную энергию). В таком случае:

$$dA = -dU,$$

где U — потенциальная энергия.

Q: 4. Как рассчитывается работа переменной силы? Как изобразить элементарную и полную работу на графике зависимости тангенциальной составляющей силы от пути?

A: Ключевые формулы и графическая интерпретация:

- Элементарная работа переменной силы вдоль траектории:

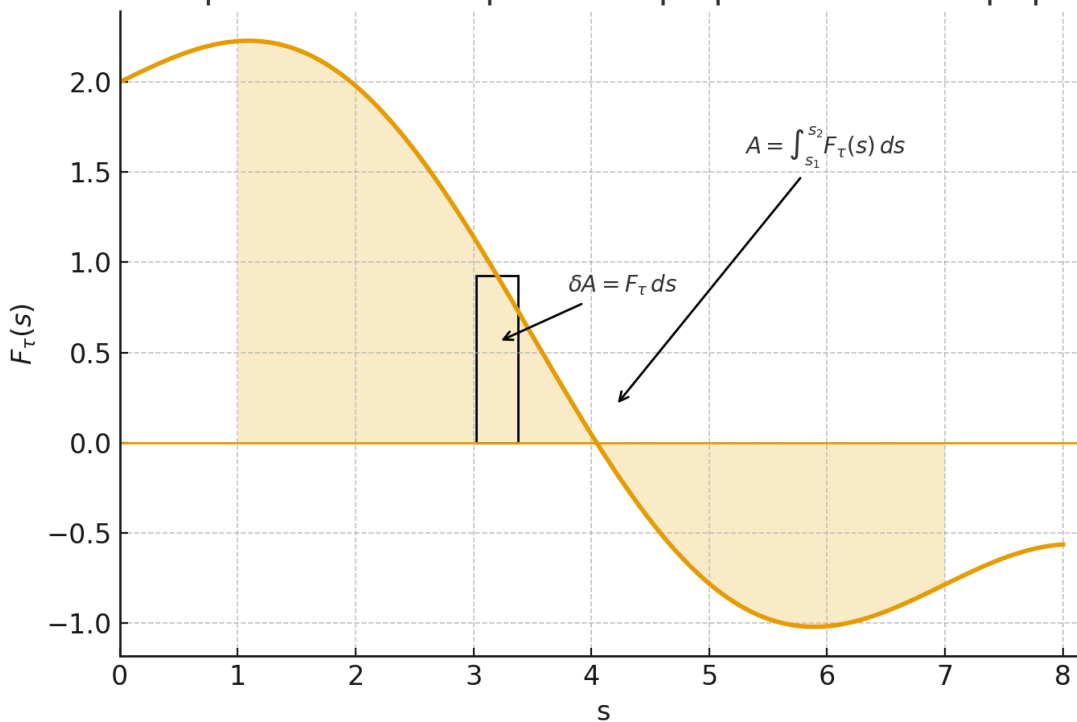
$$\delta A = F_{\tau}(s)ds = \vec{F} d\vec{r}.$$

- Полная работа на участке $s \in [s_1, s_2]$:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F_{\tau}(s)ds.$$

На графике $F_{\tau}(s)$ площадь под кривой и есть работа: положительные участки дают положительный вклад, участки ниже оси — отрицательный. Прямоугольник иллюстрирует элементарную работу δA при малом ds .

Элементарная и полная работа: графическая интерпретация



Q: 5. Что называют мощностью? Каким образом можно найти работу, если известна мощность механизма? В каких случаях мощность можно выразить формулой $N = \vec{F} \cdot \vec{v}$?

A: Мощность — это физическая величина, равная скорости совершения работы:

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

2. Как найти работу через мощность

Если известна мощность механизма:

- при постоянной мощности:

$$A = N \cdot t,$$

- при переменной мощности:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt.$$

3. Формула через силу и скорость

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \alpha,$$

где α — угол между направлением силы и скорости.

Эта запись справедлива в тех случаях, когда работа совершается **силой, приложенной к движущейся точке**, у которой есть мгновенная скорость \vec{v} .

Q: 6. Чему равна кинетическая энергия свободно падающего тела в момент падения на Землю, если в средней точке пути его потенциальная энергия равна U ?

A:

1. **Закон сохранения энергии** для свободного падения:

$$E_{\text{полная}} = E_k + E_p = \text{const.}$$

2. В верхней точке: $E_k = 0$, $E_p = U_{\text{нач}}$. В нижней точке (в момент падения): $E_p = 0$, значит

$$E_k^{\text{низ}} = U_{\text{нач}}.$$

3. Нам дано, что **в средней точке пути** потенциальная энергия равна (U).

• На середине пути по высоте потенциальная энергия в 2 раза меньше, чем начальная:

$$U = \frac{1}{2}U_{\text{нач}}.$$

• Значит, начальная энергия:

$$U_{\text{нач}} = 2U.$$

4. Следовательно, кинетическая энергия внизу:

$$E_k^{\text{низ}} = U_{\text{нач}} = 2U.$$

Ответ: при падении на Землю кинетическая энергия тела равна

$$E_k = 2U.$$

Q: 7. *Какие силы называются консервативными? Перечислите, какие из известных вам сил являются консервативными. Какие системы называются консервативными? Какие силы называются диссипативными?*

A: Консервативные силы — это силы, работа которых **не зависит от траектории**, а определяется только начальными и конечными положениями точки. Для них можно ввести **потенциальную энергию** U , и выполняется:

$$\delta A = -dU.$$

Эквивалентное условие: циркуляция силы по замкнутому контуру равна нулю.

2. Примеры консервативных сил

- сила тяжести,
- сила упругости (Гука),
- кулоновская сила (электростатическое взаимодействие),
- силы в центральных полях, где энергия зависит только от расстояния до центра.

3. Консервативные системы

Консервативная система — система, в которой действуют только консервативные силы. Для такой системы сохраняется полная механическая энергия:

$$E = E_k + U = \text{const.}$$

4. Диссипативные силы

Диссипативные силы — силы, которые необратимо рассеивают механическую энергию (обычно в тепло), и для них нельзя ввести потенциальную энергию. Примеры:

- сила трения скольжения,
- сила сопротивления воздуха или жидкости,
- вязкое трение.

Q: 8. *Что называют кинетической энергией тела? Получите формулу для подсчета кинетической энергии материальной точки, движущейся*

поступательно. Запишите формулу, которая устанавливает связь между кинетической энергией и импульсом тела.

А: Кинетическая энергия — это часть механической энергии, которая характеризует движение тела и равна работе всех сил, сообщивших телу данное состояние движения.

2. Вывод формулы для материальной точки

Пусть на точку массы m действует сила \vec{F} , вызывающая перемещение $d\vec{r}$. Элементарная работа:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

По II закону Ньютона: $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$. Тогда

$$\delta A = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v}.$$

Интегрируя от $v = 0$ до v :

$$A = \int_0^v m v, dv = \frac{mv^2}{2}.$$

Таким образом:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

3. Связь с импульсом

Импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. Подставим:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Q: 9. Докажите теорему об изменении кинетической энергии механической системы и объясните, почему эта теорема справедлива только для равнодействующей всех сил, приложенных к системе.

А: Доказательство (система из N материальных точек m_k):

Кинетическая энергия:

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Дифференцируем:

$$dT = \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k \cdot d\vec{v}_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k dt = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k,$$

где $\vec{F}_k = m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}$ — **полная** сила на k -ю точку (все внешние + все внутренние, включая силы связей). Интегрируя по движению от 1 до 2, получаем теорему о работе–изменении кинетической энергии:

$$\Delta T = \sum_{k=1}^N \int_1^2 \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k = A_{\text{всех сил}} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}$$

Почему теорема «работа = изменение T » справедлива **только для равнодействующей всех сил**:

- В правой части стоит суммарная работа **всех** сил, действующих на систему. Если взять работу лишь части сил (например, одной внешней), то недостающий вклад остальных сил, вообще говоря, не равен нулю. Тогда

$$\Delta T = A_{\text{эта сила}} + A_{\text{прочие силы}},$$

и равенство $\Delta T = A_{\text{эта сила}}$ верно лишь в специальных случаях (когда $A_{\text{прочие силы}} = 0$: идеальные связи без работы, отсутствуют другие силы, или их работа взаимно компенсируется).

- В общем случае внутренние силы вносят ненулевую работу (их попарная сумма по модулю взаимно противоположна, но их **мощность** $\vec{F}_{ij} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j)$ не обязана обнуляться), поэтому без их учёта равенство нарушится.
- Частные полезные формы:
 - ▶ Если силы связей идеальны (работы нет), а внутренние силы консервативны, то $\Delta T = A_{\text{внеш}}$ и $\Delta(T + U_{\text{внутр}}) = A_{\text{внеш, неконсерват.}}$.
 - ▶ Для поступательного движения точки: $\Delta T = \int \vec{F}_{\text{рез}} \cdot d\vec{r}$.
 - ▶ Для системы: разложение Кёнига $T = T_{\text{цм}} + T_{\text{отн}}$; работа равнодействующей **внешних** сил меняет $T_{\text{цм}}$, а внутренние и связи — $T_{\text{отн}}$.

Итак, строгое равенство «работа = изменение кинетической энергии» получается именно при суммировании работы **всех** сил (равнодействующей в смысле их суммарной работы по траекториям точек системы).

Q: 10. *Что называют потенциальной энергией механической системы? От чего она зависит? Объясните, почему потенциальная энергия может быть установлена только с точностью до некоторой постоянной. Как выбирается эта постоянная?*

A: **Потенциальная энергия механической системы** — это часть механической энергии, которая определяется положением тел в поле **консервативных сил**. Математически:

$$U(M) = - \int_{M_0}^M \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

где M_0 — выбранная точка отсчёта.

2. От чего зависит

- от координат (положения) точки или системы в пространстве;
- от взаимных расстояний между телами (для сил притяжения/отталкивания);
- от деформации упругих элементов (например, пружины).

То есть она зависит **не от пути движения**, а только от конфигурации системы.

3. Почему задаётся с точностью до постоянной

Работа консервативных сил выражается разностью значений потенциальной энергии:

$$A_{1 \rightarrow 2} = U_1 - U_2.$$

Абсолютное значение U не имеет физического смысла, важна только её разность. Поэтому добавление произвольной константы C не меняет физических результатов:

$$U'(M) = U(M) + C.$$

4. Как выбирается постоянная

Константу выбирают **условно**, в зависимости от удобства:

- в поле тяжести Земли обычно берут $U = 0$ на уровне земли или в выбранной плоскости;
 - в законе всемирного тяготения и кулоновском взаимодействии — на бесконечности ($U(\infty) = 0$);
 - для упругой пружины — в положении равновесия, когда деформация равна нулю.
-

Q: 11. *Что называют потенциалом гравитационного поля? Запишите формулу работы гравитационных сил при движении материальной точки, применяя понятие потенциала.*

A: **Потенциал гравитационного поля** в некоторой точке пространства — это величина, равная потенциальной энергии единичной массы, помещённой в эту точку:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{U}{m}.$$

Для поля тяготения массы M на расстоянии r :

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r},$$

где G — гравитационная постоянная.

2. Связь с потенциальной энергией

Потенциальная энергия массы m в поле:

$$U = m\varphi.$$

3. Работа гравитационных сил через потенциал

При перемещении материальной точки из точки 1 в точку 2:

$$A_{1 \rightarrow 2} = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Q: 12. *Как зависит потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек от расстояния между ними?*

A: Для двух материальных точек массами m_1 и m_2 на расстоянии r между ними:

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r},$$

где G — гравитационная постоянная.

Свойства зависимости:

- Потенциальная энергия **обратно пропорциональна расстоянию**: чем больше r , тем меньше по модулю U .
- Знак отрицательный, потому что силы тяготения притягивающие, и при сближении тел потенциальная энергия уменьшается (становится более отрицательной).
- При $r \rightarrow \infty$:

$$U(\infty) = 0,$$

что принято как условие выбора нуля потенциальной энергии.

- При $r \rightarrow 0$ $U \rightarrow -\infty$.

Q: 13. Для произвольной консервативной силы получите формулу, которая устанавливает связь консервативной силы с потенциальной энергией.

A: Ключевой результат для консервативной силы $\rightarrow F$ и потенциальной энергии U :

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

В проекциях:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Вывод: из определения потенциальной энергии $U(\mathbf{r})$ как величины, чья разность равна работе с противоположным знаком,

$$A_{1 \rightarrow 2} = U_1 - U_2,$$

получаем $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$. Сравнивая коэффициенты при независимых dx, dy, dz , имеем $\vec{F} = -\nabla U$.

Частный случай (радиально-симметричное поле $U(r)$):

$$\vec{F}(r) = -\frac{dU}{dr}\hat{r}.$$

Q: 14. Будет ли при движении планеты по эллипсу оставаться постоянной ее полная механическая энергия? Будет ли меняться кинетическая энергия планеты?

A:

1. Полная механическая энергия

Планета движется в гравитационном поле Солнца. Гравитационная сила — **консервативная**, внешних сил нет. Значит, для планеты выполняется закон сохранения механической энергии:

$$E = E_k + U = \text{const.}$$

То есть **полная механическая энергия при движении по эллипсу остаётся постоянной.**

2. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия зависит от скорости:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

А по второму закону Кеплера скорость планеты на эллиптической орбите переменна:

- в перигелии скорость максимальна,
- в афелии — минимальна.

Значит, **кинетическая энергия меняется**: она возрастает при приближении к Солнцу и убывает при удалении.

Q: 15. Сформулируйте и запишите аналитическую форму закона сохранения механической энергии для замкнутой системы, в которой действуют консервативные и диссипативные силы.

A: В замкнутой системе с консервативными и диссипативными силами **полная энергия сохраняется**, а **механическая энергия**

$E_M = T + U$ убывает на величину работы диссипативных сил (переходит во внутреннюю энергию, тепло).

Главные формулы

- Интегрально:

$$E_{M,2} - E_{M,1} = A_{\text{HK}}, \quad A_{\text{HK}} \leq 0,$$

где A_{HK} — работа неконсервативных (диссипативных) сил на участке движения.

- Дифференциально (мощность диссипации):

$$\frac{d}{dt}(T + U) = P_{\text{HK}} \leq 0.$$

- Эквивалентно через внутреннюю энергию (для замкнутой адиабатной системы):

$$\Delta(T + U) + \Delta E_{\text{вн}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta E_M = -\Delta E_{\text{вн}}.$$

- Частный случай (только консервативные силы):

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1.$$

Смысл: диссипативные силы совершают отрицательную работу, уменьшая $T + U$; убывшая механическая энергия появляется как рост $E_{\text{вн}}$ (нагрев и т.п.).

Q: 16. По какому признаку делятся удары на абсолютно упругие и абсолютно неупругие?

A:

- **Абсолютно упругий удар** — это удар, при котором **сохраняется как импульс, так и механическая энергия (кинетическая)** системы тел. После удара тела разлетаются, не теряя суммарной E_k .
- **Абсолютно неупругий удар** — удар, при котором сохраняется только **импульс**, а часть кинетической энергии теряется (переходит во внутреннюю энергию, тепло, деформацию). При таком ударе тела после удара движутся **совместно** как одно целое.

Признак деления: по тому, сохраняется ли полная кинетическая энергия системы тел после удара.

Q: 17. Выведите формулу для работы неупругих сил при центральном неупругом ударе шаров и проанализируйте ее. Как следует поступить, чтобы вся кинетическая энергия тел, которые участвуют в столкновении, пошла на их деформацию?

A: Работа неупругих сил при центральном ударе

Пусть два шара масс m_1, m_2 движутся вдоль одной прямой с начальными скоростями u_1, u_2 и после удара имеют скорости v_1, v_2 .

Сохраняется импульс:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

и введём коэффициент восстановления $e \in [0, 1]$:

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1).$$

Потеря кинетической энергии (а значит, работа неупругих сил над системой)

$$A_{\text{неупр}} = \Delta K = K_{\text{после}} - K_{\text{до}} = -\frac{1}{2}\mu(1 - e^2)(u_1 - u_2)^2 \leq 0$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведённая масса.

При абсолютно неупругом ударе ($e = 0$):

$$A_{\text{неупр}} = -\frac{1}{2}\mu(u_1 - u_2)^2, \quad v = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \text{ (движение вместе)}$$

Анализ формулы

- Потери тем больше, чем больше относительная скорость $|u_1 - u_2|$, чем ближе e к нулю и чем больше μ .
- Максимально возможная потеря при данном $(u_1 - u_2)$ достигается при $e = 0$; она равна всей **относительной** кинетической энергии в системе центра масс: $K_{\text{отн}} = \frac{1}{2}\mu(u_1 - u_2)^2$.

Как сделать, чтобы вся кинетическая энергия ушла в деформацию?

Это возможно, только если:

1. удар абсолютно неупругий: $e = 0$ (тела «слипаются»), и
2. начальный импульс системы равен нулю: $m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$ (центр масс покоится).

Тогда после удара $v = 0$ и

$$K_{\text{после}} = 0, \quad A_{\text{неупр}} = -K_{\text{до}},$$

то есть **вся** начальная кинетическая энергия переходит в деформацию/тепло. Если $m_1 u_1 + m_2 u_2 \neq 0$, неизбежно остаётся «транспортная» энергия движения центра масс, которую внутренними (неупругими) силами погасить нельзя.

Q: 18. *Опишите, что происходит с телами при абсолютно упругом ударе, на какие два этапа делится процесс столкновения? Как изменяется потенциальная и кинетическая энергия тел в процессе столкновения?*

A: 1. Абсолютно упругий удар

При абсолютно упругом ударе тела после столкновения **не теряют** суммарной механической энергии:

- **импульс системы** сохраняется,
- **кинетическая энергия** системы тоже сохраняется. То есть энергия не уходит на тепло и необратимые деформации, а только «перераспределяется» между телами.

2. Два этапа процесса столкновения

Процесс можно разделить на **два последовательных этапа**:

1. **Сжатие (деформация):**

- При сближении тел их скорости уменьшаются (относительное движение тормозится).
- Кинетическая энергия частично превращается в потенциальную энергию упругой деформации (например, упругого сжатия).

2. **Разжатие (восстановление формы):**

- Накопленная потенциальная энергия возвращается в кинетическую.
- Тела разлетаются, и в конце процесса потенциальная энергия снова равна нулю, а вся энергия — кинетическая.

3. Изменение энергий

• В процессе удара:

- ▶ E_k уменьшается на этапе сжатия и увеличивается на этапе разжатия.
- ▶ $U_{\text{пот}}$ возрастает при сжатии и падает до нуля при разжатии.

• Итог:

- ▶ До удара: энергия полностью кинетическая.
- ▶ В момент наибольшей деформации: часть кинетической энергии превращена в потенциальную (у тел минимальная относительная скорость).
- ▶ После удара: потенциальная энергия снова равна нулю, суммарная кинетическая энергия совпадает с начальной, но скорости тел перераспределены.

Q: 19. Выведите формулы для подсчета скоростей тел после удара при центральном абсолютно упругом ударе.

A: Центральным абсолютно упругим удар (одномерно, до: u_1, u_2 ; после: v_1, v_2):

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2,$$
$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2.$$

Эквивалентная форма (полезна для проверок):

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad v_2 - v_1 = -(u_2 - u_1).$$

Частные случаи:

- $u_2 = 0$: $v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1$, $v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$.
- $m_1 = m_2$: $v_1 = u_2$, $v_2 = u_1$ (обмен скоростями).
- $m_2 \rightarrow \infty, u_2 = 0$: $v_1 \rightarrow -u_1$ (упругое отражение от «жесткой стены»).

Q: 20. При каком условии тело, которое участвует в столкновении, отскакивает от другого тела без потери кинетической энергии? Какой импульс при этом получает первое тело?

А: Условие без потери E_k : абсолютно упругий удар о неподвижное «бесконечно массивное» тело (идеально жёсткую стену). Тогда модуль скорости сохраняется: после удара нормальная компонента скорости меняет знак, касательная — та же.

Импульс, полученный первым телом (масса m , до удара скорость \vec{v}):

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = m(\vec{v}_{\text{после}} - \vec{v}_{\text{до}}) = -2m(\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n},$$

где \hat{n} — единичная нормаль к стене в точке удара. По модулю: $J = 2m|v_n|$. Если удар строго лобовой ($\vec{v} \parallel \hat{n}$), то $\vec{J} = -2m\vec{v}$.

Движение АТТ. Неинерциальные системы отсчета.

Q: 1. Что называют моментом силы относительно точки? Относительно оси вращения? Покажите, что момент силы не изменяется при перемещении силы вдоль линии действия.

A: Момент силы относительно точки

Векторный момент силы \vec{F} относительно точки O :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

где \vec{r} — радиус-вектор от O к точке приложения силы. По модулю (в плоскости):

$$|\vec{M}_O| = Fd_{\perp},$$

d_{\perp} — плечо (перпендикуляр от O к линии действия силы).

Момент силы относительно оси

Проекция моментного вектора на единичный вектор оси \hat{e} :

$$M_{\text{оси}} = \hat{e} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = Fd_{\perp, \text{оси}}$$

где $d_{\perp, \text{к оси}}$ — кратчайшее расстояние от оси до линии действия силы (с учётом знака по правилу правой руки).

Неизменность при переносе силы вдоль линии действия

Пусть точка приложения силы переносится с A в B по её линии действия. Тогда

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \lambda \hat{s}, \quad \hat{s} \parallel \vec{F}.$$

Моменты относительно O :

$$\vec{M}_O^{(B)} = \vec{r}_B \times \vec{F} = (\vec{r}_A + \lambda \hat{s}) \times \vec{F} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \lambda (\hat{s} \times \vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{M}_O^{(A)},$$

поскольку $\hat{s} \parallel \vec{F} \Rightarrow \hat{s} \times \vec{F} = \vec{0}$. Следовательно, **момент силы не меняется при её сдвиге вдоль собственной линии действия** (принцип эквивалентности/переносимости). Это верно и для момента относительно оси, т.к. берётся проекция одного и того же \vec{M}_O .

Q: 2. *Какая из составляющих силы, действующей под углом к оси вращения, вызывает вращение тела? Чему равен момент силы, параллельной оси вращения?*

A:

- **Вращение вызывает тангенциальная составляющая** силы — перпендикулярная радиусу \vec{r} и оси.
- Момент относительно оси:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad M = r, F_{\tau} = rF \sin \varphi,$$

где φ — угол между \vec{r} и \vec{F} .

- **Если сила параллельна оси вращения**, её момент относительно этой оси равен **нулю**:

$$M_{\text{о оси}} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{e}_{\text{оси}} = 0 \quad \text{при} \quad \vec{F} \parallel \hat{e}_{\text{оси}}.$$

Q: 3. *Что называют парой сил?*

A: Пара сил — это система из двух сил, которые:

- равны по модулю,
- параллельны и направлены в противоположные стороны,
- линии их действия не совпадают.

Основные свойства пары сил:

- Равнодействующая пары сил всегда равна нулю \rightarrow поступательного движения не вызывает.
- Но пара сил создаёт **момент**, который вызывает вращение тела:

$$M = F \cdot d,$$

где F — величина одной из сил, d — плечо пары (расстояние между линиями действия сил).

Q: 4. *Сформулируйте закон всемирного тяготения. В каких случаях аналитическое выражение этого закона для двух материальных точек справедливо и для тел, которые имеют конечные размеры?*

A:

1. Закон всемирного тяготения (Ньютон)

Две материальные точки массы m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где:

- $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11}, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ — гравитационная постоянная,
- r — расстояние между массами,
- сила направлена вдоль линии, соединяющей эти массы.

2. Когда формула применима к телам конечных размеров

Для тел с протяжённой массой закон остаётся справедливым, если:

- **Тела сферически симметричны** (однородные шары или оболочки): тогда можно считать, что вся масса сосредоточена в центре шара.
- **Расстояние между телами велико** по сравнению с их размерами: в этом случае тоже можно приближённо считать тела точечными массами.

Q: 5. Зависят ли периоды обращения планет вокруг Солнца от их масс? Каким был бы период обращения Луны вокруг Земли, если бы масса Луны была вдвое больше?

A:

Зависит ли период от массы планеты?

По третьему закону Кеплера для двух тел

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(M + m)}},$$

где M — масса центрального тела, m — масса спутника/планеты. Если $m \ll M$ (планеты вокруг Солнца), то

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}},$$

и период **практически не зависит** от массы самой планеты.

Если массу Луны удвоить

Полагая ту же орбиту (тот же a) и неизменную массу Земли,

$$T' = T \sqrt{\frac{M_{\oplus} + m_{\text{Л}}}{M_{\oplus} + 2m_{\text{Л}}}} \approx T \times 0,994.$$

Численно: вместо $T \approx 27,32$ суток получим $T' \approx 27,16$ суток — период стал бы на $\sim 0,6\%$ короче.

Q: 6. *Какие опыты позволяют сделать заключение, что инертная и гравитационные массы пропорциональны между собой? В чем суть этих опытов?*

A:

1. Суть вопроса

Инертная масса m_i — мера сопротивления тела ускорению ($F = m_i a$).
Гравитационная масса m_g — мера силы, с которой тело участвует в гравитационном взаимодействии ($F_g = G \frac{m_g M}{r^2}$).

Эксперименты показывают, что $m_i \propto m_g$, т.е. отношение $\frac{m_g}{m_i}$ одинаково для всех тел.

2. Классические опыты

а) Галилео Галилей (Пиза, XVII в.)

- Сбрасывал разные тела с наклонной плоскости и башни.
- Ускорение падения оказалось одинаковым для всех тел независимо от массы и материала.
- Вывод: ускорение не зависит от массы, значит $m_g \propto m_i$.

б) Ньютон (Маятники)

- Сравнивал периоды колебаний маятников с разными гирями.
- Если бы m_g и m_i были разными, периоды различались бы.
- На опыте периоды совпадают.

в) Этвёш (конец XIX в.)

- Проводил эксперименты с **крутильными весами**: сравнивал ускорения падения разных материалов (дерево, платина, медь).

- Сверхточные измерения показали, что различий нет в пределах погрешности ($\frac{\Delta a}{a} < 10^{-9}$).
3. Современные проверки
- С помощью спутников и лазерных интерферометров продолжают уточнять эквивалентность масс (основа **принципа эквивалентности** в общей теории относительности).
 - Подтверждения получены с точностью лучше чем 10^{-13} .
-

Q: 7. Как определить массу Земли, если известна гравитационная постоянная?

A:

1. Закон всемирного тяготения

Для тела массы m на поверхности Земли сила тяжести равна:

$$F = G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2},$$

где

- M_{\oplus} — масса Земли,
- R_{\oplus} — радиус Земли,
- G — гравитационная постоянная.

2. Связь с ускорением свободного падения

Сила тяжести равна также $F = mg$. Приравняем:

$$mg = G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2}.$$

Сокращаем m :

$$g = G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}.$$

3. Формула для массы Земли

$$M_{\oplus} = \frac{g R_{\oplus}^2}{G}.$$

4. Подстановка чисел

- $g \approx 9,81, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$,
- $R_{\oplus} \approx 6,37 \cdot 10^6, \text{м}$,
- $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11}, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

$$M_{\oplus} \approx \frac{9,81 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \approx 5,97 \cdot 10^{24}, \text{кг}.$$

Q: 8. *Какую физическую величину называют напряжённостью поля? Изобразите графическую зависимость модуля напряжённости поля тяготения от расстояния до точки, которая создает поле. Какие поля называют центральными, однородными?*

A: Разберём подробно:

1. Напряжённость поля

Напряжённость гравитационного поля в точке пространства — это сила, действующая на единичную массу, помещённую в эту точку:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = G \frac{M}{r^2} \hat{r},$$

где M — масса, создающая поле, r — расстояние до центра.
Размерность: $\text{м}/\text{с}^2$.

2. Зависимость от расстояния

Модуль напряжённости:

$$g(r) = G \frac{M}{r^2}.$$

Это **обратно-квадратичная зависимость**: при увеличении расстояния в 2 раза напряжённость уменьшается в 4 раза.

3. Центральные и однородные поля

- **Центральное поле** — поле, в котором силовые линии направлены радиально к центру (или от центра), а напряжённость зависит только от расстояния r . Пример: поле тяготения Земли (вне её поверхности), кулоновское поле точечного заряда.

- **Однородное поле** — поле, в котором напряжённость во всех точках одинакова по величине и направлению. Пример: приближённо поле тяжести у поверхности Земли; электрическое поле между обкладками заряжённого плоского конденсатора.
-

Q: 9. Сформулируйте законы Кеплера. Обоснуйте вывод этих законов. Как связаны законы Кеплера с законом всемирного тяготения?

A:

1. Законы Кеплера

1. **Первый закон (закон орбит):** Каждая планета движется вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. **Второй закон (закон площадей):** Радиус-вектор, проведённый от планеты к Солнцу, за равные промежутки времени описывает равные площади. (Иными словами, планета движется быстрее вблизи Солнца и медленнее вдали от него.)
3. **Третий закон (закон периодов):** Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \text{const.}$$

2. Обоснование

- **1-й закон** следует из решения задачи двух тел в ньютоновской механике: при центральной силе $F \propto \frac{1}{r^2}$ траектория — коническая кривая (эллипс, парабола, гипербола).
- **2-й закон** отражает сохранение углового момента $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$, что выполняется для центральных сил.
- **3-й закон** выводится из равенства центростремительной силы и силы тяготения:

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}.$$

Отсюда $T^2 \sim a^3$.

3. Связь с законом всемирного тяготения

Закон Кеплера — это **эмпирический результат** (на основе наблюдений Тихо Браге). Закон Ньютона всемирного тяготения дал **теоретическое объяснение** этим законам:

- форма орбит (1-й закон),
 - сохранение площади (2-й закон),
 - зависимость периода от радиуса (3-й закон).
-

Q: 10. При помощи каких физических законов можно доказать, что в соответствии с первым законом Кеплера планеты движутся по плоским эллиптическим траекториям?

A:

1. Что утверждает первый закон Кеплера

Орбита планеты вокруг Солнца — **эллипс в плоскости**, в одном фокусе которого находится Солнце.

2. Какими законами это доказывается

1. **Закон сохранения момента импульса**

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{const.}$$

Так как сила тяготения центральная ($\vec{F} \parallel \vec{r}$), момент силы равен нулю.

Следовательно, вектор \vec{L} постоянен и задаёт одно направление.

Значит, движение всегда происходит **в одной плоскости**, перпендикулярной \vec{L} .

2. **Второй закон Ньютона + закон всемирного тяготения**

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}.$$

Это уравнение движения в центральном поле $\propto \frac{1}{r^2}$. Математическое решение этого уравнения (через полярные координаты и интеграл энергии) показывает, что траектория — **коническое сечение**:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

где e — эксцентриситет.

- При $0 \leq e < 1$ — это **эллипс**.

- При $e = 0$ — окружность.

3. Вывод

Используя:

- закон сохранения момента импульса (движение в плоскости),
- второй закон Ньютона + закон тяготения $F \propto \frac{1}{r^2}$ (траектория — коническое сечение),

мы доказываем, что планеты действительно движутся по **плоским эллиптическим орбитам** (1-й закон Кеплера).

Q: 11. Выведите формулу, по которой определяется первая космическая скорость.

A: Для круговой орбиты у поверхности (радиус R , масса планеты M) требуемая центростремительная сила обеспечивается гравитацией:

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Эквивалентно, через $g = \frac{GM}{R^2}$:

$$v = \sqrt{gR}.$$

Для Земли ($R \approx 6.37 \cdot 10^6$ м, $g \approx 9.81$ м/с²):

$$v_1 \approx 7.9 \text{ км/с}.$$

Q: 12. Известно, что по мере увеличения радиуса орбиты скорость искусственного спутника Земли уменьшается. Означает ли это, что при запуске спутника на орбиты большего радиуса двигатели ракеты должны совершать меньшую работу?

A:

1. Скорость спутника на орбите

Для радиуса орбиты r :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

и действительно, чем больше r , тем меньше v .

2. Энергия спутника на орбите

Полная механическая энергия спутника:

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}.$$

Подставляем v :

$$E = -\frac{GMm}{2r}.$$

3. Работа при переходе на орбиту

Чтобы перевести спутник с радиуса r_1 на орбиту $r_2 > r_1$, нужно увеличить его энергию:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -\frac{GMm}{2r_2} + \frac{GMm}{2r_1}.$$

Так как $r_2 > r_1$, $|E_2| < |E_1|$, следовательно, $\Delta E > 0$.

Значит, при переходе на более далёкую орбиту нужно **добавить энергию**, несмотря на то что конечная скорость меньше.

4. Вывод

Нет, двигатели не совершают меньшую работу. Наоборот, чтобы вывести спутник на более высокую орбиту, нужно затратить **больше работы**, чем на низкую орбиту, потому что необходимо преодолеть гравитационное притяжение Земли и увеличить полную энергию спутника.

Q: 13. *Дайте определение третьей космической скорости.*

Проанализируйте все факторы, которые влияют на величину этой скорости.

A:

1. Определение

Третья космическая скорость v_3 — минимальная скорость, которую нужно сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно смогло

навсегда покинуть Солнечную систему, преодолев не только земное, но и солнечное притяжение.

Это скорость ухода за пределы Солнечной системы.

2. Факторы, которые учитываются

1. **Притяжение Земли.** Чтобы покинуть Землю, телу нужно сначала достичь второй космической скорости:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} \approx 11,2 \text{ км/с.}$$

2. **Притяжение Солнца.** Находясь на орбите Земли вокруг Солнца, тело движется вместе с Землёй со скоростью

$$v_{\text{Земли}} \approx 29,8 \text{ км/с.}$$

Чтобы покинуть Солнечную систему с орбиты Земли, нужно увеличить скорость относительно Солнца до скорости убегания с расстояния $r = 1$ а.е.:

$$v_{\text{убег. от Солнца}} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{r}}.$$

3. **Сложение скоростей.** Для ухода из Солнечной системы удобно разогнаться в том же направлении, куда движется Земля, тогда требуется наименьший «добавок» скорости.

3. Формула третьей космической скорости

Приближённо:

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_{\text{убег. от Солнца}}^2 - v_{\text{Земли}}^2}.$$

Численно:

$$v_3 \approx 16,7 \text{ км/с.}$$

4. Итог

Величина третьей космической скорости определяется:

- массой и радиусом Земли (через v_2),
- массой Солнца и расстоянием Земли до Солнца (через $v_{\text{убег. от Солнца}}$),

- орбитальной скоростью Земли (за счёт которой «помогает» движение планеты).
-

Q: 14. *Что называется моментом инерции материальной точки относительно оси? От чего зависит момент инерции тела? Какую роль он играет во вращательном движении?*

A:

1. Момент инерции материальной точки

Момент инерции материальной точки относительно оси вращения:

$$I = mr^2,$$

где

- m — масса точки,
- r — расстояние от точки до оси вращения.

Это мера «инертности» точки во вращательном движении.

2. Момент инерции тела

Для протяжённого тела момент инерции вычисляется суммированием (интегрированием):

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{или} \quad I = \int r^2 dm.$$

Он зависит от:

- массы тела,
- распределения массы относительно оси (чем дальше масса от оси, тем больше I),
- выбора оси вращения.

3. Роль в вращательном движении

Момент инерции играет такую же роль, как масса при поступательном движении:

- **В динамике вращения:**

$$M = I\alpha,$$

где M — момент силы, α — угловое ускорение.

- **В кинетической энергии вращения:**

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Q: 15. Запишите известные вам формулы для вычисления моментов инерции однородных сплошных тел правильной геометрической формы (шар, куб, прямой круговой конус).

A: Хорошо, соберём основные формулы для **однородных сплошных тел** (масса M), характерный размер R или a , h):

1. Шар

- Сплошной однородный шар радиуса R , ось через центр:

$$I = \frac{2}{5} M R^2.$$

2. Куб

- Куб со стороной a , ось через центр, параллельная ребру:

$$I = \frac{1}{6} M a^2.$$

- Если ось через центр, перпендикулярно грани (например, через центр куба вдоль диагонали):

$$I = \frac{1}{6} M a^2 \quad (\text{ось по любой координатной оси}).$$

3. Прямой круговой конус

- Однородный конус массы M , высоты h и основания радиуса R , ось вращения проходит через вершину и центр основания (ось симметрии):

$$I = \frac{3}{10} M R^2.$$

Q: 16. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера. Что произойдет с моментом инерции тела, если ось перемещать параллельно самой себе, отдаляясь от центра инерции?

A:

1. Теорема Гюйгенса–Штейнера (теорема о параллельных осях)

Момент инерции тела относительно любой оси, параллельной оси, проходящей через центр масс, равен:

$$I = I_c + Md^2,$$

где

- I_c — момент инерции относительно параллельной оси через центр масс,
- M — масса тела,
- d — расстояние между осями.

2. Следствие

Если ось перемещать параллельно самой себе, отдаляясь от центра масс:

- I будет **увеличиваться** пропорционально квадрату расстояния d .
- Чем дальше ось от центра масс, тем больше момент инерции.

Q: 17. Найдите момент инерции стержня массой m и длиной l , относительно оси, которая проходит на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от его конца перпендикулярно стержню.

A: Ответ: $I = \frac{1}{9}ml^2$.

Короткий вывод: для однородного стержня

$$I_{\text{цм}} = \frac{1}{12}ml^2.$$

Ось проходит на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от конца, значит её расстояние от центра масс:

$$a = \left| \frac{2}{3}l - \frac{1}{2}l \right| = \frac{1}{6}l.$$

По теореме Гюйгенса–Штейнера:

$$I = I_{\text{цм}} + ma^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{1}{6}l\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{36}ml^2 = \frac{1}{9}ml^2.$$

Q: 18. Найдите момент инерции диска массой m и радиусом R относительно оси, которая перпендикулярна плоскости диска и проходит через его край.

A: $I_{\text{край}} = \frac{3}{2}mR^2$

Короткий вывод: для сплошного диска

$$I_{\text{цм}} = \frac{1}{2}mR^2.$$

Ось у края параллельна оси через центр и отстоит на расстояние $d = R$. По теореме Гюйгенса–Штейнера:

$$I = I_{\text{цм}} + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Q: 19. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения твердого тела.

A: Основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела формулируется так:

Угловое ускорение твёрдого тела прямо пропорционально действующему на него моменту сил и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно оси вращения.

Математическая запись:

$$M = I\alpha,$$

где

- M — суммарный момент сил относительно оси вращения,
 - I — момент инерции тела относительно той же оси,
 - α — угловое ускорение.
-

Q: 20. Что называется моментом импульса относительно точки? Относительно оси?

A:

1. Момент импульса относительно точки

Момент импульса материальной точки относительно точки O :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p},$$

где

- \vec{r} — радиус-вектор точки относительно O ,
- $\vec{p} = m\vec{v}$ — импульс точки,
- « \times » — векторное произведение.

Физический смысл: мера вращательного движения частицы относительно точки.

2. Момент импульса относительно оси

Если выбрана ось с направляющим вектором \hat{e} , то момент импульса относительно оси определяется как проекция момента импульса на эту ось:

$$L_{\text{ось}} = \vec{L}_O \cdot \hat{e}.$$

Q: 21. Сформулируйте закон сохранения момента импульса тела. Приведите примеры проявления этого закона.

A:

1. Закон сохранения момента импульса

Если суммарный момент внешних сил, действующих на систему относительно выбранной оси (или точки), равен нулю, то **момент импульса этой системы сохраняется:**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}.$$

Если $\vec{M}_{\text{внеш}} = 0$, то

$$\vec{L} = \text{const}.$$

2. Физический смысл

Закон аналогичен закону сохранения импульса в поступательном движении: отсутствие внешнего «крутящего воздействия» сохраняет вращательное движение.

3. Примеры проявления

- **Фигура вращающегося фигуриста:** при прижатии рук к телу радиус масс уменьшается \rightarrow момент инерции уменьшается, угловая скорость увеличивается, чтобы сохранить $L = I\omega$.
- **Космический спутник или планета:** в отсутствии внешних моментов сохраняет угловой момент при вращении вокруг оси или орбитальном движении.
- **Кошка в прыжке:** умеет поворачивать своё тело в воздухе, сохраняя суммарный момент импульса нулевым.
- **Сжатие газа в туманности:** уменьшение радиуса облака приводит к увеличению скорости вращения (образование галактик, звёзд).

Q: 22. Получите формулу для кинетической энергии тела, которое вращается вокруг неподвижной оси.

A:

Пусть твёрдое тело вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси. Разобьём его на точки масс m_i на расстояниях r_i от оси. Скорость каждой точки $v_i = \omega r_i$. Тогда

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

где $I = \sum_i m_i r_i^2$ – момент инерции относительно оси (в непрерывном случае $I = \int r^2 dm$).

Итого: $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$.

Q: 23. Получите формулу для кинетической энергии плоского движения твёрдого тела.

А: Плоское движение = поступательное движения центра масс G + вращение вокруг G . Для точки i : $\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i'}$, где $\vec{r}_{i'} = \overrightarrow{Gi}$, $\sum m_i \vec{r}_{i'} = 0$.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (v_G^2 + 2 \vec{v}_G \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i'}) + |\vec{\omega} \times \vec{r}_{i'}|^2) \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{\omega} \times \vec{r}_{i'}|^2 = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2, \end{aligned}$$

где $M = \sum m_i$, $I_G = \sum m_i (r_{i'})^2$ – момент инерции относительно центра масс.

Итого:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2.$$

Эквивалентно для произвольной точки O :

$$T = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} I_O \omega^2 - M (\vec{v}_O \vec{\omega} \times \vec{r}_{GO}),$$

а при выборе $O = G$ смешанный член исчезает, что даёт формулу выше.

Q: 24. Чему равна кинетическая энергия диска (шара) массой m и радиусом R , который катится без скольжения по горизонтальной плоскости, если его центр масс имеет скорость V . Покажите, что получится такая же формула, если рассматривать качение относительно мгновенной оси вращения.

А:

Через разложение «поступательное + вращение вокруг ЦМ»

Без скольжения: $V = \omega R$.

$$T = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} I_{\text{цм}} \omega^2.$$

• Диск (сплошной): $I_{\text{цм}} = \frac{1}{2} m R^2$

$$T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mV^2.$$

- Шар (сплошной): $I_{\text{цм}} = \frac{2}{5}mR^2$

$$T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{7}{10}mV^2.$$

Через мгновенную ось вращения (точка контакта P)

При чистом качении мгновенно $v_P = 0 \Rightarrow$ движение — чистое вращение вокруг P :

$$T = \frac{1}{2}I_P\omega^2, \quad I_P = I_{\text{цм}} + mR^2.$$

- Диск: $I_P = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mV^2.$$

- Шар: $I_P = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}mR^2\right)\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{7}{10}mV^2.$$

Обе методики дают одинаковые результаты, как и должно быть.

Q: 25. *Какие оси вращения называют свободными? Главными осями инерции? Приведите примеры вращения тел вокруг свободных осей. Поясните характерные особенности, которыми сопровождается вращение тел вокруг осей с наименьшим и наибольшим моментом инерции.*

A:

1. Свободные оси вращения

Свободные оси вращения — такие оси, вокруг которых тело может вращаться без действия внешних моментов сил, сохраняя постоянное направление в пространстве.

2. Главные оси инерции

Главные оси инерции — оси, проходящие через центр масс тела и совпадающие с осями симметрии распределения массы.

- В этих осях тензор инерции диагонален, и вращение вокруг такой оси является устойчивым.
- Для симметричных тел: это ось симметрии и любые взаимно перпендикулярные оси, связанные с симметрией.

3. Примеры вращения вокруг свободных осей

- Вращение волчка вокруг оси симметрии.
- Полёт снаряда, пущенного с вращением вокруг продольной оси (гироскопическая стабилизация).
- Вращение космического спутника вокруг оси с симметрией массы.

4. Особенности вращения вокруг разных главных осей

- **Вращение вокруг оси с наименьшим моментом инерции** и вокруг оси с наибольшим моментом инерции — устойчивое (тело сохраняет ориентацию).
- **Вращение вокруг промежуточной оси** (средний момент инерции) — неустойчивое: малейшее возмущение приводит к тому, что тело начинает «перекидываться» (пример — трюк с книгой или смартфоном, подброшенным в воздух).

Q: 26. *Сформулируйте условия равновесия твёрдого тела. Перечислите виды равновесия. Какие изменения могут происходить с кинетической энергией тел при разных видах равновесия?*

A: Разберём по порядку:

1. Условия равновесия твёрдого тела

Для того чтобы твёрдое тело находилось в равновесии, необходимо:

1. Условие поступательного равновесия

$$\sum \vec{F} = 0$$

(сумма всех внешних сил равна нулю).

2. Условие вращательного равновесия

$$\sum \vec{M} = 0$$

(сумма моментов всех внешних сил относительно любой оси равна нулю).

2. Виды равновесия

- **Устойчивое равновесие** — при малом отклонении тело возвращается в исходное положение (пример: шар в чашке).
- **Неустойчивое равновесие** — при малом отклонении тело отклоняется ещё больше (шар на вершине горки).
- **Безразличное (нейтральное) равновесие** — при смещении тело остаётся в новом положении (шар на горизонтальной плоскости).

3. Изменения кинетической энергии при малых отклонениях

- **Устойчивое равновесие** — потенциальная энергия при отклонении возрастает, поэтому при возвращении в положение равновесия она преобразуется в кинетическую. Тело колеблется вокруг положения равновесия.
- **Неустойчивое равновесие** — потенциальная энергия при малом смещении уменьшается, и тело «уходит» дальше, кинетическая энергия возрастает.
- **Безразличное равновесие** — потенциальная энергия не меняется, поэтому кинетическая энергия также остаётся постоянной (при отсутствии внешних возмущений).

Q: 27. *Какие системы отсчета называют неинерциальными? В чем заключается принципиальное отличие сил инерции от других сил, определяющих взаимодействие тел? Как меняются силы инерции и ньютоновские силы при переходе от одной неинерциальной системы отсчета к другой?*

A:

1. Неинерциальные системы отсчёта

Неинерциальная система отсчёта (НИСО) — это система, которая движется с ускорением относительно инерциальной системы. В таких системах законы Ньютона не выполняются в их простом виде — для согласия с опытом приходится вводить **фиктивные (инерциальные) силы**.

2. Отличие сил инерции от «настоящих» сил

- **Ньютоновские силы** (гравитация, упругости, трения и т. д.) — это реальные взаимодействия между телами.
- **Силы инерции** — не связаны с каким-либо физическим взаимодействием, они появляются лишь как поправка при рассмотрении движения в НИСО. Формула:

$$\vec{F}_{\text{инерц}} = -m\vec{a}_0,$$

где \vec{a}_0 — ускорение самой системы отсчёта.

3. Как меняются силы при переходе между системами

- При переходе от одной НИСО к другой изменяются **силы инерции**: они зависят от ускорения новой системы отсчёта.
- «Настоящие» ньютоновские силы, обусловленные взаимодействием тел, при этом **не меняются**.

Q: 28. Запишите формулу для силы инерции в неинерциальной системе отсчёта, которая движется поступательно. Как направлена эта сила? Является ли сила инерции консервативной? Может ли она совершать работу?

A:

1. Формула силы инерции при поступательном движении НИСО

Если система отсчёта движется с ускорением \vec{a}_0 относительно инерциальной, то для тела массы m в этой НИСО вводят силу инерции:

$$\vec{F}_{\text{инерц}} = -m\vec{a}_0.$$

2. Направление силы

- Сила инерции всегда направлена **против ускорения системы отсчёта**.
- То есть, если сама система ускоряется вправо, то сила инерции в ней действует влево.

3. Консервативность

- Сила инерции **не является консервативной**, потому что она не связана с каким-либо потенциальным полем и не является силой реального взаимодействия.
4. Может ли она совершать работу?
- Да, в уравнениях движения в НИСО сила инерции может входить в выражение для работы и энергии.
 - Однако эта «работа» не есть физическая передача энергии от какого-то реального источника, а лишь математическая поправка, учитывающая ускорение системы отсчёта.
-

Q: 29. Чем различается аналитический вид второго закона Ньютона в инерциальной и неинерциальной системах отсчёта? Выполняется ли третий закон Ньютона в НИСО?

A:

1. Второй закон Ньютона в **инерциальной системе отсчёта (ИСО)**

$$m\vec{a} = \sum \vec{F},$$

где $\sum \vec{F}$ — сумма всех **реальных** сил, действующих на тело.

2. Второй закон Ньютона в **неинерциальной системе отсчёта (НИСО)**

Если система ускоряется с \vec{a}_0 относительно ИСО, то вводится **сила инерции**:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F} + \vec{F}_{\text{инерц}}, \quad \vec{F}_{\text{инерц}} = -m\vec{a}_0,$$

где \vec{a}' — ускорение тела относительно НИСО.

В НИСО второй закон Ньютона выполняется только с учётом добавления фиктивных сил инерции.

3. Третий закон Ньютона в НИСО

- **Третий закон Ньютона** (действие = противодействие) относится к реальным взаимодействиям тел и **справедлив всегда**, в том числе в НИСО.

- Но **силы инерции** не связаны с взаимодействием тел, поэтому они не имеют пары «действие–противодействие».
-

Q: 30. На тележке, которая движется по горизонтальной поверхности с постоянным ускорением $a = 5 \text{ м/с}^2$, на нити длиной $l = 1 \text{ м}$ висит груз массой $m = 1 \text{ кг}$. Найдите силу натяжения нити и угол, который она образует с вертикалью, при условии, что груз неподвижен относительно тележки.

A: Решение в ускоренной (неинерциальной) системе тележки:

$$T \sin \theta = ma \quad T \cos \theta = mg \Rightarrow \tan \theta = \frac{a}{g}, \quad T = m\sqrt{g^2 + a^2}.$$

Подставим $m = 1, \text{ кг}$, $a = 5, \text{ м/с}^2$, $g = 9.81, \text{ м/с}^2$:

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{9.81}\right) \approx 27.0^\circ, \quad T = \sqrt{9.81^2 + 5^2} \approx 11.01 \text{ Н}.$$

Ответ: $\theta \approx 27^\circ$ к вертикали, натяжение $T \approx 11.0 \text{ Н}$.

Q: 31. Выполняются ли законы сохранения механической энергии и импульса в неинерциальных системах отсчета? Приведите соответствующие пояснения.

A:

1. Закон сохранения механической энергии

- В **инерциальных системах**: выполняется, если действуют только консервативные силы.
- В **неинерциальных системах**:
 - ▶ приходится вводить силы инерции; они **неконсервативны**, их работа зависит от траектории.
 - ▶ поэтому строгий закон сохранения механической энергии **не выполняется**.
 - ▶ Энергию можно «сохранить» только формально, если учитывать дополнительный член, связанный с энергией самой системы отсчёта.

2. Закон сохранения импульса

- В **инерциальных системах**: выполняется, если на систему не действуют внешние силы.
- В **неинерциальных системах**:
 - ▶ появляются силы инерции, зависящие от массы и ускорения системы.
 - ▶ они не подчиняются третьему закону Ньютона и не компенсируются.
 - ▶ поэтому импульс системы тел в НИСО **вообще не сохраняется**.

3. Итог

- В НИСО **законы сохранения механической энергии и импульса нарушаются** в их обычной форме.
- Они могут выполняться только при введении «фиктивных поправок» (работа сил инерции, импульс системы отсчёта).

Q: 32. В чем заключается отличие происхождения поля сил инерции и поля сил тяготения? В чем заключаются особенности поля сил инерции?

A:

1. Происхождение полей

- **Поле сил тяготения**

- ▶ Реальное поле, возникающее вследствие гравитационного взаимодействия тел по закону всемирного тяготения.
- ▶ Его источник — масса.
- ▶ Силы тяготения действуют независимо от выбора системы отсчёта.

- **Поле сил инерции**

- ▶ Мнимое (фиктивное) поле, возникающее при рассмотрении движения в неинерциальных системах отсчёта.
- ▶ Его «источник» — ускорение самой системы отсчёта.
- ▶ Силы инерции не связаны с реальными взаимодействиями.

2. Особенности поля сил инерции

1. **Зависимость от выбора системы отсчёта.** В другой системе (например, инерциальной) эти силы полностью исчезают.

2. **Неконсервативность.** Силы инерции не выражаются через потенциальную энергию (работа зависит от пути).
 3. **Пропорциональность массе.** $\vec{F}_{\text{инерц}} = -m\vec{a}_0$. Все тела в данной НИСО испытывают одинаковое ускорение под действием этих сил (напоминает принцип эквивалентности).
 4. **Не выполняется третий закон Ньютона.** Силы инерции не имеют пары «действие – противодействие».
-

Q: 33. В чем заключается принцип суперпозиции полей сил инерции и притяжения? Ощущает ли отличие поля сил инерции и поля сил тяготения наблюдатель, который находится в неинерциальной системе отсчета?

A:

1. Принцип суперпозиции

В НИСО на тело действуют как **реальные силы** (например, гравитации), так и **фиктивные силы инерции**. Поле инерции просто **накладывается** на поле тяготения (или другое реальное поле).

Пример: в лифте, движущемся с ускорением a , эффективное поле силы тяжести для пассажира:

$$\vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g} + \vec{a}_{\text{лиф}}.$$

2. Может ли наблюдатель отличить поля?

- Для наблюдателя внутри НИСО (например, в ускоряющемся лифте или ракете) **силы инерции и силы тяготения неразличимы**.
- Именно на этом основан **принцип эквивалентности Эйнштейна**: локально невозможно отличить действие гравитационного поля от равномерно ускоренного движения.

3. Вывод

- **Принцип суперпозиции:** в НИСО суммируются поле тяготения и поле инерции.
- **Различие:** внешний наблюдатель (в ИСО) видит, что силы инерции фиктивные, а внутренний наблюдатель (в НИСО) воспринимает их как реальные и не может отличить от гравитации.

Q: 34. Какие силы инерции возникают во вращающихся системах отсчёта? По какой формуле рассчитывается центробежная сила инерции? Как определяется ее направление? Зависит ли направление центробежной силы от направления угловой скорости вращения?

A:

1. Силы инерции во вращающихся системах отсчёта

При переходе к вращающейся системе отсчёта возникают:

- **Центробежная сила инерции**
- **Сила Кориолиса**
- (при неравномерном вращении — ещё и сила Эйлера).

2. Центробежная сила инерции

Для точки массы m , находящейся на расстоянии r от оси вращения, в системе, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$:

$$\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{r}_\perp,$$

или в векторной форме:

$$\vec{F}_{цб} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

3. Направление

- Всегда направлена **от оси вращения наружу**, вдоль радиуса.
- То есть противоположна центростремительному ускорению.

4. Зависимость от направления угловой скорости

- Величина $|\vec{F}_{цб}| = m\omega^2 r$ зависит только от модуля ω .
- Направление силы **не зависит от знака/направления вращения**, а определяется только положением точки относительно оси.

Q: 35. Как изменится модуль центробежной силы инерции, если скорость вращения системы отсчёта увеличить в n раз? Дайте необходимые пояснения.

A:

$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad F_{\text{цб}} = m\omega^2 r.$$

Если угловую скорость увеличить в n раз ($\omega \rightarrow n\omega$), то

$$F'_{\text{цб}} = m(n\omega)^2 r = n^2 m\omega^2 r = n^2 F_{\text{цб}}.$$

То есть модуль центробежной силы возрастает в n^2 раз. Причина — квадратичная зависимость от ω (или эквивалентно от линейной скорости $v = \omega r$: $F_{\text{цб}} = \frac{mv^2}{r}$).

Q: 36. При движении космического корабля по круговой орбите имеет место состояние невесомости. Почему оно пропадает, когда корабль входит в атмосферу Земли? На каких участках траектории космического корабля возникают перегрузки? Что называют перегрузкой?

A:

1. Невесомость на орбите

Корабль и всё внутри него движутся по орбите с одинаковым ускорением свободного падения $g_{\text{орб}}$.

- На корабль и на космонавтов действует только сила тяготения.
- Опоры (пол, кресла) не оказывают давления → **сила реакции опоры равна нулю**, и человек ощущает невесомость.

2. Почему невесомость пропадает в атмосфере

При входе в атмосферу возникает сила сопротивления воздуха (аэродинамическая сила), действующая на корпус корабля.

- Корабль начинает замедляться.
- Космонавт внутри ещё движется по инерции, ударяется о стенку → возникает сила давления.
- Появляется весовое ощущение → невесомость исчезает.

3. Где возникают перегрузки

Перегрузки возникают там, где ускорение корабля (или его частей) отличается от ускорения свободного падения:

- **При старте** ракеты — от действия реактивной тяги.
- **При манёврах** (изменение скорости или траектории).

- При торможении в атмосфере (вход в плотные слои, аэродинамическое замедление).

4. Определение перегрузки

Перегрузка — это отношение полной кажущейся силы (реакции опоры), действующей на человека или прибор, к его весу в состоянии покоя на поверхности Земли:

$$n = \frac{R}{mg}.$$

Если $n > 1$, человек ощущает усиленный вес (давление кресла), если $n < 1$ — невесомость или даже «отрицательный вес».

Q: 37. При каких условиях возникают кориолисовы силы инерции? Зависит ли сила Кориолиса от скорости движения тела во вращающейся системе отсчета? Приведите примеры проявления сил Кориолиса на Земле.

A:

1. Условия возникновения

Сила Кориолиса появляется в неинерциальной системе отсчёта, которая **вращается** с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Она действует на тело, которое имеет скорость \vec{v}' относительно этой вращающейся системы.

2. Формула

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}').$$

- Она есть **только при движении тела** внутри вращающейся системы ($\vec{v}' \neq 0$).
- Чем больше скорость v' , тем больше сила.
- Зависит от направления движения относительно оси вращения.

3. Примеры проявления на Земле

- **Отклонение снарядов, ракет, авиации:** в Северном полушарии вправо от направления движения, в Южном — влево.
- **Циркуляция атмосферы и океанов:** пассаты, циклоны и антициклоны закручиваются из-за силы Кориолиса.

- **Течения рек:** в северном полушарии течение интенсивнее размывает правый берег, в южном — левый.
 - **Маятник Фуко:** плоскость колебаний медленно поворачивается из-за вращения Земли.
-

Q: 38. По какой формуле находится сила Кориолиса? Сформулируйте правило, по которому определяется направление силы Кориолиса. Почему сила Кориолиса отсутствует, когда тело движется параллельно оси вращения системы?

A:

1. Формула силы Кориолиса

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}'),$$

где

- m — масса тела,
- $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращающейся системы отсчёта,
- \vec{v}' — скорость тела относительно этой системы.

2. Направление силы (правило)

Направление $\vec{F}_{\text{кор}}$ определяется по правилу векторного произведения:

- берём вектор $\vec{\omega}$ (ось вращения, направление по правилу правого винта),
- берём вектор скорости \vec{v}' ,
- строим $\vec{\omega} \times \vec{v}'$ по правилу правой руки,
- умножаем на $-2m$, то есть получаем вектор, направленный в противоположную сторону.

Иными словами: сила Кориолиса всегда перпендикулярна и к оси вращения, и к направлению движения.

3. Почему сила Кориолиса отсутствует при движении вдоль оси вращения

- Если \vec{v}' параллелен $\vec{\omega}$, то $\vec{\omega} \times \vec{v}' = 0$.
- Следовательно, $\vec{F}_{\text{кор}} = 0$.

- Физически: движение вдоль оси вращения не связано с изменением радиус-вектора относительно оси, поэтому вращение системы не создаёт поперечного отклонения.
-

Q: 39. Как направлена сила Кориолиса при движении тела: по экватору с востока на запад; с запада на восток; на экваторе вдоль меридиана?

A:

1. Формула

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}'),$$

где $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения Земли (направлена вдоль земной оси с юга на север, то есть к Северному полюсу).

2. Движение по экватору с **запада на восток**

- Скорость \vec{v}' направлена на восток.
- $\vec{\omega}$ направлена на север.
- Векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{v}'$ — вверх (радиально наружу).
- С учётом минуса: сила Кориолиса направлена **к центру Земли (вниз)**.

3. Движение по экватору с **востока на запад**

- Скорость \vec{v}' направлена на запад.
- $\vec{\omega} \times \vec{v}'$ — вниз (к центру).
- Сила Кориолиса с минусом — **радиально наружу (вверх)**.

4. Движение на экваторе вдоль меридиана (север ↔ юг)

- Здесь \vec{v}' параллельна $\vec{\omega}$.
 - Тогда $\vec{\omega} \times \vec{v}' = 0$.
 - **Сила Кориолиса отсутствует.**
-

Q: 40. Объясните, как на основе существования сил Кориолиса было экспериментально доказано суточное вращение Земли при помощи маятника Фуко.

A:

1. Суть маятника Фуко

Маятник Фуко — это длинный тяжёлый маятник, способный свободно качаться в любой вертикальной плоскости.

- В идеале плоскость его колебаний остаётся неизменной в инерциальной системе.
- Но Земля вращается → для наблюдателя, находящегося на Земле (неинерциальная система), плоскость колебаний **кажется поворачивающейся**.

2. Роль силы Кориолиса

На колеблющийся груз действует сила Кориолиса:

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}).$$

- Она вызывает постепенное смещение траектории грузика.
- В результате плоскость колебаний маятника медленно поворачивается относительно поверхности Земли.

3. Наблюдаемый эффект

Скорость поворота плоскости:

$$\Omega = \omega \sin \varphi,$$

где ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта.

- На **полюсах** ($\varphi = 90^\circ$) плоскость полностью поворачивается за 24 часа.
- На **экваторе** ($\varphi = 0$) поворот отсутствует.
- В промежуточных широтах — период больше суток, но всегда конечен.

4. Экспериментальное доказательство

Фуко (1851 г., Пантеон, Париж) подвесил маятник длиной 67 м.

- Плоскость колебаний маятника постепенно поворачивалась относительно здания.
- Это было наглядным доказательством того, что вращается именно Земля, а не маятник.

Q: 41. *Существование кориолисовых сил является результатом того, что в северном полушарии правый берег реки всегда более крутой, чем*

левый; правый рельс железной дороги изнашивается сильнее, чем левый. Вместе с тем известно, что сила Кориолиса перпендикулярна вектору относительной скорости u , следовательно, не может выполнять работы. За счет какой энергии выполняется работа в рассмотренных выше случаях?

А:

1. Свойство силы Кориолиса

Сила Кориолиса всегда перпендикулярна скорости тела:

$$\vec{F}_{\text{кор}} \perp \vec{v},$$

поэтому работа этой силы равна нулю:

$$A = \int \vec{F}_{\text{кор}} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Она может **изменять направление движения**, но не его кинетическую энергию.

2. Тогда откуда работа в реальных процессах?

Когда мы наблюдаем такие явления, как:

- размыв правого берега рек в Северном полушарии,
- большой износ правого рельса,

работа совершается **не силой Кориолиса напрямую, а реальными силами взаимодействия:**

- Для рек: давление и трение потока о берега. Сила Кориолиса лишь отклоняет поток, перераспределяя направление скоростей \rightarrow вода сильнее ударяет в правый берег, и его разрушает **гидродинамическая сила воды.**
- Для поездов: Кориолис вызывает микроскопическое смещение колёс относительно рельсов \rightarrow возрастает давление на правый рельс, и именно **нормальная реакция рельса** выполняет работу изнашивания.

3. Источник энергии

Энергия берётся из **основного движения системы:**

- в реках — из потенциальной энергии воды, стекающей вниз по уклону,
 - в железной дороге — из работы двигателя локомотива, обеспечивающего поступательное движение поезда.
-

Q: 42. Дайте определение веса тела. Какова природа этой силы? Запишите формулу связи веса тела с силами инерции для системы, которая движется относительно Земли поступательно с некоторым ускорением.

A:

1. Определение веса тела

Вес тела — сила, с которой тело действует на опору или подвес вследствие действия на него сил притяжения и инерции.

То есть вес — это **реакция опоры** (или натяжение подвеса), а не сама сила тяжести.

2. Природа силы

- Основная причина появления веса — **гравитационная сила**, действующая на тело.
- Но если система отсчёта неинерциальная (движется с ускорением), то к силе тяжести добавляются **силы инерции**, и вес изменяется.

3. Формула для поступательно ускоряющейся системы

Если система движется с ускорением \vec{a}_0 относительно Земли (например, лифт), то эффективный вес:

$$\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}_0,$$

где

- m — масса тела,
- \vec{g} — ускорение свободного падения,
- \vec{a}_0 — ускорение системы.

4. Примеры

- Лифт ускоряется **вверх** с ускорением a :

$$P = m(g + a) \Rightarrow \text{кажущийся вес увеличивается.}$$

- Лифт ускоряется **вниз**:

$$P = m(g - a) \Rightarrow \text{вес уменьшается.}$$

- При $a = g$:

$$P = 0 \Rightarrow \text{невесомость.}$$

Q: 43. *Какие причины обуславливают зависимость ускорения свободного падения от географической широты места? Как выражается эта зависимость?*

A:

1. Причины зависимости g от широты φ

1. **Вращение Земли**

- При вращении Земли тело испытывает центробежное ускорение:

$$a_{\text{цб}} = \omega^2 R \cos \varphi,$$

направленное от оси вращения.

- На экваторе ($\varphi = 0^\circ$) оно максимальное, на полюсах ($\varphi = 90^\circ$) равно нулю.

2. **Сплюснутость Земли (геоид)**

- Радиус Земли на экваторе больше, чем на полюсах.
- По закону тяготения $g \propto \frac{1}{R^2}$.
- Поэтому на экваторе g меньше, а на полюсах больше.

2. **Общая зависимость**

Ускорение свободного падения на широте φ :

$$g(\varphi) = g_0(1 + \alpha \sin^2 \varphi) - \omega^2 R \cos^2 \varphi,$$

где

- g_0 – номинальное значение у поверхности Земли,
- α – поправка на сплюснутость Земли (≈ 0.0053),
- ω – угловая скорость вращения Земли,
- R – экваториальный радиус Земли.

3. Итог

- На экваторе $g \approx 9.78 \text{ м/с}^2$.
 - На полюсах $g \approx 9.83 \text{ м/с}^2$.
 - Разница $\approx 0.5\%$.
-

Q: 44. *Какой формулой определяется угол между направлением к центру Земли и направлением линии отвеса? От чего зависит его величина? В каких границах он изменяется?*

A:

1. Причина отклонения

Линия отвеса определяется **суммарным ускорением**, действующим на тело:

$$\vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g} + \vec{a}_{\text{цб}},$$

где

- \vec{g} — ускорение гравитации (к центру Земли),
- $\vec{a}_{\text{цб}}$ — центробежное ускорение из-за вращения Земли.

Центробежное ускорение направлено перпендикулярно оси вращения, поэтому отвес чуть отклоняется от истинного центра Земли.

2. Формула для угла отклонения δ

Угол между направлением к центру Земли и линией отвеса:

$$\tan \delta = \frac{a_{\text{цб,гор}}}{g},$$

где $a_{\text{цб,гор}} = \omega^2 R \cos \varphi \cdot \sin \varphi$ — горизонтальная составляющая центробежного ускорения на широте φ .

Приближённо:

$$\delta \approx \frac{\omega^2 R}{g} \sin \varphi \cos \varphi.$$

3. Зависимость и границы

- Зависит от широты φ .

- На экваторе ($\varphi = 0^\circ$) и на полюсах ($\varphi = 90^\circ$) угол равен нулю (отвес точно указывает в центр Земли).
- Максимальное отклонение наблюдается при $\varphi = 45^\circ$.
- Величина отклонения очень мала: порядка $2'$ (угловых минут), то есть меньше 0.05° .

Q: 45. В каких границах изменяется вблизи поверхности Земли ускорение свободного падения? Какие причины обуславливают эти изменения?

A:

1. Диапазон значений g на Земле

Ускорение свободного падения у поверхности Земли изменяется примерно в пределах:

$$g \approx 9,78 \text{ м/с}^2 \quad \text{экватор} \div 9,83 \text{ м/с}^2 \quad \text{полюсы.}$$

Разница $\approx 0,05 \text{ м/с}^2$ (около 0,5 %).

2. Причины изменения g

1. **Вращение Земли**

- На экваторе действует центробежное ускорение:

$$a_{\text{цб}} = \omega^2 R_{\text{эква}} \approx 0,034 \text{ м/с}^2,$$

что уменьшает эффективное g .

- На полюсах центробежного ускорения нет $\rightarrow g$ больше.

2. **Сплюснутость Земли (геоид)**

- Земля не идеально сферическая: радиус на экваторе больше, чем на полюсах.
- По закону тяготения $g \propto \frac{1}{R^2}$, поэтому на экваторе (где радиус больше) g меньше.

3. **Локальные геологические особенности**

- Различия в плотности пород, наличие гор, впадин, полезных ископаемых создают небольшие локальные отклонения g (в пределах тысячных долей).

Q: 46. Одно и то же тело взвесили на пружинных и рычажных весах на экваторе и полюсе. Различаются показания этих приборов? Если, да, то каким именно образом? Дайте необходимые пояснения.

A:

1. Что измеряют разные весы

- **Рычажные весы** (двухчашечные) сравнивают массы по уравниванию моментов сил тяжести. → Их показания определяются отношением масс и **не зависят** от величины ускорения свободного падения g .
- **Пружинные весы** измеряют силу упругости пружины, которая уравнивает вес тела. → Их показания пропорциональны **силе тяжести**, то есть зависят от значения g .

2. Зависимость g от широты

На экваторе и на полюсе g различно:

- На **экваторе** меньше, потому что:
 1. радиус Земли больше (дальше от центра → меньше g);
 2. есть центробежное ускорение из-за вращения Земли.
- На **полюсе** g больше (радиус меньше, центробежное ускорение отсутствует).

3. Сравнение показаний

- **Рычажные весы:** одинаковые на экваторе и на полюсе.
- **Пружинные весы:** покажут меньший «вес» на экваторе, больший — на полюсе.

Q: 47. Что называют гироскопом? Какие оси имеет гироскоп? В чем заключается гироскопический эффект? Какие явления называют прецессией? Нутацией?

A:

1. Что называют гироскопом

Гироскоп — это быстро вращающееся твёрдое тело (обычно ротор), установленное так, что его ось вращения может свободно изменять

ориентацию в пространстве. Основное свойство: благодаря большому моменту импульса $\vec{L} = I\vec{\omega}$ ось гироскопа сохраняет своё направление в пространстве при отсутствии внешних моментов.

2. Оси гироскопа

- **Ось вращения** (собственная ось ротора).
- **Ось симметрии подвеса** (через центр масс и опору).
- **Ось прецессии** (ось, вокруг которой поворачивается ось гироскопа под действием внешнего момента).

3. Гироскопический эффект

Гироскопический эффект — это свойство гироскопа сохранять неизменным направление своей оси в пространстве или изменять его особым образом (прецессией), несмотря на приложенные силы.

Основан на законе сохранения момента импульса.

4. Прецессия

Прецессия — это медленное вращение оси гироскопа вокруг другой оси под действием момента внешних сил, перпендикулярного вектору собственного момента импульса. Скорость прецессии:

$$\Omega = \frac{M}{L}.$$

5. Нутация

Нутация — это дополнительные колебательные движения оси гироскопа (наклонные колебания вокруг линии средней прецессии). Они возникают при резком изменении внешнего момента или при несовершенстве подвеса.

Q: 48. Почему под действием момента внешних сил, перпендикулярного оси собственного импульса, гироскоп начинает совершать прецессию?

A:

1. Собственный момент импульса гироскопа

Вращающееся тело (ротор) имеет момент импульса

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

направленный вдоль оси вращения.

2. Действие внешнего момента

Если к гироскопу приложен момент внешних сил \vec{M} , то по закону изменения момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

- Если \vec{M} направлен **перпендикулярно** \vec{L} , то он не меняет величину $|\vec{L}|$, а изменяет только **направление** вектора \vec{L} .
- Вектор \vec{L} начинает поворачиваться в направлении действия \vec{M} .

3. Прецессия

Поскольку ось гироскопа совпадает с направлением \vec{L} , её ориентация также начинает изменяться \rightarrow ось описывает медленное вращение вокруг вертикали (или другой оси, вдоль которой приложен момент). Это движение называется **прецессией**.

Скорость прецессии:

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{M}}{|\vec{L}|}.$$

4. Физический смысл

- Момент сил не «опрокидывает» гироскоп (как это было бы для невращающегося тела), а лишь изменяет направление его оси.
- Поэтому гироскоп «устойчив» и реагирует на внешний момент боковым вращением — прецессией.

Q: 49. Приведите примеры практического применения гироскопического эффекта.

A: Гироскопический эффект — это способность вращающегося тела сохранять направление своей оси в пространстве (устойчивость при воздействии внешних моментов). Его активно используют в технике.

Примеры применения:

1. Навигация и ориентация

- гироскопы на кораблях и подводных лодках (ориентация без магнитного поля);
- гироскопические приборы в авиации (гиригоризонт, авиагоризонт, указатель поворота);
- инерциальные навигационные системы ракет, спутников, космических аппаратов.

2. Транспорт

- стабилизация велосипедов, мотоциклов (вращающиеся колёса дают устойчивость);
- гиростабилизаторы в поездах и автомобилях для повышения устойчивости.

3. Космос

- ориентация искусственных спутников и космических станций (маховики-реакционные колёса, гиростабилизаторы).

4. Морская техника

- гиростабилизаторы на судах и яхтах для уменьшения качки.

5. Электроника и бытовая техника

- гироскопы в смартфонах, дронах, геймпадах — для определения положения в пространстве.

Колебания и волны

Q: 1. Какое движение называется колебательным? Приведите примеры.

А: Колебательное движение — это движение, которое многократно повторяется во времени и происходит около положения устойчивого равновесия. Основные признаки:

- наличие равновесного положения,
- отклонение от него,
- возврат под действием сил, стремящихся вернуть систему в равновесие,
- периодичность или квазипериодичность.

Примеры колебательных движений:

- механические:
 - колебания маятника,
 - колебания пружинного маятника (груз на пружине),
 - вибрация струны;
 - акустические: звуковые колебания воздуха;
 - электрические: колебания заряда и тока в колебательном контуре LC ;
 - физические системы: колебания молекул в твёрдых телах (фононы), колебания в кристаллической решётке.
-

Q: 2. Какие колебания называются гармоническими? По каким критериям эти колебания в природе и технике выделяют в особую группу?

А: Гармонические колебания — это такие колебания, при которых физическая величина (смещение, скорость, ток и т. п.) изменяется по закону синуса или косинуса:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A — амплитуда, ω — циклическая частота, φ_0 — начальная фаза.

2. Критерии выделения в особую группу

Гармонические колебания считаются базовыми, потому что:

- **линейность:** они возникают в линейных системах при малых отклонениях от равновесия (например, закон Гука);

- **универсальность:** любое сложное периодическое движение можно разложить в сумму гармонических (ряд Фурье);
 - **простота анализа:** имеют чёткие характеристики (амплитуда, период, частота, фаза), легко измеряемые и вычисляемые;
 - **распространённость:** в природе и технике они встречаются очень часто — от маятника и колебаний атомов в кристалле до переменного тока и радиоволн.
-

Q: 3. *Дайте определение основных величин, характеризующих гармоническое колебательное движение (амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты). Каков физический смысл этих характеристик?*

A: Возьмём гармоническое колебание

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Основные величины

1. Амплитуда A

- Максимальное по модулю отклонение колеблющейся величины от положения равновесия.
- Физический смысл: характеризует «размах» колебаний (максимальное смещение, максимальный ток и т. д.).

2. Фаза $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$

- Аргумент функции косинуса/синуса, определяющий состояние колеблющейся системы в данный момент времени.
- Физический смысл: задаёт «положение» колебания на цикле (например, находится ли система в максимуме, на спаде, в равновесии).

3. Начальная фаза φ_0

- Значение фазы в момент $t = 0$.
- Физический смысл: определяет, с какого состояния система начинает колебаться.

4. Период T

- Время одного полного колебания.

- Физический смысл: длительность одного «цикла» движения.
- Формула:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

5. Частота ν

- Число колебаний в единицу времени.
- Связь с периодом:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

- Физический смысл: показывает, сколько раз за секунду повторяется движение.

6. Циклическая частота ω

- Угловая скорость изменения фазы (в радианах в секунду).
- Связь с частотой:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

- Физический смысл: показывает, с какой скоростью «бежит» фаза; удобно в формулах, потому что измеряется в рад/с.

Q: 4. Какими признаками определяются упругие силы? В чем различие упругих и квазиупругих сил?

A: 1. Признаки упругих сил

Упругая сила проявляется, когда тело деформируется, и характеризуется:

- **Противодействием деформации** — стремится вернуть тело в исходное (равновесное) состояние.
- **Зависимостью только от величины деформации** (для идеальной упругости):

$$F = -k\Delta x$$

(закон Гука, где k — жёсткость, Δx — удлинение/сжатие).

- **Мгновенной обратимостью:** работа упругой силы полностью возвращается при устранении деформации (нет потерь энергии).

2. Квазиупругие силы

Это силы, которые внешне ведут себя **похоже на упругие**, но:

- они не полностью восстанавливают исходное состояние;
- при деформации и обратном движении часть энергии рассеивается (в тепло, внутренние процессы);
- сила зависит не только от величины деформации, но и от скорости, времени, внутреннего трения.

Пример: резина, полимеры, биологические ткани — при растяжении и отпуске графики $F(\Delta x)$ не совпадают (явление гистерезиса).

3. Различие

- **Упругие силы:** строго подчиняются закону Гука, полностью обратимы, энергия сохраняется.
 - **Квазиупругие силы:** лишь приближённо подчиняются закону Гука, сопровождаются диссипацией энергии, обратимость неполная.
-

Q: 5. *Какие колебания называются свободными? При каких условиях свободные колебания будут незатухающими?*

A: Свободные колебания — это колебания системы, происходящие только за счёт её собственных внутренних сил после того, как система была выведена из положения равновесия, **без дальнейшего внешнего воздействия.**

Примеры: колебания маятника после отклонения, груз на пружине после растяжения.

2. Условия незатухающих свободных колебаний

В реальности всегда есть силы сопротивления (трение, сопротивление воздуха), из-за которых колебания затухают. **Незатухающими** свободные колебания будут только при идеализированных условиях:

- отсутствуют диссипативные силы (трение, сопротивление среды, внутренние потери),
- действуют только **консервативные силы** (сила тяжести, упругости).

В этом случае система бесконечно долго колеблется с постоянной амплитудой и постоянной собственной частотой.

Q: 6. На примере прямолинейных гармонических колебаний установите связь между амплитудами и фазами смещения скорости и ускорения материальной точки.

A: Возьмём прямолинейные гармонические колебания

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Амплитуды:

$$v(t) = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow A_v = \omega A,$$

$$a(t) = \ddot{x} = -\omega^2 x = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) \Rightarrow A_a = \omega^2 A.$$

Фазовые сдвиги:

- Скорость опережает смещение на $\frac{\pi}{2}$ (четверть периода): $\varphi_v = \varphi + \frac{\pi}{2}$.
- Ускорение в противофазе со смещением (сдвиг π): $\varphi_a = \varphi + \pi$.
- Ускорение опережает скорость на $\frac{\pi}{2}$ (или скорость отстаёт на $\frac{\pi}{2}$).

Итог по связям:

$$A_v = \omega A, \quad A_a = \omega^2 A, \quad \varphi_v - \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_a - \varphi = \pi.$$

Q: 7. В течении какой доли периода колебаний совпадают направления векторов смещения и скорости простого гармонического осциллятора?

A: Полпериода.

В SHM $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, $v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$. Направления совпадают, когда x и v одного знака $\Leftrightarrow \sin(2(\omega t + \varphi)) < 0$, что выполняется на интервалах $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ и $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ по фазе — суммарно $\frac{T}{2}$.
Физически: совпадают, когда осциллятор уходит от равновесия к крайним положениям.

Q: 8. При помощи метода векторных диаграмм найдите выражение для амплитуды: результирующего колебания, полученного в результате

сложения двух колебаний одного направления и одинаковых частот. При каком условии амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд составляющих колебаний? Модулю их разности?

А: Классическое сложение фазоров.

Пусть

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Тогда результирующее колебание того же вида

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где амплитуда и фаза задаются по векторной диаграмме:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Условия:

- $A = A_1 + A_2$ при фазовом совпадении ($\Delta\varphi = 0$, в фазе).
- $A = |A_1 - A_2|$ при противофазе ($\Delta\varphi = \pi$).

Q: 9. В каком случае при сложении двух колебаний будет наблюдаться процесс биений? Запишите уравнение такого процесса, изобразите график зависимости смещения от времени.

А: Когда возникают биения: при сложении двух колебаний одного направления с близкими, но различными частотами $\omega_1 \approx \omega_2$ и сравнимыми амплитудами.

Уравнение суммы (для простоты $A_1 = A_2 = A, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$):

$$x(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

Амплитуда медленно меняется по огибающей

$2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$. Частота биений $f_b = |f_2 - f_1|$, период биений $T_b = \frac{1}{|f_2 - f_1|}$.

Для разных амплитуд:

$$x = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t, \quad A_{\text{огнб}}(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\omega, t)}.$$

Q: 10. Каков вид траектории точки, которая участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми частотами? При каких значениях разности фаз траекторией движения будет прямая и при каких — эллипс?

A: Возьмём

$$x(t) = A \cos \omega t, \quad y(t) = B \cos(\omega t + \delta).$$

Вид траектории

Исключая t , получаем связь

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\delta = \sin^2\delta,$$

что описывает **эллипс** (вообще — повернутый). Угол поворота θ удовлетворяет

$$\tan 2\theta = \frac{2AB \cos \delta}{A^2 - B^2}.$$

Когда прямая?

- При $\delta = 0$ или $\delta = \pi$:

$$y = \pm \frac{B}{A}x,$$

то есть траектория — **прямая** (проекции синфазны/противофазны).

Когда эллипс?

- При любом $\delta \neq 0, \pi \bmod(2\pi)$ — **эллипс**.
- Частный случай круга: если $A = B$ и $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$, то

$$x^2 + y^2 = A^2,$$

траектория — **окружность**.

Q: 11. Что называется фигурами Лиссажу? Как по виду фигур Лиссажу можно установить соотношение частот складываемых колебаний?

А: Фигуры Лиссажу — это траектории, которые описывает точка, участвующая одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях:

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x), \quad y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y).$$

Если частоты отличаются, получаются характерные замкнутые или незамкнутые кривые на плоскости (x, y) .

2. Установление соотношения частот

- Если отношение частот рациональное:

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n}{m},$$

то траектория замкнута и называется **фигурой Лиссажу**.

- Числа n и m можно определить по виду фигуры:

- ▶ **число петель** вдоль оси $x = n$,
- ▶ **число петель** вдоль оси $y = m$.

Пример: при $\omega_x : \omega_y = 2 : 1$ получится фигура с двумя «петлями» по оси x и одной по оси y .

3. Особый случай

Если $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ иррационально, то кривая **не замыкается**, и траектория со временем заполняет всё ограниченное прямоугольное пространство.

Q: 12. Выведите формулы для периодов колебаний пружинного, математического и физического маятников.

А: Разберём каждый тип маятника.

1. Пружинный маятник

Тело массы m на пружине жёсткости k .

Уравнение движения:

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Собственная циклическая частота:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Период:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

2. Математический маятник

Груз массы m на невесомой нерастяжимой нити длиной l . При малых углах ($\sin \varphi \approx \varphi$):

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Собственная частота:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Период:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

3. Физический маятник

Любое твёрдое тело, колеблющееся вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс. Уравнение движения:

$$I\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0,$$

где I — момент инерции относительно оси подвеса, l — расстояние от оси до центра масс. Собственная частота:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}.$$

Период:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Q: 13. В чем состоит различие между математическим и физическим маятниками? В чем заключается физический смысл приведенной длины физического маятника?

A:

1. Математический маятник

- Идеализированная модель.
- Материальная точка массы m , подвешенная на невесомой нерастяжимой нити длины l .
- Колебания происходят под действием силы тяжести.
- Период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

2. Физический маятник

- Любое реальное твёрдое тело, способное колебаться вокруг горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс.
- Тело имеет распределение масс и момент инерции (I) относительно оси подвеса.
- Период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}},$$

где d — расстояние от оси подвеса до центра масс.

3. Приведённая длина физического маятника

- Вводят для того, чтобы **сравнить физический маятник с эквивалентным математическим.**
- Определяется как:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{md}.$$

- Тогда формула периода приобретает вид:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}},$$

что полностью аналогично периоду математического маятника.

Q: 14. Почему период колебаний математического маятника не зависит от массы, а период физического маятника зависит от момента инерции.

A:

1. Математический маятник

- Период:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

- Здесь масса m сокращается при выводе: сила тяжести $F = mg$ пропорциональна массе, и ускорение $a = \frac{F}{m} = g$ не зависит от массы. Поэтому **период математического маятника не зависит от массы груза.**

2. Физический маятник

- Период:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}},$$

где I — момент инерции относительно оси подвеса, d — расстояние от центра масс до оси.

- Здесь масса входит в момент инерции I . Для тела с распределённой массой $I = \sum m_i r_i^2$.
 - Таким образом, период определяется не только массой, но и её распределением относительно оси.
-

Q: 15. Какие колебания называются затухающими? Как изменяется со временем амплитуда затухающих колебаний? Выразите эту зависимость аналитически и графически.

А: Затухающие колебания — это колебания с убывающей во времени амплитудой из-за потерь энергии (трение, сопротивление среды и т.п.).

- При линейном вязком сопротивлении:

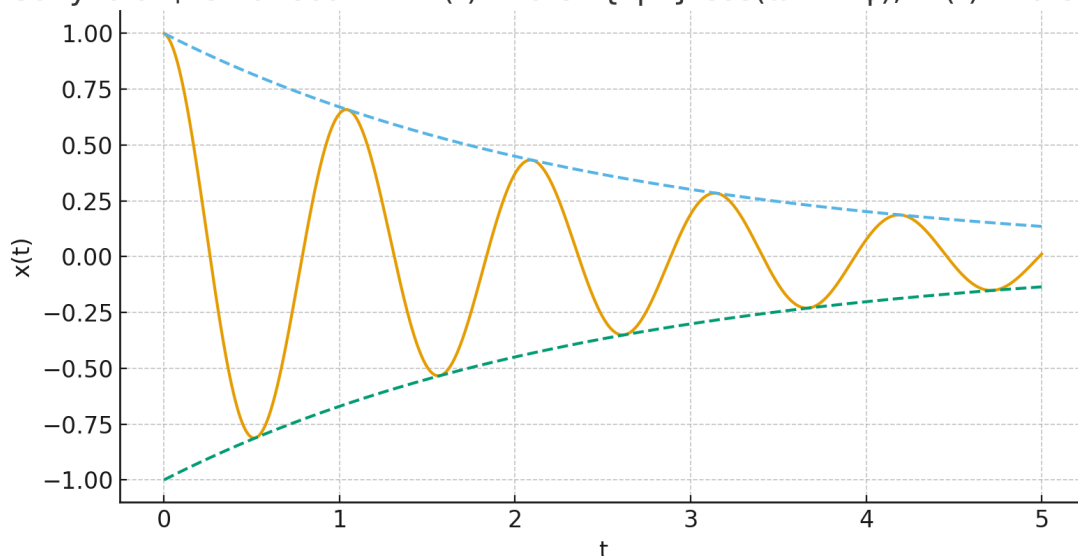
$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi), \quad A(t) = A_0 e^{-\gamma t}.$$

- Полезные характеристики:

$$\Lambda = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \gamma T_d, \quad \zeta = \frac{\gamma}{\omega_0}, \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} (\zeta < 1).$$

График с огибающей $\pm A(t)$ построен выше.

Затухающие колебания: $x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$, $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$



Q: 16. Что понимают под периодом затухающих колебаний? Что такое коэффициент затухания, логарифмический декремент, добротность колебательной системы?

А:

1. Период затухающих колебаний

Уравнение затухающих колебаний:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где γ — коэффициент затухания, ω — круговая частота затухающих колебаний.

Периодом T_d называют время между двумя последовательными колебаниями:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega}.$$

2. Коэффициент затухания γ

Характеризует скорость убывания амплитуды:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}.$$

Единицы измерения: [1/с].

3. Логарифмический декремент Λ

Величина, показывающая, во сколько раз уменьшается амплитуда за один период:

$$\Lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t + T_d)} = \gamma T_d.$$

4. Добротность (Q) колебательной системы

Показывает «качество» колебаний — насколько долго система сохраняет энергию. Определение:

$$Q = \frac{2\pi \cdot (\text{запасённая энергия})}{\text{потерянная энергия за период}}.$$

Через параметры затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{\omega}{2\gamma}.$$

Q: 17. *Получите формулы, выражающие зависимость кинетической и потенциальной энергий колебательной системы от времени. В каких случаях полная энергия колебательной системы будет постоянной? Представьте энергетические характеристики колебательной системы графически.*

A: Сформулируем для гармонического осциллятора $m\ddot{x} + kx = 0$ (и с затуханием при необходимости).

Формулы энергий

Для решения $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

$$E_{k(t)} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi),$$

$$E_{p(t)} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi).$$

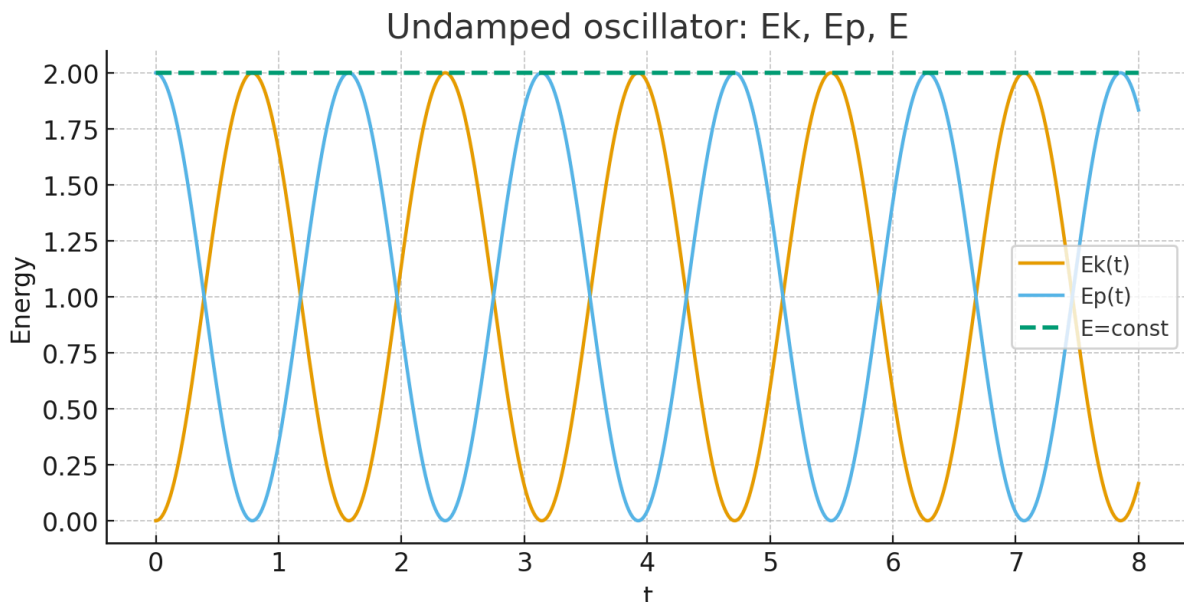
$$E(t) = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const.}$$

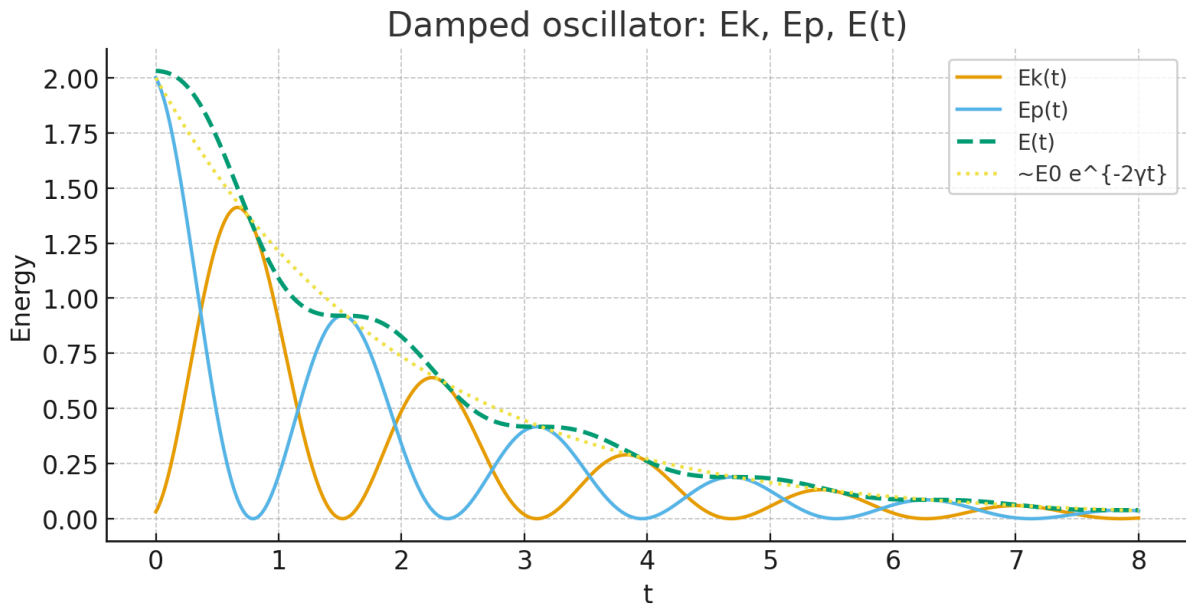
Если есть вязкое затухание $m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + kx = 0$, $x = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$ с $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Тогда амплитуда убывает как $e^{-\gamma t}$, а полная энергия как

$$E(t) \propto A^2(t) \approx E_0, e^{-2\gamma t} \quad (\gamma \ll \omega_0).$$

Когда энергия постоянна

Полная энергия постоянна **только** в консервативном случае: нет сил трения/сопротивления, параметры m , k постоянны, внешних источников или откачки энергии нет.





Q: 18. Дайте определение собственных и вынужденных колебаний системы. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Какова зависимость амплитуды вынужденных колебаний, возбуждаемых силой, которая изменяется по гармоническому закону, от частоты этой силы? Представьте данную зависимость аналитически и графически - для нескольких различных коэффициентов сопротивления.

A:

Определения

- **Собственные колебания** — свободные колебания системы без внешнего периодического воздействия (возникают за счёт начального отклонения/скорости).
- **Вынужденные колебания** — колебания под действием внешней силы $F(t)$, обычно периодической.

Уравнение вынужденных колебаний (линейный осциллятор с вязким сопротивлением)

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t).$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — собственная частота, γ — коэффициент затухания.

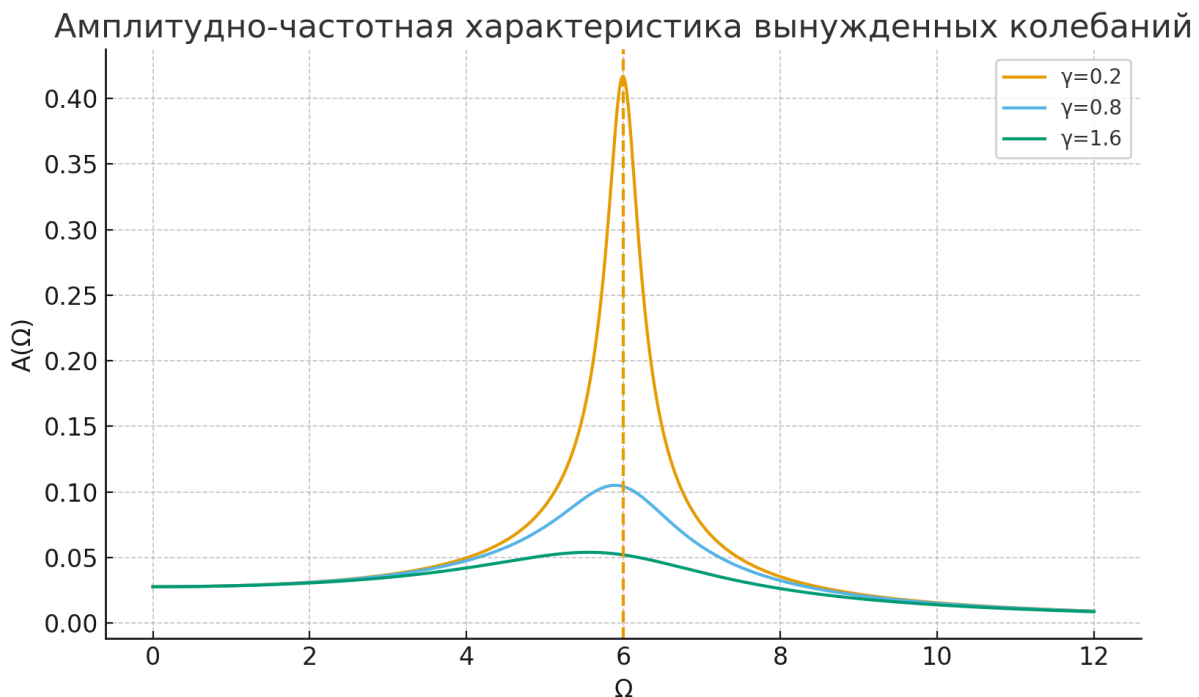
Амплитуда установившихся вынужденных колебаний

$$x(t) = A(\Omega) \cos(\Omega t - \delta), \quad A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}.$$

Пик около $\Omega_{\text{рез}} \approx \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ (чем меньше γ , тем выше и уже резонанс).

График $A(\Omega)$ для разных γ

Я построил АЧХ для $\gamma = 0.2, 0.8, 1.6$ при $\omega_0 = 6$ (в безразмерных единицах). Вертикальная пунктирная — $\Omega = \omega_0$.



Q: 19. В чем состоит суть явления резонанса? От чего зависит резонансная частота? Запишите формулу, определяющую резонансную частоту. Приведите примеры явления резонанса.

A:

1. Суть явления резонанса

Резонанс — это явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний системы, когда частота внешней силы Ω близка к собственной частоте системы ω_0 . Физический смысл: внешняя сила подкачивает энергию синхронно с колебаниями, и энергия накапливается.

2. От чего зависит резонансная частота

Резонансная частота зависит:

- от **собственной частоты системы** $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
- от **коэффициента затухания** γ .

3. Формула для резонансной частоты

Максимум амплитуды $A(\Omega)$ достигается при:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

- При малом затухании $\gamma \ll \omega_0$:

$$\Omega_{\text{рез}} \approx \omega_0.$$

4. Примеры резонанса

- Раскачивание качелей: толчки с частотой, близкой к собственной.
- Колебания мостов под действием ветра или шагов (знаменитый случай — разрушение моста Такома Нарроуз в 1940 году).
- Механический резонанс в машинах и механизмах (опасен, т.к. амплитуды могут стать разрушительными).
- Электрический резонанс в колебательных контурах (LCR-цепи).
- Акустический резонанс — усиление звука в резонансных полостях (например, в музыкальных инструментах).

Q: 20. *Какие системы называют автоколебательными? Приведите пример такой системы. Из каких основных элементов состоит автоколебательная система? Приведите пример релаксационных колебаний и охарактеризуйте их.*

A:

1. Автоколебательные системы

Автоколебательная система — это система, в которой колебания поддерживаются за счёт внутренних источников энергии, без внешнего периодического воздействия. Энергия, теряемая на сопротивление, периодически восполняется самим устройством → колебания устойчиво поддерживаются.

2. Примеры автоколебательных систем

- Маятниковые часы (маятник получает импульс от механизма).
- Генераторы электрических колебаний (ламповые, транзисторные).
- Свисток, органная труба (подпитка колебаний потоком воздуха).
- Биологические ритмы (например, сердечные сокращения, дыхание).

3. Основные элементы автоколебательной системы

1. **Колебательная система** (например, механический маятник, LC-контур).
2. **Источник энергии** (механическая пружина, батарея, поток воздуха).
3. **Устройство обратной связи**, которое подводит энергию к системе в нужной фазе, компенсируя потери.

4. Релаксационные колебания

- Это особый тип автоколебаний, при которых процесс имеет **медленный накопительный этап и быстрый скачок**.
- Обычно форма сигнала далека от синусоиды (пилообразная, импульсная).

Примеры:

- мигание неоновой лампы;
- работа генератора импульсов на электронной лампе или транзисторе;
- сердечные ритмы, дыхательные циклы.

Характеристика: период релаксационных колебаний определяется временем медленного накопления энергии и моментом её быстрой разрядки.

Q: 21. *Что называют волновым движением? Какие силы должны действовать между частицами среды, чтобы в ней могли распространяться колебания?*

А: Волновое движение — это процесс распространения колебаний в пространстве, при котором переносится энергия (и импульс), но вещество среды при этом не переносится. Каждая частица среды лишь совершает колебания около своего положения равновесия, а возмущение передаётся соседним частицам.

2. Условия для распространения колебаний

Чтобы волна могла распространяться в среде, между её частицами должны действовать силы, которые:

- **стремятся вернуть частицу в равновесие** (силы упругости, давления, тяжести и др.);
- **связывают движение соседних частиц** (иначе колебание не будет передаваться).

То есть необходимы **силы взаимодействия** между частицами среды (упругие силы, силы давления, электромагнитные взаимодействия и т.п.), которые обеспечивают передачу энергии колебаний от одной частицы к другой.

Q: 22. *Какие волны называются продольными? поперечными? Объясните механизм распространения деформаций в каждом из этих случаев. Какие волны могут распространяться в твердых телах, жидкостях и газах?*

A:

1. Продольные волны

- **Определение:** частицы среды колеблются **вдоль направления распространения волны**.
- **Механизм:** в среде возникают **периоды сжатия и разрежения**. Сжатые участки передают давление на соседние, и волна распространяется дальше.
- **Примеры:** звуковые волны в воздухе, газах и жидкостях.

2. Поперечные волны

- **Определение:** частицы среды колеблются **перпендикулярно направлению распространения волны**.
- **Механизм:** возникает чередование участков **сдвиговых деформаций**; упругие силы, стремящиеся вернуть частицы в исходное положение, передают возмущение соседям.
- **Примеры:** волны на поверхности воды, электромагнитные волны, колебания в струне.

3. Где какие волны распространяются

- **В твёрдых телах:** возможны **оба типа** (продольные и поперечные), так как твёрдое тело сопротивляется как сжатию, так и сдвигу.
 - **В жидкостях и газах:** возможны **только продольные** волны, потому что они не обладают упругостью сдвига (не могут поддерживать поперечные деформации).
-

Q: 23. *Что можно сказать о переносе энергии упругой деформации и переносе массы при распространении механической волны?*

A:

1. Перенос энергии

- При распространении механической волны **переносится энергия упругой деформации и кинетическая энергия колебаний частиц.**
- Частицы среды совершают колебания около положения равновесия, но их взаимодействие передаёт энергию соседям → возмущение распространяется.
- Таким образом, **энергия волны перемещается вместе с волной.**

2. Перенос массы

- Масса среды **не переносится** вместе с волной.
 - Каждая частица лишь колеблется около своей равновесной точки, выполняя движение вперёд-назад (продольные) или вверх-вниз (поперечные), но **не смещается на большие расстояния.**
 - В среднем перемещение массы отсутствует — переносится только энергия.
-

Q: 24. *Объясните качественно зависимость скорости упругих волн от модуля Юнга (модуля сдвига) и плотности среды.*

A:

1. Что определяет скорость волны?

Скорость распространения механической волны зависит от двух факторов:

- **упругость среды** (способность сопротивляться деформации),

- **инертность среды** (масса/плотность частиц, которые нужно разгонять).

2. Продольные волны (звук в твёрдом теле, жидкостях, газах)

Для стержня или твёрдого тела:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E — модуль Юнга (характеризует упругость при растяжении/сжатии), ρ — плотность.

- Чем больше E , тем быстрее волна (среда «жестче», быстрее восстанавливает форму).
- Чем больше ρ , тем медленнее волна (частицы тяжелее, труднее разогнать).

3. Поперечные волны (в твёрдых телах)

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где G — модуль сдвига.

- Чем больше G , тем выше скорость поперечной волны.
- Чем больше плотность ρ , тем меньше скорость.

4. Качественный вывод

- **Жёсткие, но лёгкие материалы** (например, сталь по сравнению с резиной) → высокая скорость волн.
- **Мягкие или плотные материалы** → низкая скорость.

Q: 25. В чем состоит различие между гармоническими колебаниями и волновым процессом? Запишите уравнение плоской монохроматической волны, дайте определение физических характеристик волны. Какова связь между этими величинами?

A:

1. Гармонические колебания vs волновой процесс

- **Гармонические колебания** — это периодические изменения физической величины (смещения, скорости, давления и т. п.) во времени около положения равновесия в **одной точке**.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

- **Волновой процесс** — это распространение колебаний в пространстве: возмущение от одной точки передаётся другим → возникает пространственно-временной процесс.

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi).$$

2. Уравнение плоской монохроматической волны

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где:

- A — амплитуда колебаний,
- $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота,
- f — частота,
- $T = \frac{1}{f}$ — период,
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число,
- λ — длина волны,
- v — фазовая скорость волны.

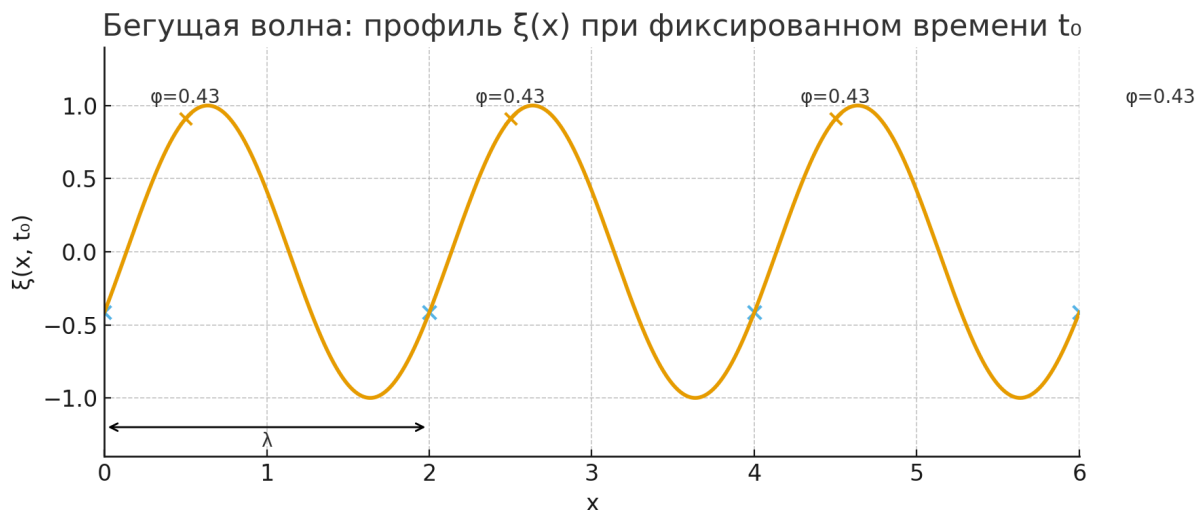
3. Связь характеристик волны

Основное соотношение:

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda f.$$

Q: 26. Нарисуйте график зависимости координат точек среды, в которой распространяется бегущая волна, от расстояния до источника волны. На каком расстоянии друг от друга находятся соседние точки среды, которые колеблются в одинаковых фазах?

A: График профиля бегущей волны $\xi(x, t_0)$ готов. Соседние точки, колеблющиеся в одинаковых фазах, разделены расстоянием **одна длина волны** λ (и вообще $n\lambda$, $n \in \mathbb{Z}$).



Q: 27. Что называется фронтом волны? Чем отличается фронт волны от волновой поверхности? Какие волны называются плоскими, сферическими? Приведите примеры.

A:

1. Фронт волны

Фронт волны — геометрическое место точек, до которых дошло возмущение в данный момент времени.

- Иначе говоря, это граница раздела между «возмущённой» и «невозмущённой» частями среды.
- Обычно фронт изображают как поверхность, движущуюся со скоростью распространения волны.

2. Волновая поверхность

Волновая поверхность — геометрическое место точек, которые колеблются в **одной и той же фазе**.

- В отличие от фронта, это не граница области, а совокупность «фазово-синхронных» точек.

Фронт волны всегда является **частным случаем волновой поверхности**, которая соответствует определённой фазе (например, началу возмущения).

3. Типы волн

- **Плоские волны** — волновые поверхности представляют собой параллельные плоскости.
 - ▶ Пример: электромагнитная волна, распространяющаяся от антенны вдоль определённого направления; акустическая волна в узкой трубе.
 - **Сферические волны** — волновые поверхности представляют собой концентрические сферы с центром в источнике.
 - ▶ Пример: звук от точечного источника (хлопок, взрыв); волны на воде от падающей капли.
-

Q: 28. Что называют фазовой и групповой скоростями? Чем вызвано их различие? Могут ли эти скорости совпадать? Что называют дисперсией волн?

A:

1. Фазовая скорость

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k}$$

— скорость распространения **отдельной фазы** (например, гребня, впадины) гармонической волны.

2. Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$$

— скорость распространения огибающей суперпозиции волн (волнового пакета), т. е. скорость переноса энергии и информации.

3. Причина различия

- Различие фазовой и групповой скоростей возникает, если **частота зависит от волнового числа** $\omega = \omega(k)$ не линейно.
- Это связано с тем, что разные гармонические компоненты распространяются с разными скоростями.

4. Когда они совпадают?

- Если среда **недисперсионная**, т. е. $\omega \propto k$ (линейная зависимость).

- Пример: электромагнитные волны в вакууме — там $v_{\text{ф}} = v_{\text{гр}} = c$.

5. Дисперсия волн

Дисперсия — это зависимость фазовой скорости (или частоты) от длины волны (или волнового числа):

$$v_{\text{ф}} = v_{\text{ф}}\lambda \quad \text{или} \quad \omega = \omega(k).$$

- В дисперсионных средах $v_{\text{ф}} \neq v_{\text{гр}}$.
- Примеры:
 - ▶ свет в стекле (разные цвета распространяются с разными скоростями),
 - ▶ поверхностные гравитационные волны на воде,
 - ▶ волны в волноводах.

Q: 29. Как образуются стоячие волны? Перечислите свойства, которые отличают стоячую волну от бегущей. Что называют узлами и пучностями смещений в стоячей волне?

A:

1. Образование стоячих волн

Стоячая волна возникает при **наложении (интерференции) двух встречных волн** одинаковой частоты, амплитуды и скорости. Чаще всего — это падающая и отражённая волна в ограниченной системе (струна, труба, столб воздуха).

Математически:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx), \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kx).$$

Сумма:

$$\xi(x, t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t).$$

2. Отличия стоячей волны от бегущей

- **Нет переноса энергии вдоль среды** (энергия «колеблется» локально).
- **Амплитуда колебаний зависит от координаты:** в одних точках смещения всегда нулевые, в других — максимальные.

- **Нет движения волнового фронта**, как в бегущей волне; остаётся лишь чередование узлов и пучностей.

3. Узлы и пучности

- **Узлы** — точки, где $\cos(kx) = 0 \rightarrow$ смещение всегда равно нулю.
- **Пучности** — точки, где $|\cos(kx)| = 1 \rightarrow$ амплитуда максимальна.

Расстояние между соседними узлами или пучностями равно $\frac{\lambda}{2}$.

Q: 30. В чем заключается суть эффекта Доплера? Запишите формулу частоты воспринимаемого звука для случая неподвижного источника и движущегося наблюдателя; неподвижного наблюдателя и движущегося источника. Приведите примеры проявления эффекта Доплера для механических волн.

A:

1. Суть эффекта Доплера

Эффект Доплера — это изменение частоты и длины волны, воспринимаемой наблюдателем, если источник и наблюдатель движутся относительно друг друга.

- Если они сближаются \rightarrow воспринимаемая частота выше.
- Если удаляются \rightarrow воспринимаемая частота ниже.

2. Формулы для звука

Пусть:

- f — частота источника,
- v — скорость звука в среде,
- $v_{\text{набл}}$ — скорость наблюдателя (считается положительной при движении к источнику),
- $v_{\text{ист}}$ — скорость источника (положительная при движении к наблюдателю).

(а) Неподвижный источник, движется наблюдатель

$$f' = f \left(1 \pm \frac{v_{\text{набл}}}{v} \right),$$

где «+» — при движении навстречу источнику, «-» — при удалении.

(б) Неподвижный наблюдатель, движется источник

$$f' = f \cdot \frac{v}{v \mp v_{\text{ист}}},$$

где «-» в знаменателе — источник движется к наблюдателю, «+» — от него.

3. Примеры проявления эффекта Доплера для механических волн

- Изменение тона сирены проезжающей машины или поезда.
- Изменение звука скорой помощи при приближении и удалении.
- Изменение частоты звука пропеллера или винта самолёта при пролёте мимо.

Основы специальной теории относительности (СТО)

Q: 1. В чем различие ньютоновских представлений о пространстве и времени в классической механике и представлений об этих формах существования материи в специальной теории относительности?

A: 1. Ньютоновские представления (классическая механика)

- **Пространство** — абсолютное, существует само по себе, одинаково для всех наблюдателей.
- **Время** — абсолютное, течёт одинаково и независимо от движения наблюдателя или тел.
- Пространство и время рассматриваются **раздельно**.
- Преобразования Галилея:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

2. Представления в специальной теории относительности (СТО)

- **Пространство и время** — взаимосвязанные, образуют единое **пространственно-временное континуум** (4-мерное пространство Минковского).
- **Время не абсолютно**: интервалы времени зависят от движения наблюдателя (эффект замедления времени).
- **Пространство не абсолютно**: длины зависят от движения (эффект сокращения длин).
- Законы природы инвариантны относительно **преобразований Лоренца**, а не Галилея:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

3. Сравнение

Характеристика	Классическая механика (Ньютон)	СТО (Эйнштейн)
Пространство	Абсолютное, одинаково для всех	Относительно, зависит от системы отсчёта
Время	Абсолютное, одинаково для всех	Относительно, зависит от движения

Связь	Независимы друг от друга	Единый континуум «пространство–время»
Преобразования	Галилея	Лоренца
Предельная скорость	Не ограничена	Существует предел – скорость света c

Q: 2. *Сформулируйте первый и второй постулаты Эйнштейна. Как эти постулаты подтверждаются преобразованиями Лоренца? Как связаны между собой эти преобразования с преобразованиями Галилея?*

A: 1. **Постулаты Эйнштейна (специальная теория относительности)**

- 1. Принцип относительности** Законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта. → Ни одна ИСО не является «привилегированной».
- 2. Постулат постоянства скорости света** Скорость света в вакууме одинакова для всех инерциальных систем отсчёта и не зависит от скорости движения источника или наблюдателя:

$$c = \text{const.}$$

2. Как эти постулаты связаны с преобразованиями Лоренца

- **Принцип относительности** → преобразования координат должны обеспечивать одинаковый вид физических законов (например, уравнений Максвелла) во всех ИСО.
- **Постоянство скорости света** → в любых ИСО световой фронт подчиняется уравнению:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Чтобы это условие сохранялось, преобразования между системами должны быть **именно преобразованиями Лоренца**:

$$\begin{aligned}
 x' &= \gamma(x - vt), \\
 y' &= y, \\
 z' &= z, \\
 t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.
 \end{aligned}$$

3. Связь преобразований Лоренца и Галилея

- При малых скоростях $v \ll c$:

$$\gamma \approx 1, \quad t' \approx t,$$

и преобразования Лоренца переходят в **преобразования Галилея**:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Q: 3. *Времениподобным или пространственноподобным является интервал между стартом и возвращением космического корабля?*

A: 1. Интервал в СТО

Интервал между событиями в пространстве-времени:

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2,$$

где Δt — разность времен, Δr — пространственное расстояние между событиями.

- Если $s^2 > 0 \rightarrow$ интервал **времениподобный** (события можно связать причинно).
- Если $s^2 < 0 \rightarrow$ интервал **пространственноподобный** (события нельзя связать сигналом со скоростью $\leq c$).
- Если $s^2 = 0 \rightarrow$ интервал **светоподобный**.

2. События: старт и возвращение корабля

- Пространственные координаты **совпадают** (старт и возвращение происходят в одной точке, например, на Земле):

$$\Delta r = 0.$$

- Временной интервал $\Delta t > 0$.

Тогда:

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 > 0.$$

Q: 4. Предположим, что скорость света стала бесконечно большой. Что произошло бы при этом с предсказаниями теории относительности по поводу сокращения длины и замедления времени?

A: 1. Напомним эффекты СТО

• **Замедление времени:**

$$\Delta t' = \gamma \Delta t, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

• **Сокращение длины:**

$$L' = \frac{L}{\gamma}.$$

2. Пусть $c \rightarrow \infty$

- Тогда $\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 0$.
- Следовательно:

$$\gamma \rightarrow 1.$$

3. Последствия

- **Замедление времени исчезает:** $\Delta t' = \Delta t$. Время становится абсолютным.
 - **Сокращение длины исчезает:** $L' = L$. Пространство становится абсолютным.
-

Q: 5. Какие вам известны величины, сохраняющиеся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой?

A: Сохраняющиеся величины при переходе от одной ИСО к другой

При преобразованиях Лоренца (или Галилея в классическом пределе) **формы законов физики** и некоторые физические величины остаются неизменными.

1. В классической механике (преобразования Галилея):

- **Время:** $t' = t$.
- **Масса:** постоянна и не зависит от скорости.
- **Расстояния между точками в один и тот же момент времени** (в пределах абсолютного пространства).
- **Импульс и энергия** сохраняются в замкнутых системах при любых переходах.

2. В специальной теории относительности (преобразования Лоренца):

- **Интервал в пространстве-времени:**

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- **Скорость света c .**
- **Собственное время** между событиями на мировой линии.
- **Собственная длина** (в системе, связанной с телом).
- **Масса покоя** частицы.
- **Законы сохранения энергии, импульса и заряда.**

Q: 6. Две частицы удаляются в противоположные стороны от некоторого наблюдателя со скоростью $v = \frac{3}{5}c$ каждая. Каков модуль их относительной скорости?

A: Ответ: $u_{\text{отн}} = \frac{15}{17}c \approx 0.882c$.

Пояснение: скорости вдоль одной прямой составляются по СТО:

$$u_{\text{отн}} = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Здесь $u = v = \frac{3}{5}c$ (в противоположные стороны относительно наблюдателя), поэтому

$$u_{\text{отн}} = \frac{\frac{3}{5}c + \frac{3}{5}c}{1 + \frac{(\frac{3}{5}c)^2}{c^2}} = \frac{\frac{6}{5}c}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{\frac{6}{5}c}{\frac{34}{25}} = \frac{15}{17}c \approx 0.882c.$$

(Классическое сложение дало бы $> c$, что неверно.)

Q: 7. Полная энергия релятивистской частицы в n раз превышает ее энергию покоя. Каково отношение модуля импульса частицы к произведению ее массы на скорость света $\frac{p}{mc}$.

A:

$$\frac{p}{mc} = \sqrt{n^2 - 1}.$$

Обоснование: $E = nmc^2$, а $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \Rightarrow (pc)^2 = (n^2 - 1)(mc^2)^2 \Rightarrow p = mc\sqrt{n^2 - 1}$.

Q: 8. Чему равна производная энергии релятивистской частицы по ее импульсу $\frac{\partial E}{\partial p}$?

A: $\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} = v$.

Вывод: $E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \Rightarrow \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}}$. С учётом $v = \frac{pc^2}{E}$ получаем $\frac{dE}{dp} = v$.

Q: 9. К телу массой m в течение бесконечного периода времени приложена постоянная сила. Как изменяются со временем скорость и импульс этого тела?

A: Зависит от рамки (классика vs СТО).

Классическая механика (Ньютон)

$$\vec{F} = \text{const} \Rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}_0 + \vec{F}t, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}t.$$

И импульс, и скорость растут линейно (без ограничения).

Специальная теория относительности

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}_0 + \vec{F}t$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{p}c^2}{E} = \frac{\vec{p}(t)c}{\sqrt{\vec{p}(t)^2 + (mc)^2}}.$$

Импульс растёт линейно, а скорость **монотонно приближается к c** и никогда его не достигает.

Q: 10. Релятивистская частица движется со скоростью, при которой ее кинетическая энергия равна энергии покоя. Какую долю составляет ее скорость от скорости света в вакууме?

A: Когда $K = E_0$, то $\gamma - 1 = 1 \Rightarrow \gamma = 2$.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2 \Rightarrow 1 - \beta^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866.$$

Ответ: $v \approx 0.866c$.