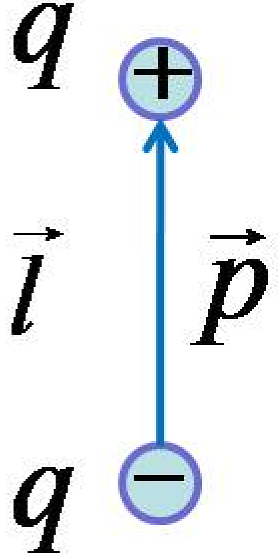
Электрический диполь.

Лекция 3.

Электрический диполь.

Диполем называются система из двух точечных электрических зарядов равных по величине и противоположных по знаку, находящихся на расстоянии l друг от друга. При этом точка, где изучается поле диполя должна быть удалена от зарядов на расстояние r, во много раз превосходящее расстояние между ними.

$$l \ll r$$

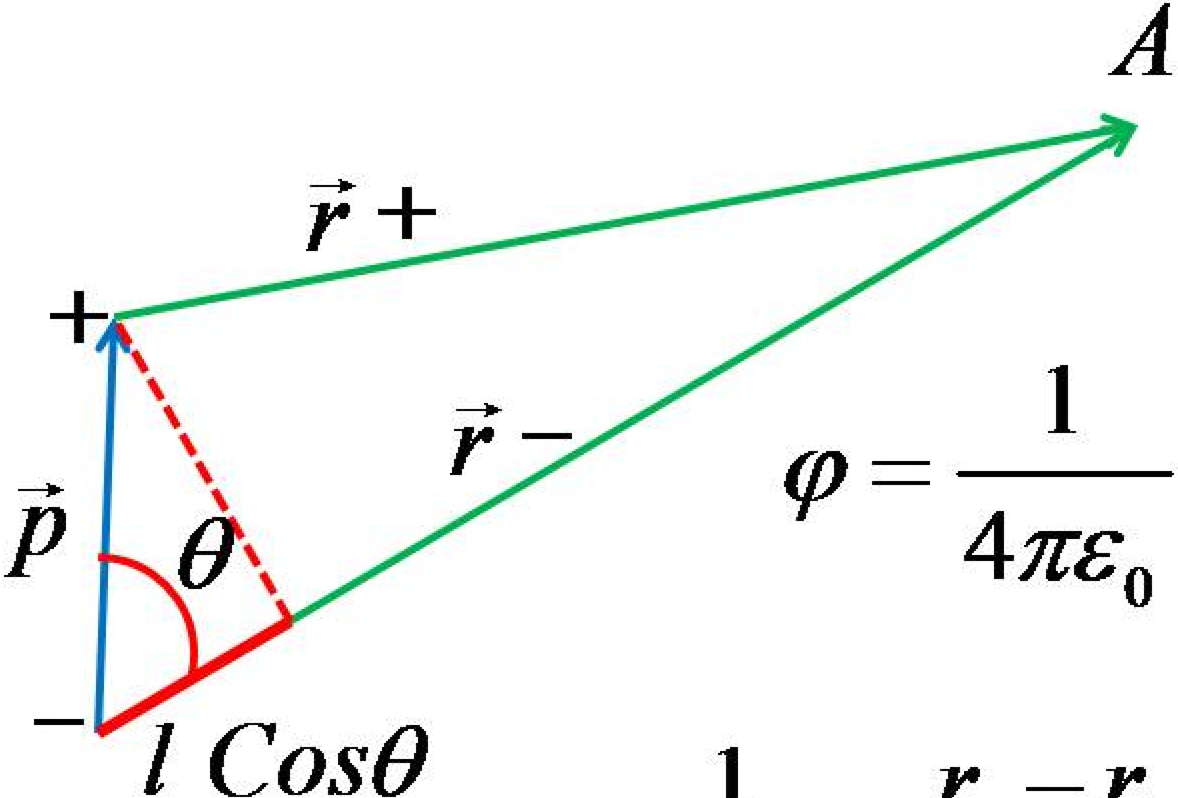


Дипольный момент

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{l}}$$

$$[\vec{p}] = Кл \cdot м$$

Потенциал поля диполя.



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{|q|}{r_-}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql Cos\theta}{r^2}$$

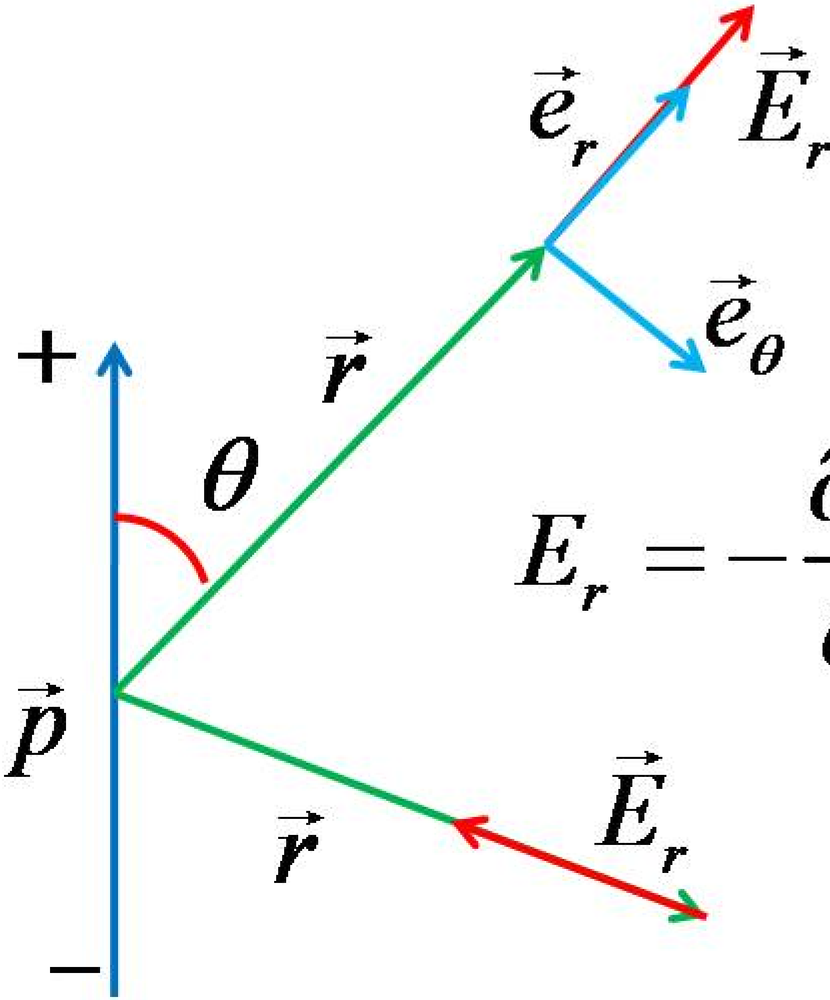
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pCos\theta}{r^2}$$

$$\theta < \pi/2 \qquad \varphi > 0$$

$$\theta > \pi/2 \qquad \varphi < 0$$

Потенциал поля диполя убывает пропорционально квадрату расстояния до диполя. Это быстрее, чем потенциал точечного заряда.

Напряжённость поля диполя.

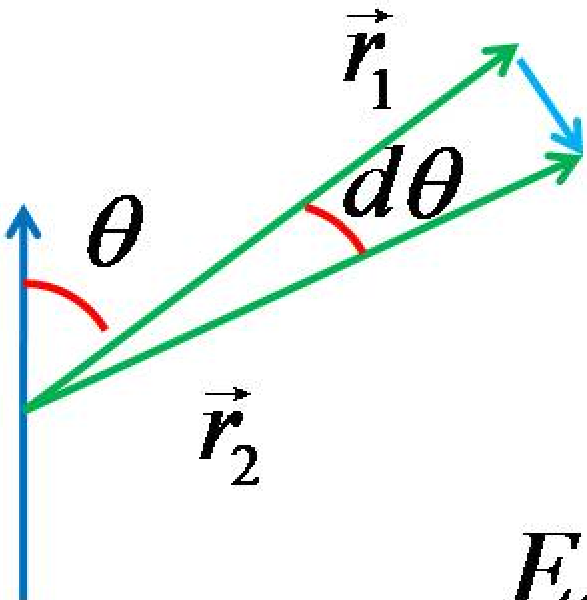


$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2pCos\theta}{r^3}$$

$\theta < \pi/2 \quad E_r > 0$

$\theta > \pi/2 \quad E_r < 0$

Приращение радиуса-вектора, перпендикулярное $\vec{e}_r$ *, равно* $r\cdot d\theta$



$$dr = r\cdot d\theta$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pSin\theta}{r^3}$$

$$E = \sqrt{E_r{}^2 + E_\theta{}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sqrt{1+3Cos^2\theta}}{r^3}$$

Пример. *На оси диполя*

$$\theta = 0 \qquad E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

$$\theta = \pi \qquad E_r = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

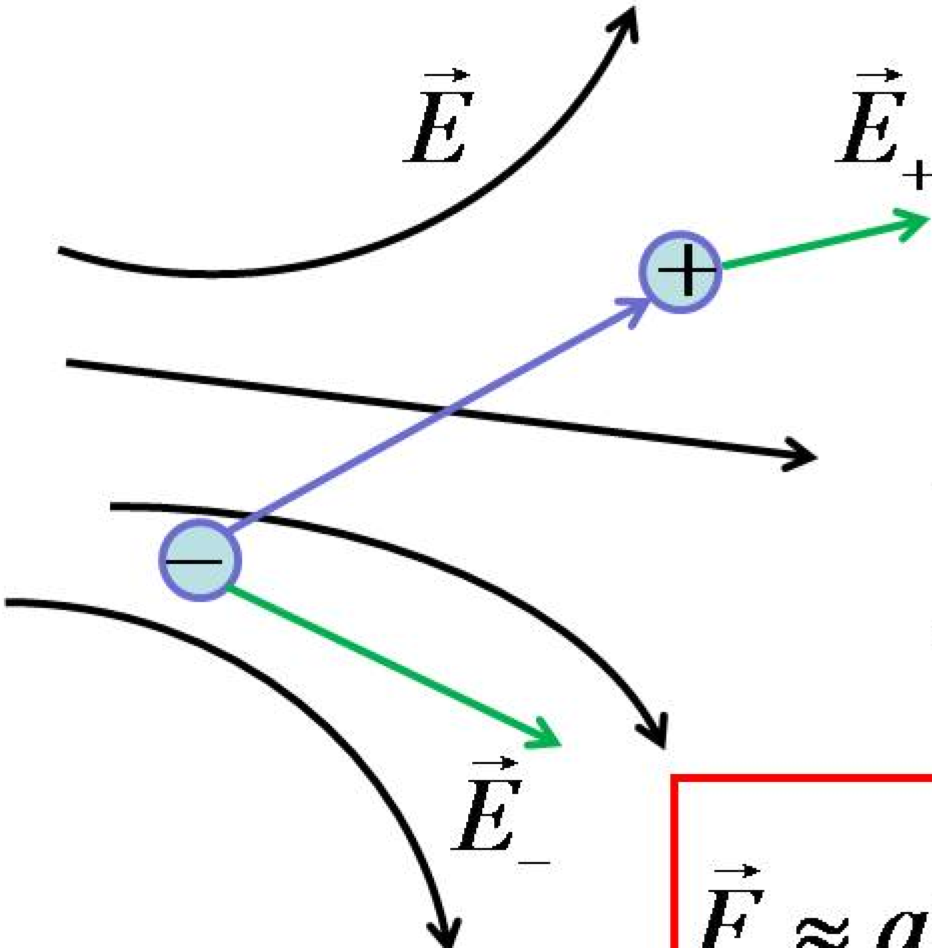
Универсальный вариант записи.

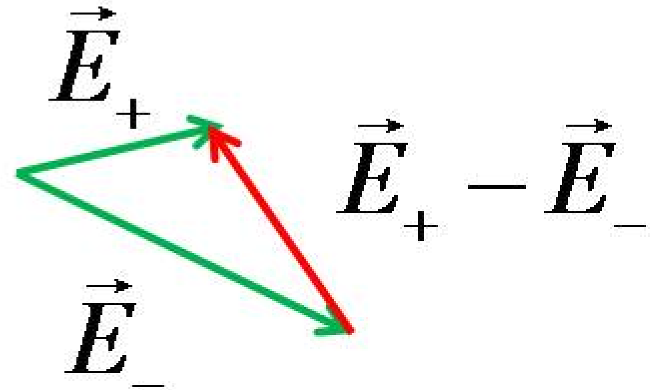
$$\vec{E}_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}$$

На линии, перпендикулярной оси диполя, проходящей через его середину

$$\theta = {}^{\pi}\!/_{2} \qquad\qquad E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$$

Сила, действующая на диполь в электрическом поле.





$$\vec{F} = q\vec{E}_+ - |q|\,\vec{E}_- =$$
$$= q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)$$

$$\boxed{\vec{F} \approx ql\,\frac{\Delta\vec{E}}{l} \approx ql\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial l} = q\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial\vec{l}}}$$

Это приращение вектора **E** *на отрезке равном длине диполя в направлении вектора* ***l***. *В математике эта операция называется производной от вектора* **E** *по вектору* ***l***.

Приращение напряжённости электрического поля можно представить как

$$d\vec{E} = l_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

Можно выбрать и другой вариант записи **F**. *Так как*

$$q \cdot l_x = p_x$$

$$\vec{F} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{p}}}$$

А считают это так:

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$F_y = p_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$F_z = p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

При решении задач из этой суммы остаётся, как правило, одно слагаемое.

Приведём и другие варианты записи производной вектора **E** *по вектору* ***p***

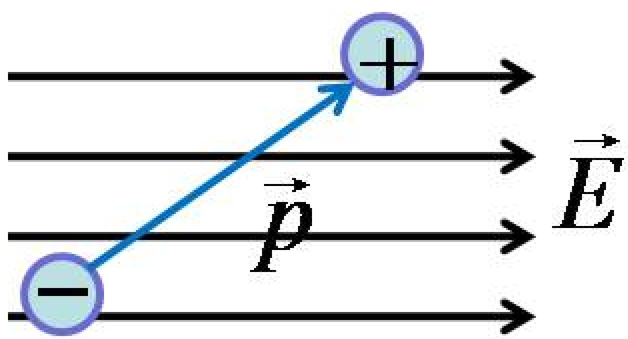
$$\boxed{\vec{F} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \left(\vec{p} \nabla \right) \cdot \vec{E}}$$

Таким образом, читая различные учебники, вы можете встретить все 4 варианта записи приведённые в красных рамках. А означают они то, что написано в зелёных рамках.

Пример. *Вычислите силу, действующую на диполь в однородном поле.*

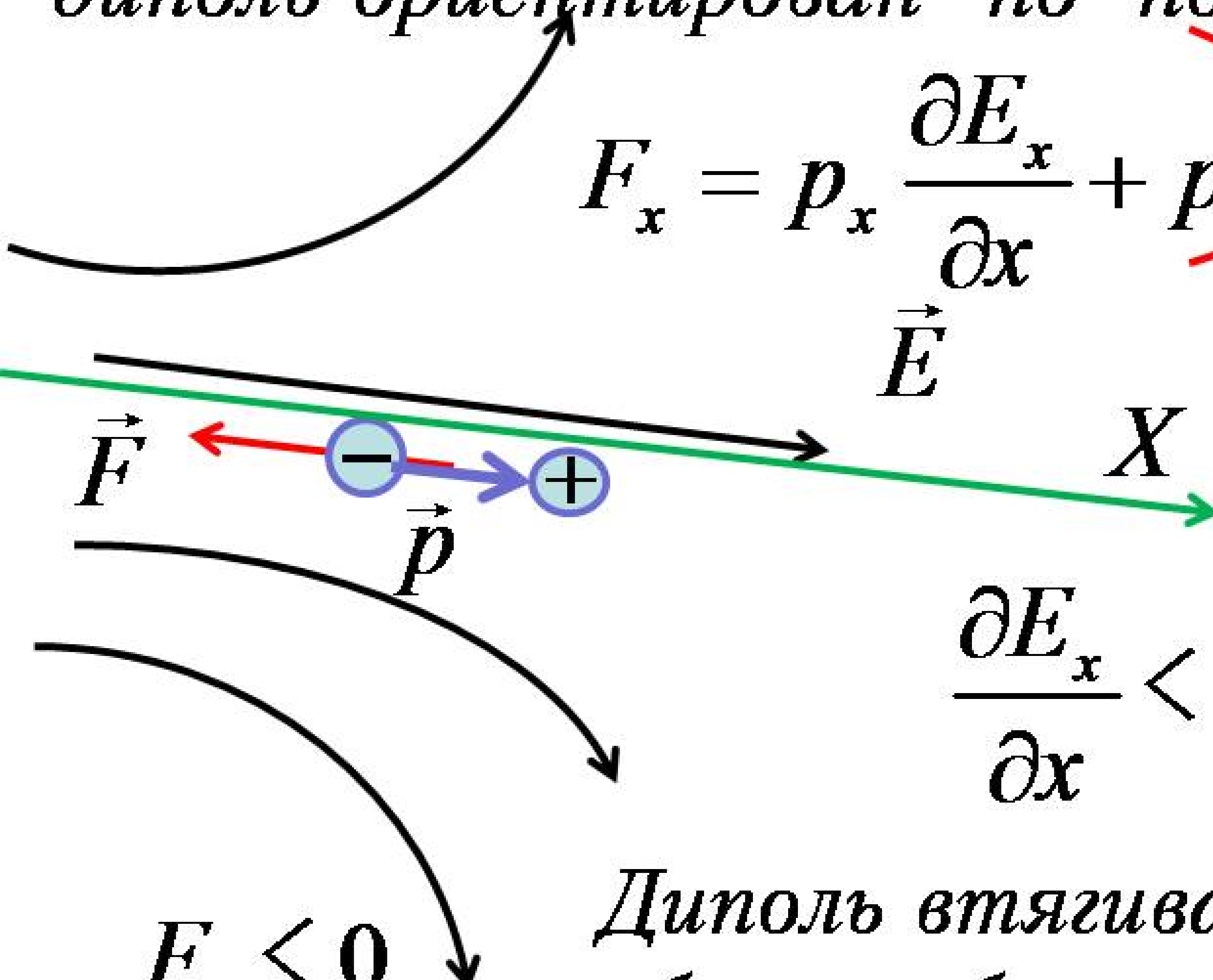
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{p}} = 0$$



$$F = 0$$

Пример. *Вычислите силу, действующую на диполь в неоднородном поле, если диполь ориентирован по полю.*

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + \cancel{p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}}$$



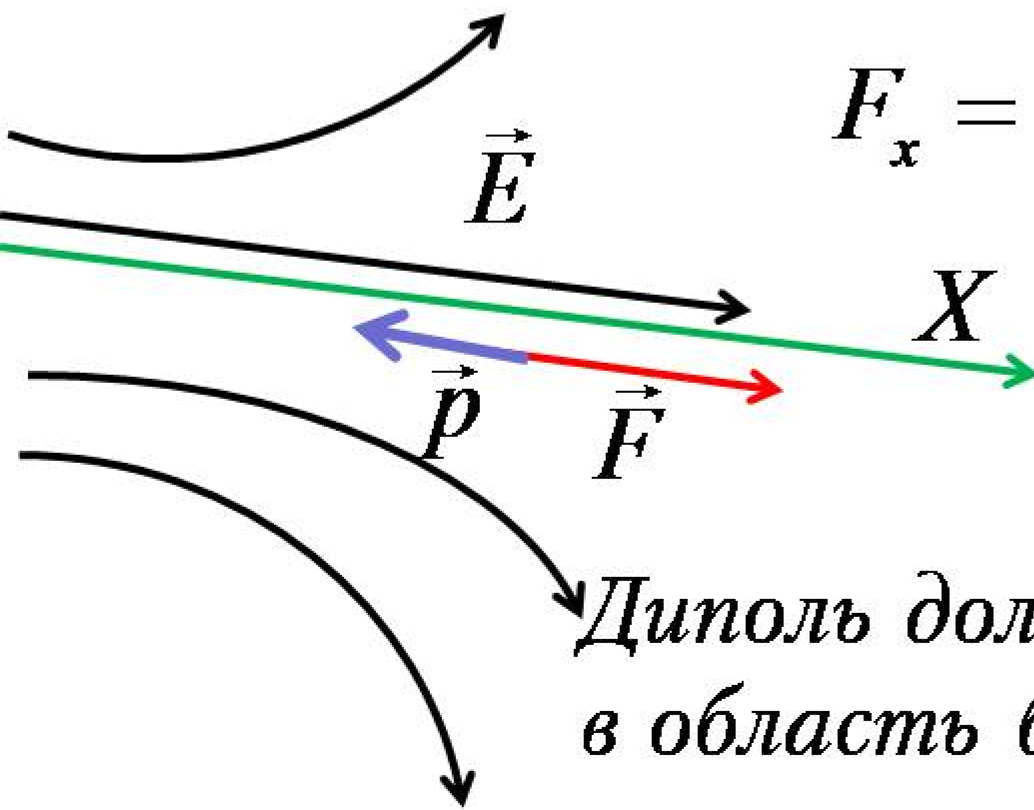
$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} < 0 \qquad p_x > 0$$

$$F_x < 0$$

Диполь втягивается в область более сильного поля

Пример. *Вычислите силу, действующую на диполь в неоднородном поле, если диполь ориентирован против поля.*

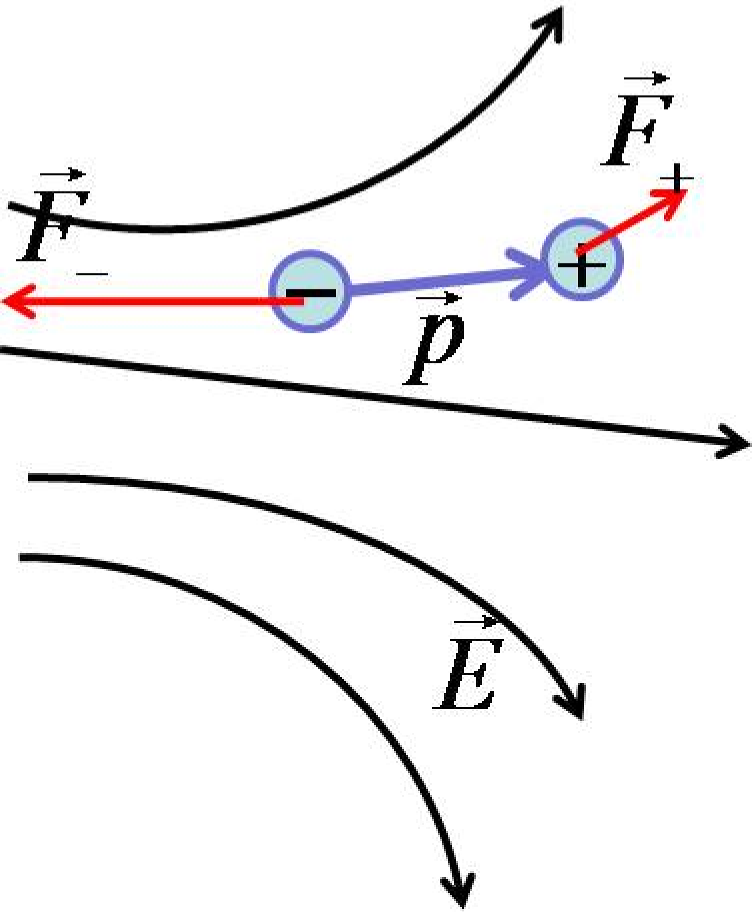


$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial x} < 0$$

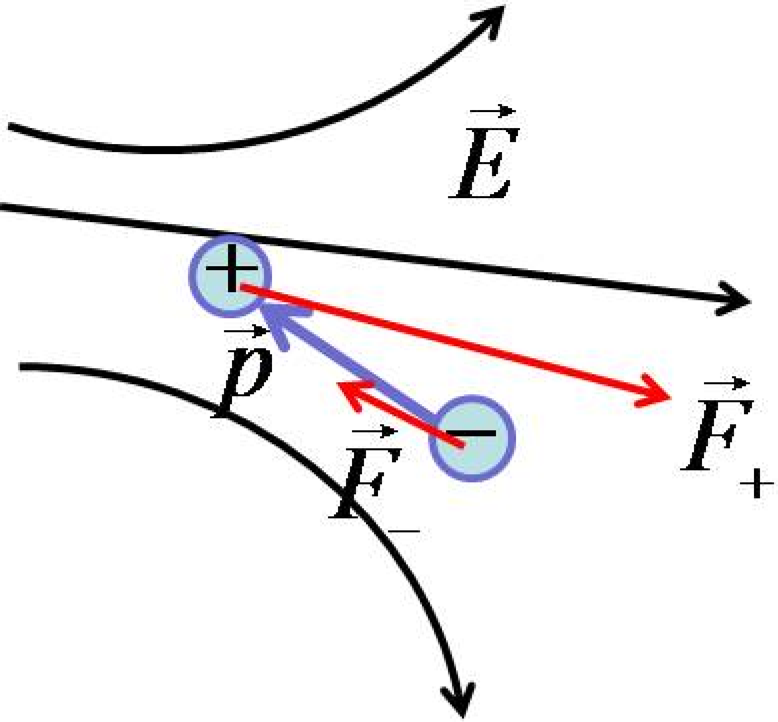
$$p_x < 0 \qquad F_x > 0$$

Диполь должен выталкиваться в область более слабого поля, но вы этого никогда не увидите, скоро скажу, почему

Разобрались со сложной математикой? А теперь **для тех, кто только что проснулся.**

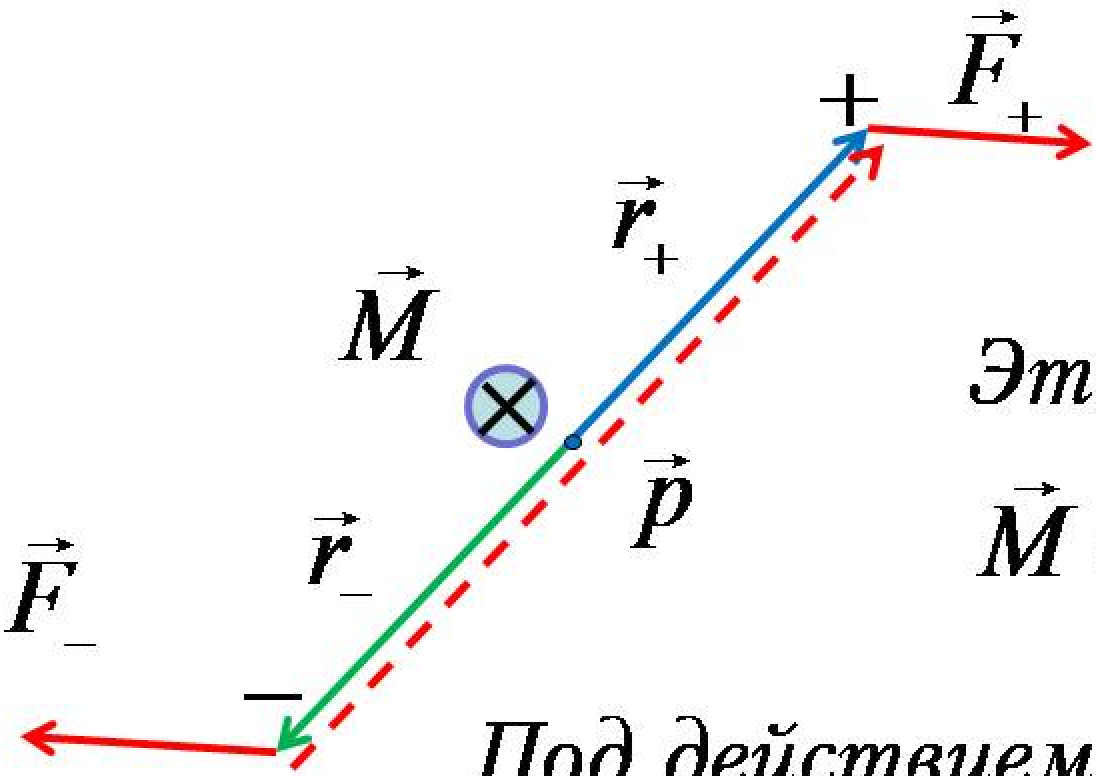


Если отрицательный заряд находится в поле с большей напряжённостью, то сила, действующая на него, больше, чем сила, действующая на положительный заряд, и диполь втягивается в область более сильного поля.



И наоборот, если положительный заряд находится в поле с большей напряжённостью, то сила, действующая на него , больше, чем сила, действующая на отрицательный заряд, и диполь должен выталкиваться в область более слабого поля .

Момент силы, действующий на диполь в электрическом поле.



В первом приближении

$$|\vec{F}_+| = |\vec{F}_-|$$

Это пара сил

$$\vec{M} = \left[\vec{l}, q\vec{E}\right] = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$$

Под действием вращающего момента дипольные моменты ориентируются вдоль поля.

Далее диполь втягивается в область более сильного поля. Если дипольный момент направлен навстречу полю, то при малейшем отклонении диполя от этого положения возникает момент сил, который разворачивает его в противоположную сторону.)
Устойчивое равновесие только в однородном поле, если диполь ориентирован по полю.

Энергия диполя в электрическом поле.

$$W = q_+\varphi_+ + q_-\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-)$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\partial \varphi}{\partial l} l$$

Вспомним, что $\vec{E} = -grad\varphi$ *тогда*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = -E_l$$

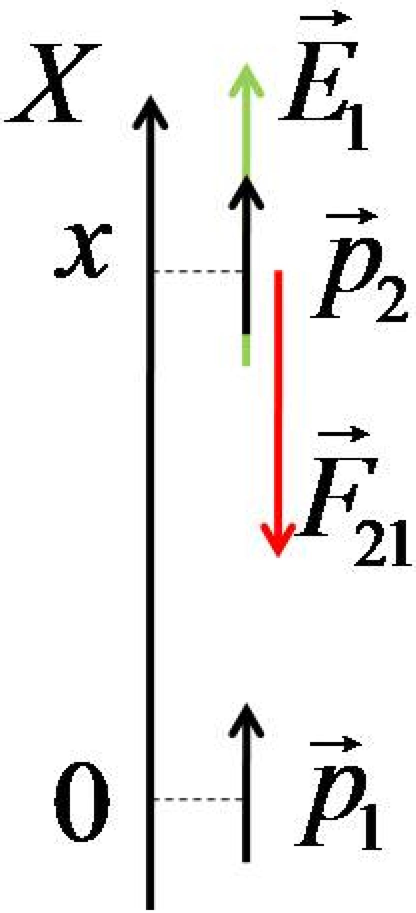
$$\varphi_+ - \varphi_- = -E_l l = -\vec{E} \cdot \vec{l}$$

скалярное произведение

$$\boxed{W = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

Минимальную потенциальную энергию диполь имеет в положении устойчивого равновесия, когда дипольный момент параллелен напряжённости электрического поля, максимальную- в положении неустойчивого равновесия.

Пример. *Найдите силу взаимодействия двух диполей с моментами p_1 и p_2, направленными вдоль одной прямой. Расстояние между диполями равно x.*



Будем описывать действие диполя с моментом p_1 на диполь с моментом p_2. Напряжённость поля, которое создаёт первый диполь в точке, где находится второй, равна

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_1}{x^3}$$

Проекция на ось Ох силы, действующей на второй диполь со стороны первого,

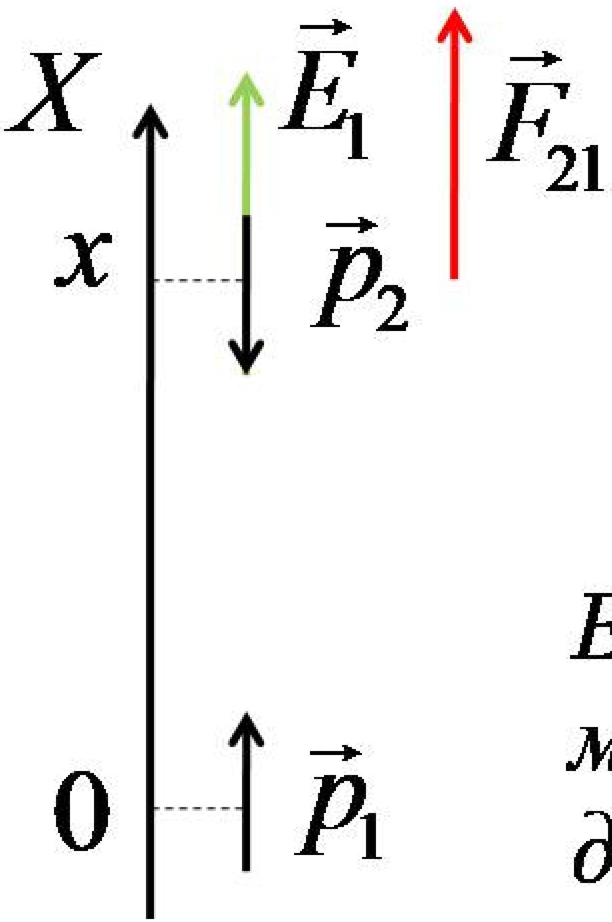
$$F_{21x} = \frac{\partial E_{1x}}{\partial x} p_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2 \cdot 3 p_1}{x^4} p_{2x} < 0$$

Если направления дипольных моментов совпадает, диполи притягиваются. (Вспомните опыт с крупинками манки в касторовом масле, находящимися в электрическом поле. Диполи выстраиваются в цепочки.)

Если дипольные моменты направлены навстречу друг другу, проекция на ось Ох силы, действующей на второй диполь со стороны первого,

$$F_{21x} = \frac{\partial E_{1x}}{\partial x} p_{2x} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2 \cdot 3 p_1}{x^4} p_{2x} > 0$$



Если направление дипольных моментов противоположно, диполи отталкиваются.