

Домашняя работа. Доценников Никита

Электростатика. Постоянный ток.	1
№1	1
№2	3
№3	5
№4	7
№5	8
№6	9
Магнитостатика. Закон электромагнитной индукции Фарадея.	10
№1	10
№2	13
№3	14
№4	16
№5	17
№6	19

Электростатика. Постоянный ток.

№1

Система состоит из полусферы несущей равномерно распределённый заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 5 \text{ нКл/м}^2$. Рассчитать модуль напряжённости электростатического поля, создаваемого полусферой в её центре.

Решение:

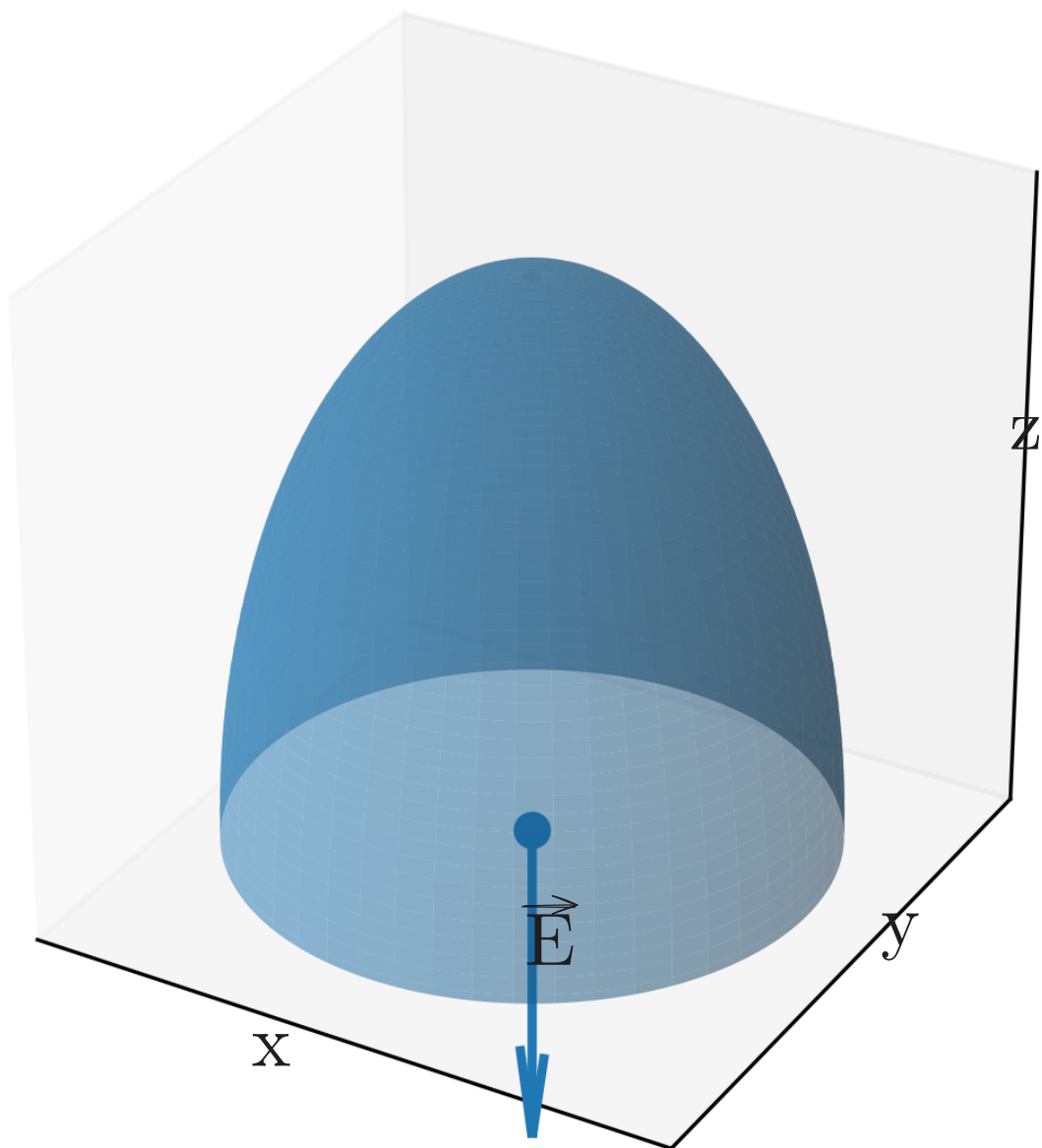


Рис. 1: Полусфера.

В системе СИ: $\sigma = 5 \text{ нКл/м}^2 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$.

В сферических координатах с центром в искомой точке. Зададим точку на сфере полярным углом $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и азимутальным $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда поверхностный элемент сферы dS равен:

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Элемент заряда dq равен:

$$dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Поле от элементарного заряда в центра по модулю равно:

$$dE = k \frac{dq}{R^2} = k \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R^2} = k\sigma \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Расписав составляющие:

$$dE_x = -k\sigma \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi,$$

$$dE_y = -k\sigma \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi,$$

$$dE_z = -k\sigma \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

Проинтегрировав по всей полусфере, получим:

$$E_x = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dE_x = -\sigma k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi.$$

Так как $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$, то $E_x = 0$. (Аналогично $E_y = 0$). Остается только z -компонента:

$$E_z = E = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dE_z = -\sigma k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = k\sigma \cdot (2\pi) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Подставив числа, получим:

$$E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \approx 141.2 \text{ В/м} \approx 0.14 \text{ кВ/м}.$$

Ответ: $E \approx 0.14 \text{ кВ/м}$.

№2

Система представляет собой область пространства заполненного зарядом с объёмной плотностью $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, где ρ_0 и α – положительные постоянные, а r – расстояние от центра системы. Найти модуль напряжённости электростатического поля, как функцию r .

Решение:

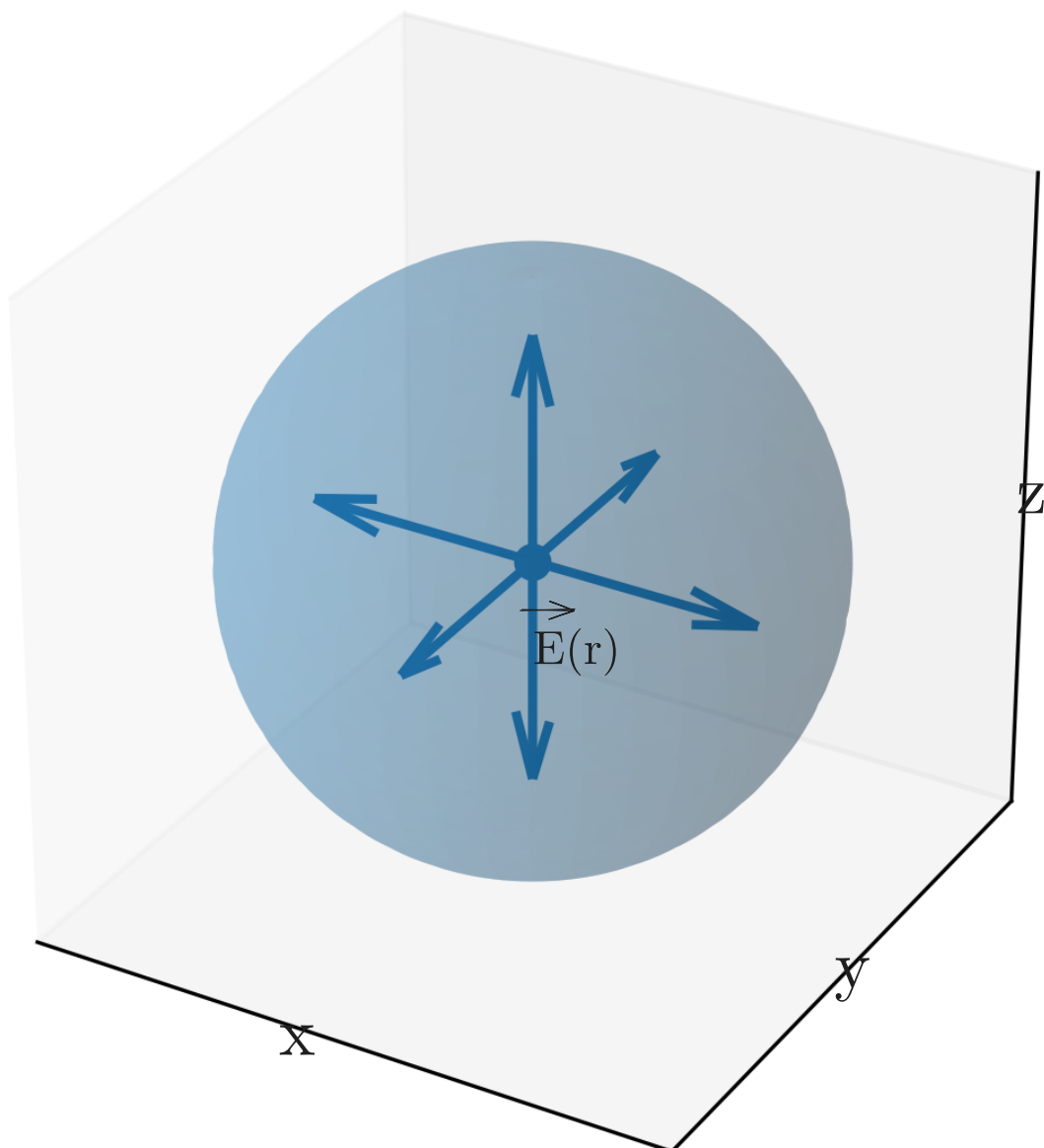


Рис. 2: Область пространства.

По закону Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{BH}}}{\varepsilon_0}$$

Система обладает сферической симметрией.

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{BH}}(r)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{\text{BH}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Заряд внутри радиуса r :

$$Q_{\text{BH}}(r) = \int_{V_r} \rho(r') dV = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi\rho_0 \int_0^r r'^2 e^{(-\alpha r')^3} dr'.$$

Пусть $u = \alpha r'^3$.

$$du = 3\alpha r'^2 dr' \Rightarrow r'^2 dr' = \frac{du}{3\alpha}$$

$$Q_{\text{вн}}(r) = 4\pi\rho_0 \cdot \frac{1}{3\alpha} \int_0^{\alpha r^3} e^{-u} du = \frac{4\pi\rho_0}{3\alpha} (1 - e^{-\alpha r^3})$$

Подставим в закон Гаусса:

$$E(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2} (1 - e^{-\alpha r^3})$$

Ответ: $E(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2} (1 - \exp(-\alpha r^3))$.

№3

Система состоит из равномерно заряженного шара радиуса $R = 20$ см. Рассчитать разность потенциалов между точками, лежащими на расстоянии $r_1 = 1$ см и $r_2 = 15$ см от центра шара. Объёмная плотность заряда $\rho = 10$ нКл/м³. Диэлектрическая проницаемость вещества из которого состоит шар $\varepsilon = 1$.

Решение:

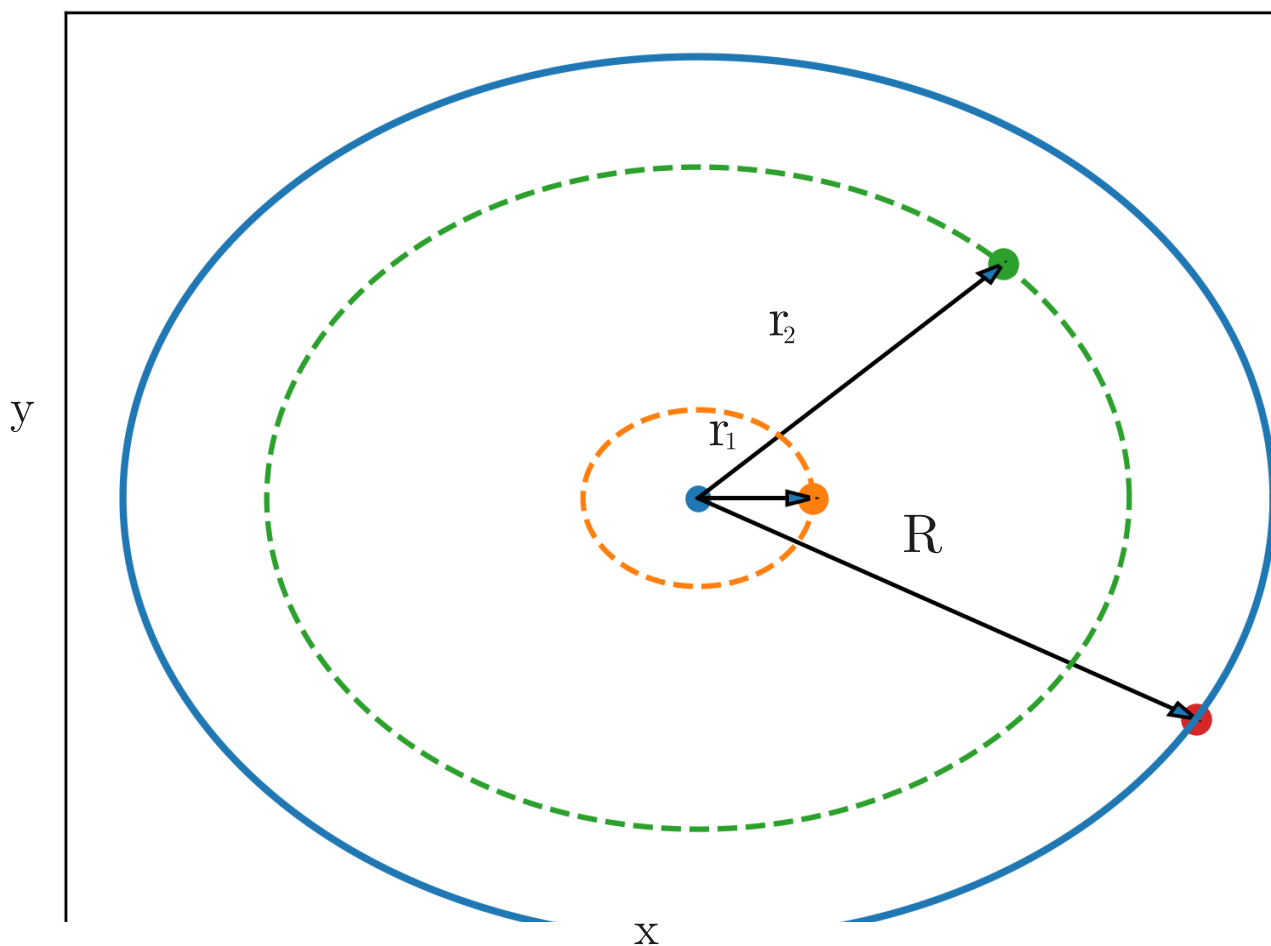


Рис. 3: Шар.

Для $r \leq R$ используем закон Гаусса. Заряд, заключенный в сфере, радиуса r :

$$Q_{\text{вн}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Поток через сферу радиуса r равен:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{вн}}}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда можно выразить $E(r)$:

$$E(r) = \frac{Q_{\text{вн}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Потенциал определяется как:

$$\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr$$

Подставив $E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$:

$$\Delta\varphi = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (r_2^2 - r_1^2)$$

Подставив числа, получим:

$$\Delta\varphi = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} (0.15^2 - 0.01^2) \text{В} \approx 4.2 \text{В}.$$

Ответ: $\Delta\varphi \approx 4.2 \text{В}$.

№4

Зазор между пластинами плоского конденсатора полностью плоская слюдяная пластинка ($\varepsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 2$ мм, и слой парафина ($\varepsilon_1 = 2$) толщиной $d_2 = 1$ мм. Рассчитать модули напряжённости электрического поля в обоих диэлектриках, если разность потенциалов между пластинами $U = 200 \text{В}$.

Решение:

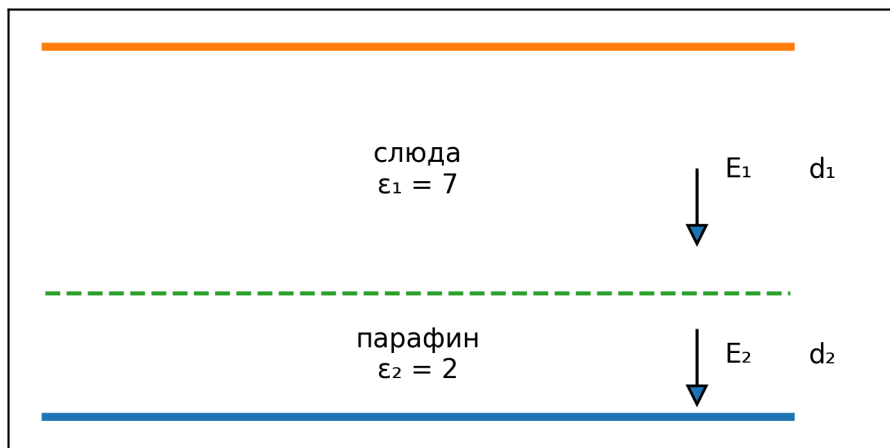


Рис. 4: Конденсатор.

При статическом поле в плоском конденсаторе нормальная компонента вектора электрической индукции \mathbf{D} одинакова во всех слоях:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2.$$

Отсюда получаем связь между полями:

$$\varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_{r2} E_2 \Rightarrow E_1 = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2.$$

Общая разность потенциалов U равна:

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2.$$

Подставив $E_1 = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2$, получим:

$$U = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2 d_1 + E_2 d_2 = E_2 \left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} d_1 + d_2 \right)$$

Выражая E_2 и E_1 :

$$E_2 = \frac{U}{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} d_1 + d_2}, \quad E_1 = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_2.$$

Подставим числа из условия:

$$E_1 \approx 3.64 \cdot 10^4 \text{ В/м} \approx 36.4 \text{ кВ/м}, E_2 \approx 1.27 \cdot 10^5 \text{ В/м} \approx 0.127 \text{ МВ/м}.$$

Ответ: $E_1 \approx 36 \text{ кВ/м}$, $E_1 \approx 0.13 \text{ МВ/м}$.

№5

На расстоянии $l = 1.5 \text{ см}$ от проводящей плоскости расположен точечный заряд $q = 100 \text{ мкКл}$. Рассчитайте работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы медленно удалить этот заряд от плоскости на бесконечность.

Решение:

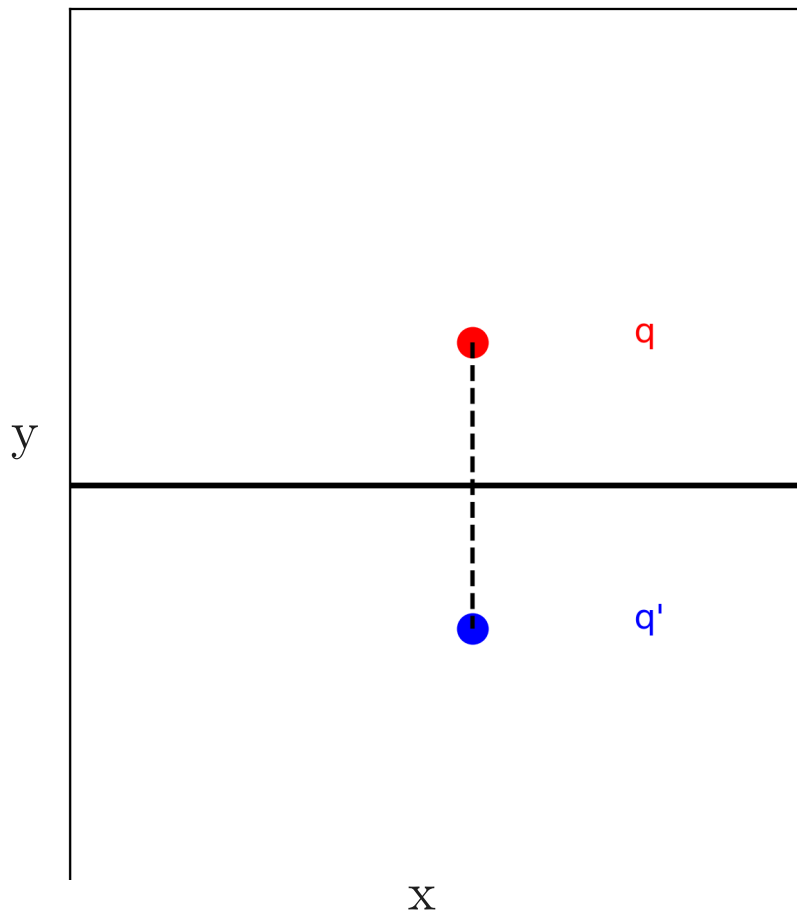


Рис. 5: Схема с проводящей плоскостью и зарядами.

В системе СИ: $l = 1.5 \text{ см} = 0.015\text{м}$, $q = 100 \text{ мкКл} = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$.

Реальный заряд q находится на расстоянии l от плоскости, а мнимый заряд $q' = -q$ находится на расстоянии l по другую сторону плоскости. Тогда обозначим за $r = 2l = 0.03\text{м}$.

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов U равна:

$$U = k \frac{qq'}{r} = -k \frac{q^2}{2l}$$

Чтобы удалить заряд в бесконечность, нужно сделать работу A :

$$A = -U = k \frac{q^2}{2l}$$

Подставив числа, получим:

$$A \approx 0.15 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

Ответ: $A \approx 0.15 \cdot 10^3 \text{ Дж}$.

№6

По прямому проводнику длина которого $l = 400\text{м}$ течёт постоянный ток, сила которого $I = 10\text{А}$. Рассчитать суммарный импульс электронов в проводнике.

Решение:

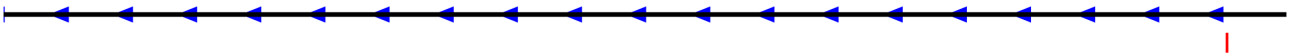


Рис. 6: Проводник с током.

Пусть v_d - дрейфовая скорость электронов. Тогда импульс всех электронов p равен:

$$p = Mv_d$$

где M - суммарная масса всех электронов в проводнике.

За время Δt электроны сдвигаются вдоль провода на расстояние:

$$\Delta x = v_d \Delta t.$$

Тогда объем, прошедший через сечение:

$$V = S \Delta x = S v_d \Delta t.$$

Если n - концентрация свободных электронов на метр кубический, то:

$$N = nV = nSv_d\Delta t$$

это число электронов, прошедших через сечение. Каждый электрон имеет заряд e по модулю, поэтому полный заряд ΔQ :

$$\Delta Q = Ne = neSv_d\Delta t.$$

По определению силы тока:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{neSv_d\Delta t}{\Delta t} = neSv_d.$$

Пусть площадь сечения - S . Тогда объем V равен:

$$V = Sl$$

и число электронов N :

$$N = nV = nSl.$$

Выразив дрейфовую скорость из $I = neSv_d$, получим:

$$v_d = \frac{I}{neS}$$

Тогда, подставив это в $p = Nm_ev_d$:

$$p = Nm_ev_d = (nSl)m_e \cdot \frac{I}{neS} = \frac{m_e Il}{e}$$

Подставим числа и получим:

$$p = \frac{3.644 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \approx 2.28 \cdot 10^{-8} \text{ Н/с}$$

Ответ: $p = 2.3 \cdot 10^{-8} \text{ Н/с}$.

Магнитостатика. Закон электромагнитной индукции Фарадея.

№1

Замкнутый контур с током имеет вид прямоугольника с диагональю $d = 16 \text{ см}$, угол между диагоналями $\alpha = 30^\circ$. Сила тока, протекающего по контуру $I = 5 \text{ А}$. Рассчитать модуль индукции магнитного поля в центре контура.

Решение:

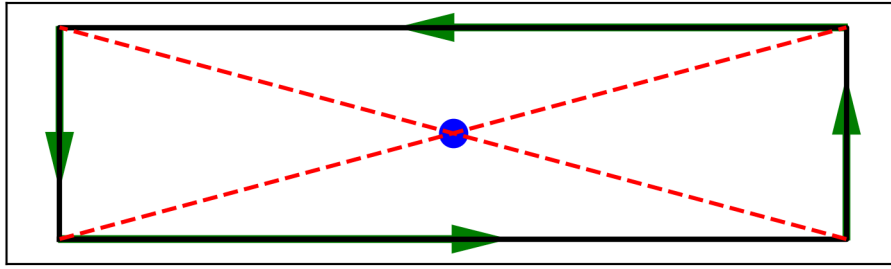


Рис. 7: Прямоугольный контур с током и его центр.

В системе СИ: $d = 16 \text{ см} = 0.16 \text{ м}$. Обозначим стороны прямоугольника a и b , тогда длина диагонали d равна:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Угол между диагоналями α выражается через a и b . Для векторов диагоналей $\mathbf{d}_1 = (a, b)$, $\mathbf{d}_2 = (a, -b)$ получим:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_1| |\mathbf{d}_2|} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

или

$$\frac{b}{a} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

Отсюда:

$$a = d \cos \frac{\alpha}{2}, \quad b = d \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$a = d \cos 15^\circ, \quad b = d \sin 15^\circ$$

По закону Био-Савара:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \varphi}{r^2},$$

где dl - элемент проводника, r - расстояние до точки наблюдения, φ - угол между направлением тока и направлением на точку наблюдения. Проводник лежит вдоль оси x , точка наблюдения на оси y . Тогда расстояние $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Угол φ между током и направлением на точку:

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}$$

После подстановки в закон Био-Савара:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx}{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{y dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

проинтегрировав по длине проводника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} y \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \left(\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y^2}} \right)$$

Обозначим углы до концов проводника:

$$\cos \theta_1 = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y^2}}, \quad \cos \theta_2 = \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}}$$

тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1).$$

По формуле разности косинусов:

$$\cos \theta_2 - \cos \theta_1 = 2 \sin \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

Но в точке на перпендикуляре можно воспользоваться более простым выражением:

$$\cos \theta_2 - \cos \theta_1 = \sin \theta_1 + \sin \theta_2$$

Так как точка находится напротив середины проводника, то $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Тогда:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \sin \theta$$

Для симметричного случая можно расписать $\sin \theta$ как:

$$\sin \theta = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}.$$

Для отрезка длины L на расстоянии y от его середины:

$$B_{\text{отр}} = \frac{\mu_0 I L}{4\pi y \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}.$$

Сумма вкладов двух противоположных сторон длины a :

$$B_a^{\text{sum}} = 2 \cdot \frac{\mu_0 I a}{4\pi \left(\frac{b}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} = \frac{\mu_0 I a}{\pi b \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}$$

Аналогично для сторон длины b :

$$B_b^{\text{sum}} = \frac{\mu_0 I b}{\pi a \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}$$

Сложив, получим:

$$\begin{aligned} B = B_a^{\text{sum}} + B_b^{\text{sum}} &= \frac{\mu_0 I}{\pi \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \frac{\mu_0 I}{\pi \frac{d}{2}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi d} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \frac{2\mu_0 I}{\pi d} \frac{2}{\sin \alpha} = \frac{4\mu_0 I}{\pi d \sin \alpha} \end{aligned}$$

Подставив числа, получим:

$$B = \frac{4(4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot 5}{\pi \cdot 0.16 \cdot 0.5} \approx 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ Т} = 0.1 \text{ мТ}.$$

Ответ: $B \approx 0.1 \text{ мТл}$.

№2

Два бесконечных прямых параллельных проводника разделены расстоянием $d = 20 \text{ см}$. По проводникам в противоположных направлениях текут токи $I_1 = I_2 = 10 \text{ А}$. Рассчитать модуль напряжённости магнитного поля в точке, равноудалённой от обоих проводников на расстояние $a = 20 \text{ см}$.

Решение: хз

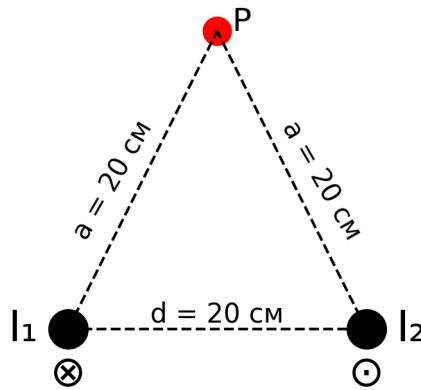


Рис. 8: Два параллельных проводника с противоположными токами.

Ответ: $H \approx 8 \text{ А/м}$.

№3

По проводу бесконечной длины, имеющего форму цилиндра радиуса R течёт постоянный ток, плотность которого зависит от расстояния до центра провода как $j = \alpha r e_z$. Рассчитать вектор магнитной индукции создаваемый током внутри и вне провода, как функцию r (магнитная проницаемость всюду равна 1).

Решение:

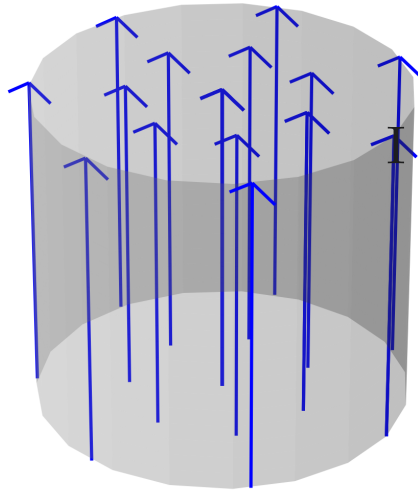


Рис. 9: Цилиндрический провод с током вдоль оси.

Для осесимметричного распределения удобно взять круговой контур радиуса r , с центром на оси цилиндра. Интеграл по контуру:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_{\varphi}(r)(2\pi r)$$

Закон Ампера:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{вн}}(r)$$

где $I_{\text{вн}}(r)$ - суммарный ток, пронизывающий поверхность, ограниченную контуром.

Отсюда:

$$B_{\varphi}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_{\text{вн}}(r)$$

Ток через круг радиуса r :

$$I_{\text{вн}}(r) = \iint_{S_r} j_z(r') dS = \int_0^r \int_0^{2\pi} (\alpha r') r' d\varphi dr'$$

$$I_{\text{вн}}(r) = \alpha \cdot 2\pi \int_0^r r'^2 dr' = \alpha \cdot 2\pi \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{2\pi \alpha r^3}{3}.$$

Магнитная индукция внутри $r < R$:

$$B_{\varphi}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{2\pi\alpha r^3}{3} = \frac{\mu_0\alpha r^2}{3}.$$

Магнитная индукция снаружи $r > R$:

$$I = I_{\text{вн}}(R) = \frac{2\pi\alpha R^3}{3}.$$

По закону Ампера для $r > R$:

$$B_{\varphi}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{2\pi\alpha R^3}{3} = \frac{\mu_0\alpha R^3}{3r}$$

Ответ: $B(r < R) = \frac{\mu_0\alpha r^2}{3}e_{\varphi}$, $B(r > R) = \frac{\mu_0\alpha R^3}{3r}e_{\varphi}$.

№4

В однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 0.4$ Тл перпендикулярно полю с постоянной скоростью влетает заряженная частица. В течении 6 мкс включается постоянное электрическое поле напряжённостью $E = 300$ В/м сонаправленно магнитному полю. Рассчитать шаг винтовой траектории частицы после выключения электрического поля.

Решение: По формуле силы Лоренца:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

До включения электрического поля:

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Поскольку $\mathbf{b} \perp \mathbf{B}$, частица движется по окружности

$$F_{\text{маг}} = qvb.$$

Сила Лоренца равна центростремительной силе:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

Угловая частота:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

Когда включается электрическое поле вдоль магнитного поля, на частицу вдоль B действует $F = qE$. Соответственно вдоль оси B ускорение $a = \frac{qE}{m}$.

За время Δt скорость вдоль оси становится:

$$v = a\Delta t = \frac{qE}{m}\Delta t$$

После выключения электрического поля частица летит в магнитном поле с постоянной перпендикулярной скоростью и параллельной, то есть по винтовой траектории.

Расстояние за один оборот:

$$h = vT,$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$ - период кругового движения.

Подставим:

$$h = vT = \frac{qE}{m}\Delta t \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi E\Delta t}{B}$$

Подставим числа:

$$h = \frac{2\pi \cdot 300 \text{ В/м} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ с}}{0.4 \text{ Тл}} \approx 0.28 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 0.28 \text{ м}$.

№5

Квадратная рамка со стороной $a = 70 \text{ см}$ помещена в магнитное поле так, что нормаль к рамке составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с направлением магнитного поля. Индукция магнитного поля меняется по закону $B = B_0 \cos \omega t$, где $B_0 = 0.2 \text{ Тл}$, $\omega = 6 \text{ с}^{-1}$. Рассчитать ЭДС индукции, возникающей в рамке в момент времени $t = 3 \text{ с}$.

Решение:

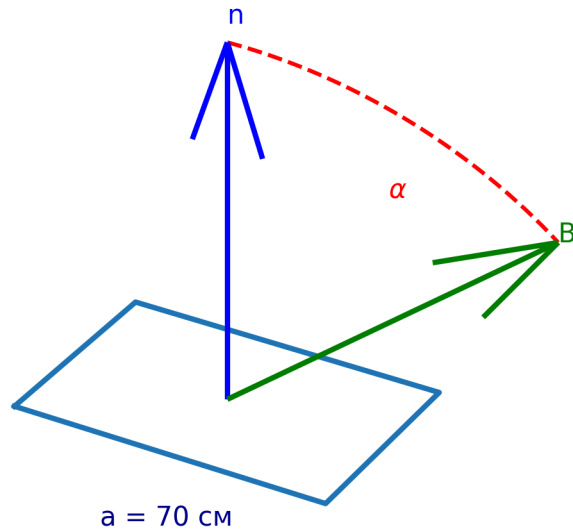


Рис. 10: Квадратная рамка в переменном магнитном поле.

ЭДС индукции определяется законом Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

где Φ - магнитный поток через рамку:

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \alpha$$

Площадь рамки $S = a^2$, α - угол между вектором магнитной индукции и нормалью к рамке.

Магнитный поток через рамку:

$$\Phi(t) = B(t)S \cos \alpha = B_0 \cos(\omega t) \cdot a^2 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[B_0 a^2 \cos \alpha \cos(\omega t)] = -B_0 a^2 \cos \alpha \frac{d}{dt} \cos(\omega t) \\ &= -B_0 a^2 \cos \alpha \cdot (-\omega \sin(\omega t)) = B_0 a^2 \omega \cos \alpha \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Подставляем числа:

$$\mathcal{E} = 0.2 \cdot (0.7)^2 \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin(6 \cdot 3) \approx -0.31 \text{ В}$$

Ответ: $\mathcal{E} = -0.31 \text{ В}$.

№6

Плотность витков в катушке $n = 25 \text{ см}^{-1}$. Рассчитать объёмную плотность энергии магнитного поля в катушке при токе $I = 2 \text{ А}$.

Решение: В системе СИ: $n = 25 \text{ см}^{-1} = 2500 \text{ м}^{-1}$.

По закону Ампера:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{внутри}}$$

Возьмем прямоугольный контур. Одна сторона внутри катушки длиной $l_{\text{внутри}}$, другая снаружи. Магнитное поле внутри $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B l_{\text{внутри}}$. Ток, охваченный контуром: $I_{\text{внутри}} = I \cdot N_{\text{охваченных витков}} = I n l_{\text{внутри}}$. Подставив в закон Ампера, получим:

$$B l_{\text{внутри}} = \mu_0 (n I l_{\text{внутри}}) \Rightarrow B = \mu_0 n I.$$

Энергия магнитного поля катушки:

$$W = \frac{1}{2} L I^2,$$

где L - индуктивность катушки.

По определению индуктивности:

$$L = \frac{\Phi}{I},$$

где Φ - магнитный поток через катушку.

Магнитный поток через все витки равен:

$$\Phi = N \cdot B \cdot S,$$

где N - число витков, S - площадь поперечного сечения, B - магнитное поле внутри катушки.

$$L = \frac{NBS}{I}.$$

Объем катушки $V = Sl$, число витков $N = nl$. Подставим:

$$L = \frac{nlBS}{I} = \frac{BnSl}{I}.$$

Тогда энергия равна:

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{BnSl}{I} I^2 = \frac{1}{2} BnISl$$

Объемная плотность энергии w равна:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\frac{1}{2}BnISl}{Sl} = \frac{1}{2}BnI$$

Подставим $B = \mu_0 nI$:

$$w = \frac{1}{2}(\mu_0 nI)nI = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

Подставим числа:

$$w = \frac{1}{2}4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (2500)^2 \cdot 2^2 = 2\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6.25 \cdot 10^6 \cdot 4 \approx 16 \text{ Дж/м}^3$$

Ответ: $w \approx 16 \text{ Дж/м}^3$.