Задачи

Закон Кулона. Принцип суперпозиции

1. *На шелковой нити подвешен шар массы m, заряд которого q_1^+. Рассчитать на какое расстояние необходимо поднести положительно заряженный шар, с зарядом q_2^+, чтобы сила натяжения нити уменьшилась вдвое.*

Решение:

На шар действуют следующие силы:

- Сила тяжести: $F_g = mg$ (действует вниз)
- Сила натяжения нити: T (действует вдоль нити)
- Сила электрического отталкивания $F_e = k\frac{q_1 q_2}{l^2}$ (действует горизонтально, если шар q_2 подносят сбоку)

Теперь нить отклонилась на угол θ с вертикалью (под действием электрической силы).

Найдем компоненты:

- Вертикальная: $T\cos\theta = mg$
- Горизонтальная: $T\sin\theta = F_e = k\frac{q_1 q_2}{l^2}$

Так как натяжение нити уменьшилось вдвое: $T = \frac{mg}{2}$.

Подставим в вертикальную компоненту:

$$T\cos\theta = mg \Rightarrow \frac{mg}{2}\cos\theta = mg \Rightarrow \cos\theta = 2$$

Так как $\cos\theta$ не может быть больше 1, мы понимаем, что что-то не так...

Используем теорему Пифагора для сил:

$$T = \sqrt{(mg)^2 + F_e^2}$$

- Изначально $F_e = 0 \Rightarrow T_0 = mg$
- Теперь $T = \frac{mg}{2}$

$$T = \sqrt{(mg)^2 + F_e^2} = \frac{mg}{2} \Rightarrow F_e^2 + (mg)^2 = \left(\frac{mg}{2}\right)^2$$

$$F_e^2 = \left(\frac{mg}{2}\right)^2 - (mg)^2 = \frac{m^2g^2}{4} - m^2g^2 = -\frac{3m^2g^2}{4}$$

Получилось отрицательное число...

То есть:

$$F_e = T_0 - T = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2}$$

$$F_e = k\frac{q_1 q_2}{l^2} = \frac{mg}{2}$$

Отсюда:

$$l^2 = \frac{2kq_1q_2}{mg} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{2kq_1q_2}{mg}}$$

Ответ: $l = \sqrt{\frac{2kq_1^+q_2^+}{mg}}$

---

2. *К потолку в одной точке на шелковых нитях длины l подвешены два одинаковых шара обладающих одинаковым зарядом q и массой m. Раастояние между шарами $x \ll l$. Рассчитать скорость утечки зарядов $\frac{dq}{dt}$ с каждого шара, если скорость их сближения, как функция от x имеет виды: $v(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x}}$ (α - некоторая постоянная).*

Решение:

Для одного шарика вертикальная и горизонтальная составляющие сил дают:

- вертикальная: $T\cos\theta = mg$
- горизонтальная: $T\sin\theta = F_e$

где F_e - кулоновская сила отталкивания между шариками:

$$F_e = k\frac{q^2}{x^2}$$

При малом отклонении $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \frac{\frac{x}{2}}{l} = \frac{x}{2l}$ (смещение одного шарика по горизонтали равно $\frac{x}{2}$). Подставим $T \approx mg$ (поскольку $\cos\theta \approx 1$) в горизонтальное уравнение:

$$mg \cdot \frac{x}{2l} \approx F_e = k\frac{q^2}{x^2}$$

Отсюда найдем зависимость q от x:

$$k\frac{q^2}{x^2} = \frac{mgx}{2l} \Rightarrow q^2 = \frac{mg}{2kl}x^3$$

Значит

$$q(x) = \sqrt{\frac{mg}{2kl}}x^{\frac{3}{2}}$$

По цепному правилу:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Вычислим производную по x:

$$\frac{dq}{dx} = \sqrt{\frac{mg}{2kl}} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь используем заданную скорость. Поскольку $v(x)$ дана как модуль скорости сближения, скорость изменения расстояния x равна

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha}{\sqrt{x}}$$

Подставляем:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{mg}{2kl}}x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{3}{2}\alpha\sqrt{\frac{mg}{2kl}}$$

Ответ: $\frac{dq}{dt} = \frac{3\alpha}{2}\sqrt{\frac{mg}{2kl}}$

---

3. *Радиус векторы двух положительных зарядов q_1 и q_2 соответственно $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Рассчитать отрицательный заряд q_3 и его радиус-вектор $\vec{r}_3$*

точки в которую его надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из зарядов была равна 0.

Решение:

Чтобы сила на q_1 была нуль, векторная сумма сил от q_2 и q_3 на q_1 должна быть нулём. Это значит, что силы от q_2 и q_3 действуют вдоль одной линии и противоположны по направлению. Отсюда следует, что $\vec{r}_3$ лежит на прямой, проходящей через $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Аналогично для равновесия q_2. Поэтому $\vec{r}_3$ лежит на отрезке между $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$.

Пусть $L = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ — расстояние между первыми двумя зарядами. Обозначим

$$d_{13} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|, \quad d_{23} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|.$$

Тогда $d_{13} + d_{23} = L$

Уравнения равновесия

Сила Кулона по модулю между точками i и j (в масштабе k):

$$F_{ij} = k\frac{|q_i q_j|}{d_{ij}^2}.$$

Для заряда q_1: силы от q_2 и q_3 должны компенсировать друг друга, значит по модулю

$$k\frac{q_1 q_2}{L^2} = k\frac{q_1\ |q_3|}{d_{13}^2}.$$

Отсюда (сокращая k и q_1, $q_1 > 0$):

$$\frac{q_2}{L^2} = \frac{|q_3|}{d_{13}^2}.$$

Помня, что q_3 отрицателен, можно записать

$$q_3 = -q_2\frac{d_{13}^2}{L^2}. \qquad (1)$$

Аналогично для заряда q_2:

$$k\frac{q_1 q_2}{L^2} = k\frac{q_2\ |q_3|}{d_{23}^2},$$

откуда (сократив k и q_2):

$$\frac{q_1}{L^2} = \frac{|q_3|}{d_{23}^2} \quad \Rightarrow \quad q_3 = -q_1\frac{d_{23}^2}{L^2}. \qquad (2)$$

Приравняем правые части (1) и (2) — обе равны q_3:

$$-q_2\frac{d_{13}^2}{L^2} = -q_1\frac{d_{23}^2}{L^2} \quad \Rightarrow \quad q_2 d_{13}^2 = q_1 d_{23}^2.$$

Возвращаемся к параметризации расстояний: положим $d_{13} = t$. Тогда $d_{23} = L - t$. Подставим:

$$q_2 t^2 = q_1 (L-t)^2.$$

Возьмём корни (положительные, так как $t > 0$, $L - t > 0$):

$$\sqrt{q_2}, t = \sqrt{q_1}(L-t).$$

Решаем относительно t:

$$t\big(\sqrt{q_2} + \sqrt{q_1}\big) = \sqrt{q_1}L \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}L.$$

Теперь вернёмся к векторной форме: точка $\vec{r}_3$ находится на отрезке $\vec{r}_1 \to \vec{r}_2$ на расстоянии t от $\vec{r}_1$. Значит

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \frac{t}{L}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{r}_1 + \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Разворачивая:

$$\vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_1}\vec{r}_2 + \sqrt{q_2}\vec{r}_1}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}.$$

Наконец, подставим $\frac{t}{L} = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}$ в (1) для q_3:

$$q_3 = -q_2\left(\frac{t}{L}\right)^2 = -q_2\left(\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}\right)^2 = -\frac{q_1 q_2}{\big(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\big)^2}.$$

Ответ: $q_3 = -\frac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2})^2}, \vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_1}\vec{r}_2+\sqrt{q_2}\vec{r}_1}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}$

---

4. *Точечный заряд $q = 50$ мкКл расположен в точке с радиус-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Найти напряженность $\vec{E}$ электрического поля и ее модуль в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 8\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$. Координаты векторов заданы в метрах.*

Решение:

Найдём вектор $\vec{R}$ — радиус-вектор от заряда до точки наблюдения:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (8-2, -5-3) = (6, -8)\text{м}.$$

Длина вектора

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10\text{м}.$$

Постоянная Кулона (в СИ):

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8.9875517923 \times 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Поле точечного заряда:

$$\vec{E}(\vec{r}) = kq\frac{\vec{R}}{R^3}.$$

Вычислим по шагам.

1. $kq = 8.9875517923 \times 10^9 \cdot 50 \times 10^{-6} = 449377.589615.$
2. $R^3 = 10^3 = 1000.$
3. множитель перед вектором $\vec{R}$:

$$\frac{kq}{R^3} = \frac{449377.589615}{1000} = 449.377589615.$$

4. Компоненты поля:

$$E_x = 449.377589615 \cdot 6 = 2696.26553769 \text{ В/м},$$

$$E_y = 449.377589615 \cdot (-8) = -3595.02071692 \text{ В/м}.$$

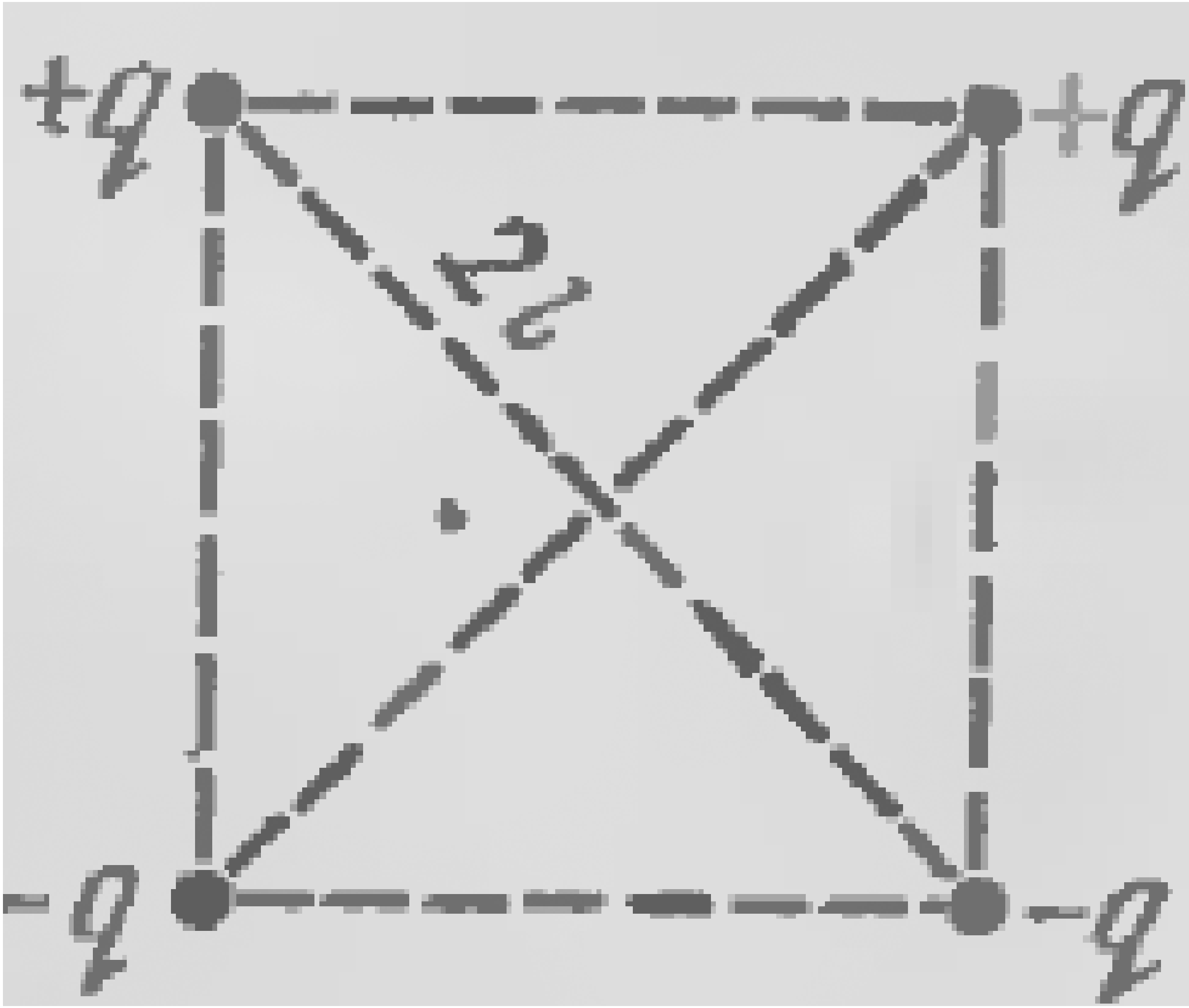
5. Модуль поля:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{2696.2655^2 + (-3595.0207)^2} = 4493.77589615 \text{ В/м}.$$

Ответ: $E = 4.5$ кВ/м; $\vec{E} = 2.7\vec{\imath} - 3.6\vec{\jmath}$

---

5. *Точечные заряды $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$ расположены по углам квадрата, диагональ которого равна $2l$. Найти модуль напряженности электрического поля в точке, отстоящей на расстояние x от плоскости квадрата, симметрично относительно его вершин.*



Решение:

Положение вершин и параметры

Диагональ квадрата = $2l$. Пусть центр квадрата — начало координат, стороны параллельны осям x, y. Тогда координаты вершин можно взять как

$$(\pm a, \pm a, 0),$$

где

$$a = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Пусть заряды:

- в верхних вершинах $(-a, +a, 0)$ и $(+a, +a, 0)$ — по $+q$;
- в нижних вершинах $(-a, -a, 0)$ и $(+a, -a, 0)$ — по $-q$.

Точка наблюдения (вершина «пирамиды») находится на оси, проходящей через центр и перпендикулярно плоскости квадрата:

$$P(0, 0, x).$$

Расстояние от любой вершины до точки P:

$$R = \sqrt{a^2 + a^2 + x^2} = \sqrt{2a^2 + x^2} = \sqrt{l^2 + x^2}.$$

Поле от одной вершины — векторная форма

Поле точечного заряда q_i в точке P равно

$$\vec{E}_i = k\frac{q_i}{R^3}\vec{R}_i,$$

где $\vec{R}_i$ — вектор от вершины к точке P.

Возьмём, например, вершину $(+a, +a, 0)$ с зарядом $+q$. Тогда

$$\vec{R} = (0 - a, 0 - a, x - 0) = (-a, -a, x).$$

Компоненты поля от этой вершины:

$$E_x^{(1)} = k\frac{q(-a)}{R^3}, \quad E_y^{(1)} = k\frac{q(-a)}{R^3}, \quad E_z^{(1)} = k\frac{qx}{R^3}.$$

Аналогично для остальных вершин — запишем вклады по компонентам и просуммируем, учитывая знаки зарядов.

Суммирование вкладов — симметрия

Из симметрии видно:

- x - компоненты от вершин попарно отменяются (пары $(+a, +a)$ и $(+a, -a)$ дают противоположные x-компоненты с одинаковыми коэффициентами и одинаковыми зарядами по модулю — суммарно ноль).

- вертикальные (z) компоненты: верхние вершины дают вклад $+k\frac{qx}{R^3}$ каждая, нижние — дают вклад $-q$ каждое, то есть вклад нижних равен $-k\frac{qx}{R^3}$ для каждой; суммарно $E_z = k\frac{qx}{R^3} + k\frac{qx}{R^3} - k\frac{qx}{R^3} - k\frac{qx}{R^3} = 0$. Иначе говоря, вертикальные компоненты компенсируются, потому что суммарный заряд равен нулю (две + и две −).
- y - компоненты не компенсируются, а складываются с одинаковым знаком. Посчитаем их.

Возьмём по очереди все четыре угла. Для вершины $(+a, +a)$ с $+q$ её y - компонента равна

$$E_y^{(+a,+a)} = k\frac{q(-a)}{R^3}.$$

Для вершины $(-a, +a)$ с $+q$: $E_y^{(-a,+a)} = k\frac{q(-a)}{R^3}$. Их сумма даёт $2 \cdot k\frac{q(-a)}{R^3}$.

Для нижних вершин с зарядом $-q$:

- вершина $(+a, -a)$: вектор $\vec{R} = (-a, +a, x)$ (заметим: её y - компонента равна $+a$), и заряд $-q$ даёт вклад $E_y^{(+a,-a)} = (-q) \cdot k\frac{+a}{R^3} = -k\frac{qa}{R^3}$.
- вершина $(-a, -a)$: аналогично даёт $-k\frac{qa}{R^3}$.

Сумма вкладов от нижних вершин: $-2k\frac{qa}{R^3}$. Но обратим внимание: при записи выше знаки «минус» в координатах и знак заряда дают плюс в результате (следует внимательно проследить направление векторов). Если аккуратно пройти по всем четырём, то итоговая сумма y-компонент равна

$$E_y = 4k\frac{qa}{R^3}.$$

(Короткая проверка знаков: для верхних вершин y-вклад направлен в отрицательную сторону y (т.к. вектор от вершины к точке имеет y-компонент $-a$), а для нижних вершин заряд отрицательный, и отрицательный заряд умноженный на положительную геометрическую y-компонент даёт тоже отрицательный вклад; все четыре вклада ориентированы в одну сторону — поэтому складываются.)

Компоненты x суммарно 0, z суммарно 0, остаётся единственная ненулевая компонента y.

Подставляем $a = \frac{l}{\sqrt{2}}$ и $R = \sqrt{l^2 + x^2}$

$$E = |E_y| = 4k\frac{qa}{R^3} = 4k\frac{q}{R^3} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} = k\frac{4}{\sqrt{2}}\frac{ql}{\left(l^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Упростим коэффициент:

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $E = k\frac{2\sqrt{2}ql}{\left(l^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Расчет напряженности непрерывного распределения заряда на основе теоремы Гаусса

1. *Напряженность электрического поля, как функция координат имеет вид:* $\vec{E} = \frac{\alpha x\vec{\imath} + \alpha y\vec{\jmath}}{x^2+y^2}$, *где* $\alpha = \mathrm{const}$, *а* $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ *- орты координатных осей* OX *и* OY *соответственно. Найти поток вектора* $\vec{E}$ *через сферу радиуса* R *с центром в начале координат.*

Решение: Преобразуем $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{\alpha x\vec{\imath} + \alpha y\vec{\jmath}}{x^2 + y^2} = \frac{\alpha(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})}{x^2 + y^2} = \frac{\alpha\vec{r}}{r^2}$$

Будем использовать сферические координаты:

$$x = R\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = R\cos\theta$$

Ответ: $P = 4\pi\alpha R$.

---

2. *Объемная плотность положительно заряженного шара радиуса* R *зависит только от расстояния до центра шара:* $\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$, *где* $\rho_0 = \mathrm{const}$. *Найти:*

- *модуль напряженности электрического поля внутри и вне шара, как функцию* r*;*

- *максимальное значение модуля напряженности* $E_{\max}$ *и соответствующее ему значение* $r_{\max}$.

Диэлектрическая проницаемость всюду $\varepsilon = 1$.

Ответ: $E_r(r \le R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \frac{3r}{4R}\right), \quad E_r(r \ge R) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}, \quad r_{\max} = \frac{2}{3}R, \quad E_r(r_{\max}) = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$.

3. *Система состоит из равномерно заряженного шара радиуса* $R = 0.2$ *м, объемная плотность которого* $\rho = 20$ *нКл/м*^{3}. *Рассчитать модуль напряженности электрического поля:*

- *на расстоянии* $r = 0.1$ *м от центра шара;*
- *на поверхности шара;*
- *на расстоянии* $r = 0.25$ *м от центра шара;*

Диэлектрическая проницаемость материала из которого состоит шар $\varepsilon = 5$.

Ответ: $E(0.1) \approx 15$ В/м, $E(0.2) \approx 30$ В/м $(r \le R)$, $E(0.25) \approx 96$ В/м, $E(0.2) \approx 151$ В/м $(r \ge R)$.

4. *Шар радиуса* R *заряженный равномерно помещен в некоторую среду диэлектрическая проницаемость которой* $\varepsilon = 1$. *Среда заполнена зарядом, объемная плотность которого* $\rho = \frac{\alpha}{r}$, *где* α *- постоянная, а* r *- расстояние от центра шара. Рассчитать заряд шара при котором модуль напряженности электрического поля вне шара не зависит от* r.

Ответ: $q = 2\pi\alpha R^2$.

5. *Система представлена областью пространства. По пространству распределен заряд, плотность которого зависит от расстояния до центра по закону* $\rho = \rho_0\, \exp(-\alpha r^3)$, *где* α *некоторая постоянная. Найти модуль напряженности, как функцию* r.

Ответ: $E_r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \alpha r^2}\left(1 - \exp(-\alpha r^3)\right)$.

6. *Рассчитать напряженность электрического поля бесконечной плоскости, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда -* σ. *Расчет произвести 2-мя способами:*

- *с использованием закона Кулона;*
- *с использованием теоремы Гаусса.*

Ответ: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$.

7. *Рассчитать напряженность электростатического поля создаваемого бесконечно длинной нитью, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда - λ. Расчет произвести 2-мя способами:*

- *с использованием закона Кулона;*
- *с использованием теоремы Гаусса.*

Ответ: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{n}$.

8. *Рассчитать вектор напряженности электростатического поля в области пересечения двух шаров, равномерно заполненными разноименными зарядами с объемной плотностью ρ и $-\rho$. Расстояния между центрами шаров характеризуется вектором a.*

Ответ: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$.

9. *Напряжённость аксиально симметричного электростатическое поля зависит от расстояния до источника по закону $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2}\vec{r}$ (α - постоянная). Рассчитать заряд внутри сферы радиуса R, центр которой расположен на источнике.*