

Содержание

Электростатика	5
Закон Кулона. Принцип суперпозиции.	5
№1 (done)	5
№2 (done)	5
№3 (done)	7
№4 (done)	8
№5 (done)	9
№6 (done)	11
№7	11
№8 (done)	12
№9 (done)	12
№10 (done)	13
№11 (done)	13
№12 (done)	13
№13 (done)	14
№14	14
№15	14
№16	14
№17	15
№18	15
Расчет напряженности непрерывного распределения заряда на основе теоремы Гаусса.	15
№1	15
№2	16
№3	16
№4	16
№5	17
№6	17
№7	17
№8	18
№9	18
Работа кулоновских сил. Потенциал электростатического поля.	18
№1 (done)	18
№2 (done)	18
№3 (done)	19
№4 (done)	19
№5 (done)	19
№6 (done)	20
№7 (done)	20

№8 (done)	20
№9 (done)	20
№10	21
№11	21
№12	22
№13	22
№14	23
№15	23
№16	23
Электрический диполь.	23
№1	23
№2	24
№3	24
№4	25
№5	25
№6	26
№7	26
№8	26
Электростатическое поле при наличии диэлектриков.	27
№1	27
№2	27
№3	27
№4	28
№5	28
Электростатическое поле при наличии проводников.	28
№1	28
№2	29
№3	29
№4	29
№5	29
№6	30
Энергия электростатического поля.	30
№1	30
№2	30
№3	30
№4	31
№5	31
Конденсаторы.	31
№1	31
№2	32
№3	32
№4	32

Постоянное магнитное поле	33
Индукция магнитного поля. Закон Био-Савара	33
№1	33
№2	34
№3	35
№4	37
№5	39
№6	40
№7	43
№8	43
№9	44
№10	45
Закон полного тока	46
№1	46
№2	46
№3	48
№4	49
№5	51
№6	51
№7	53
№8	54
№9	57
Магнитное поле при наличии Магнетиков. Магнитный момент.	58
№1	58
№2	58
№3	60
№4	61
№5	61
№6	61
№7	62
№8	63
№9	64
Частица в магнитном поле	65
№1	65
№2	65
Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле	67
№1	67
№2	67
Электромагнитная индукция	70

Индукция токов. Закон электромагнитной индукции	
Фарадея	70
№1	70
№2	70
№3	72
№4	73
№5	74
№6	75
№7	77
№8	78
№9	79

Электростатика

Закон Кулона. Принцип суперпозиции.

№1 (done)

Условие: На шёлковой нити подвешен шар массы m , заряд которого q_1^+ . Рассчитать на какое расстояние необходимо поднести положительно заряженный шар, с зарядом q_2^+ , чтобы сила натяжения нити уменьшилась вдвое.

Решение:

Ответ: $l = \sqrt{\frac{2kq_1^+q_2^+}{mg}}$.

№2 (done)

Условие: К потолку в одной точке на шёлковых нитях длины l подвешены два одинаковых шара обладающих одинаковым зарядом q и массой m . Расстояние между шарами $x \ll l$. Рассчитать скорость утечки зарядов $\frac{dq}{dt}$ с каждого шара, если скорость их сближения, как функция от x имеет вид: $v(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x}}$ (α – некоторая постоянная).

Решение:

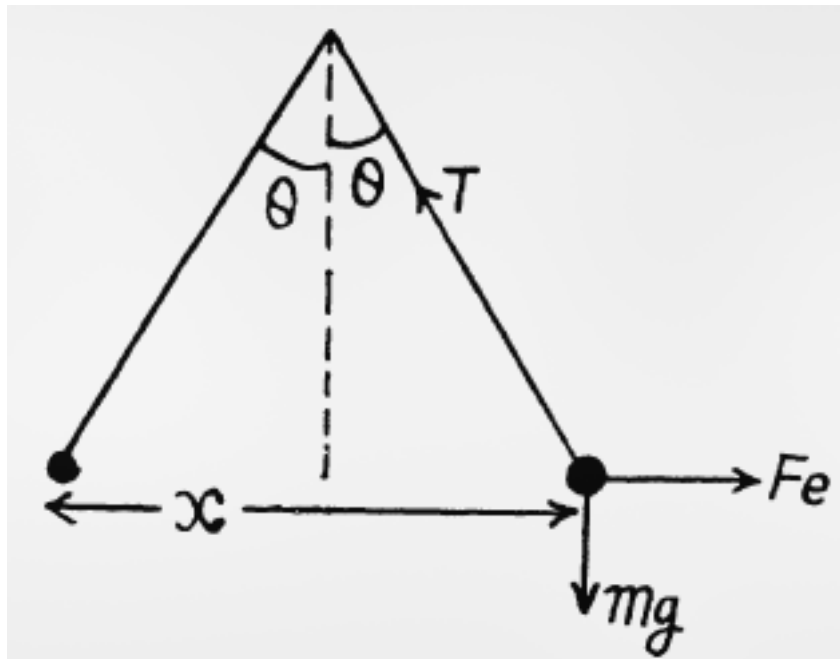


Рис. 1. Поясняющий рисунок.

Пусть шары отклоняются на угол θ , от вертикали, когда расстояние между ними равно x .

Применяя второй закон Ньютона для любого шарика, получим,

$$T \cos \theta = mg \quad (1)$$

и

$$T \sin \theta = F_e \quad (2)$$

Из уравнений 1 и 2

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_e}{mg} \quad (3)$$

Из рисунка

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \approx \frac{x}{2l} \quad x \ll l \quad (4)$$

Из уравнения 3 и 4

$$F_e = \frac{mgx}{2l} \quad \text{или} \quad \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{mgx}{2l} \quad (5)$$

$$q^2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 mgx^3}{l} \quad (6)$$

Дифференцируя уравнение 6 по времени

$$2q \frac{dq}{dt} = \frac{2\pi\varepsilon_0 mg}{l} 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad (7)$$

Согласно задаче $\frac{dx}{dt} = v = \frac{a}{\sqrt{x}}$ (скорость сближения $\frac{dx}{dt}$).

Итак, $\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mg}{l}} x^3 \frac{dq}{dt} = \frac{3\pi\varepsilon_0 mg}{l} x^2 \frac{a}{\sqrt{x}}$

Следовательно, $\frac{dq}{dt} = \frac{3}{2} a \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mg}{l}}$.

Ответ: $\frac{dq}{dt} = \frac{3\alpha}{2} \sqrt{\frac{mg}{2kl}}$.

№3 (done)

Условие: Радиус векторы двух положительных зарядов q_1 и q_2 соответственно $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Рассчитать отрицательный заряд q_3 и его радиус-вектор $\vec{r}_3$ точки в которую его надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из зарядов была равна 0.

Решение:

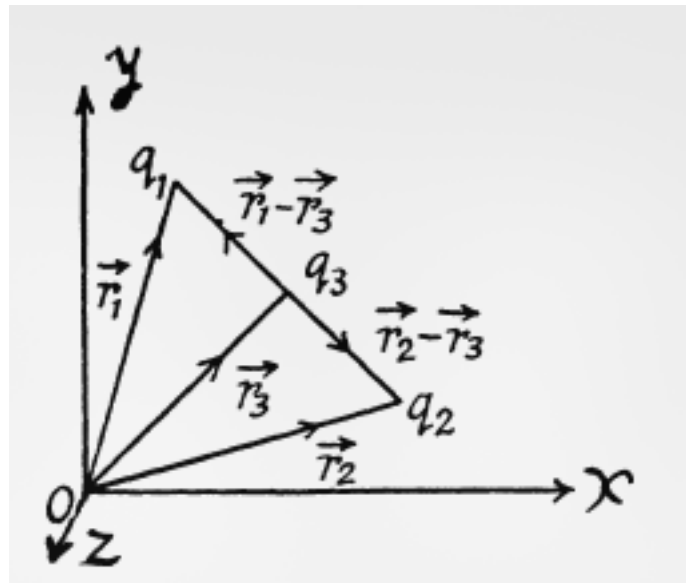


Рис. 2. Поясняющий рисунок.

Выберем координатные оси, как показано на рисунке, и зафиксируем три заряда, q_1, q_2 и q_3 с векторами положения $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$ соответственно.

Теперь для равновесия q_3

$$\frac{+q_2 q_3 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + \frac{q_1 q_3 (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2} = 0 \quad (8)$$

или, $\frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} = \frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2}$

потому что $\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|}$

или, $\sqrt{q_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) = \sqrt{q_1}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)$

или, $\vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_2}\vec{r}_1 + \sqrt{q_1}\vec{r}_2}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}$

Для равновесия q_1 ,

$$\frac{q_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = 0 \quad (9)$$

или, $q_3 = \frac{-q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2$

Подставляя значение $\vec{r}_3$, получаем,

$$q_3 = \frac{-q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}. \quad (10)$$

Ответ: $q_3 = -\frac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}, \vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_1}\vec{r}_2 + \sqrt{q_2}\vec{r}_1}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}.$

№4 (done)

Условие: Точечный заряд $q = 50$ мкКл расположен в точке с радиус-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Найти напряжённость $\vec{E}$ электрического поля и её модуль в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$. Координаты векторов заданы в метрах.

Решение:



Рис. 3. Поясняющий рисунок.

$$\vec{z} - \vec{z}_0 = 6\vec{i} - 8\vec{j} \quad (11)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad (12)$$

$$z = |\vec{z} - \vec{z}_0| = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ м} \quad (13)$$

$$E = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-5}}{100} = 4500 \text{ В/м} = 4.5 \text{ кВ/м} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{z} - \vec{z}_0}{|\vec{z} - \vec{z}_0|} \cdot E = (0.6i - 0.8j) \cdot 4.5 = \\ &= (2.7i - 3.6j) \text{ кВ/м}. \end{aligned} \quad (15)$$

Ответ: $E = 4.5 \text{ кВ/м}$; $\vec{E} = 2.7\vec{i} - 3.6\vec{j}$.

№5 (done)

Условие: Точечные заряды $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$ расположены по углам квадрата (Рис. 4), диагональ которого равна $2l$. Найти модуль напряжённости электрического поля в точке, отстоящей на расстояние x от плоскости квадрата, симметрично относительно его вершин.

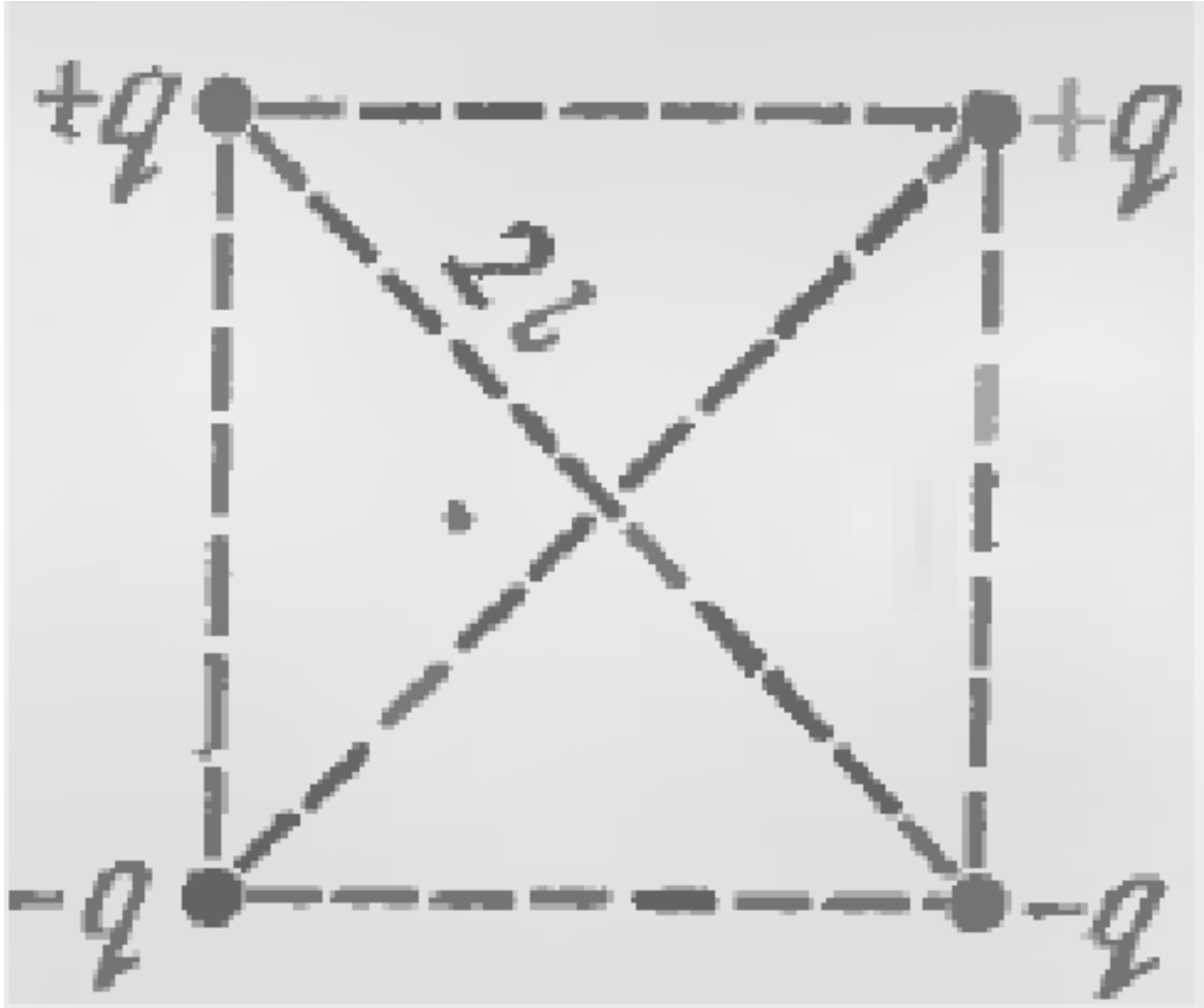


Рис. 4. Поясняющий рисунок.

Решение:

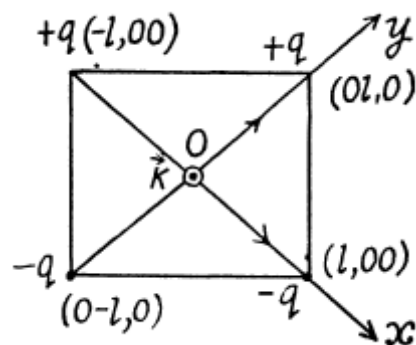


Рис. 5. Пояснительный рисунок.

Зафиксируем систему координат, взяв точку пересечения диагоналей как начало координат, а $\vec{k}$ - нормальное направление, выходящее из плоскости фигуры. Следовательно, искомая напряженность поля:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l\vec{i} + x\vec{k}}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
&+ \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l(-\vec{i}) + x\vec{k}}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
&+ \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l\vec{j} + x\vec{k}}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
&+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l(-\vec{j}) + x\vec{k}}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} [2l\vec{i} - 2l\vec{j}]
\end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом,

$$E = \frac{ql}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{17}$$

Ответ: $E = k \frac{2\sqrt{2}ql}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

№6 (done)

Условие: В центре равностороннего треугольника расположен заряд $q_0 = 10$ нКл. Рассчитайте, какие одинаковые заряды q_1 необходимо расположить в вершинах этого треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю.

Решение:

Ответ: $q_1 = -17$ нКл.

№7

Условие: Система состоит из протона p и электрона e , расстояние между которыми $r = 50$ пм. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля, создаваемого этими частицами в точках A и B , когда эти частицы находятся в положении, изображённом на (Рис. 6).

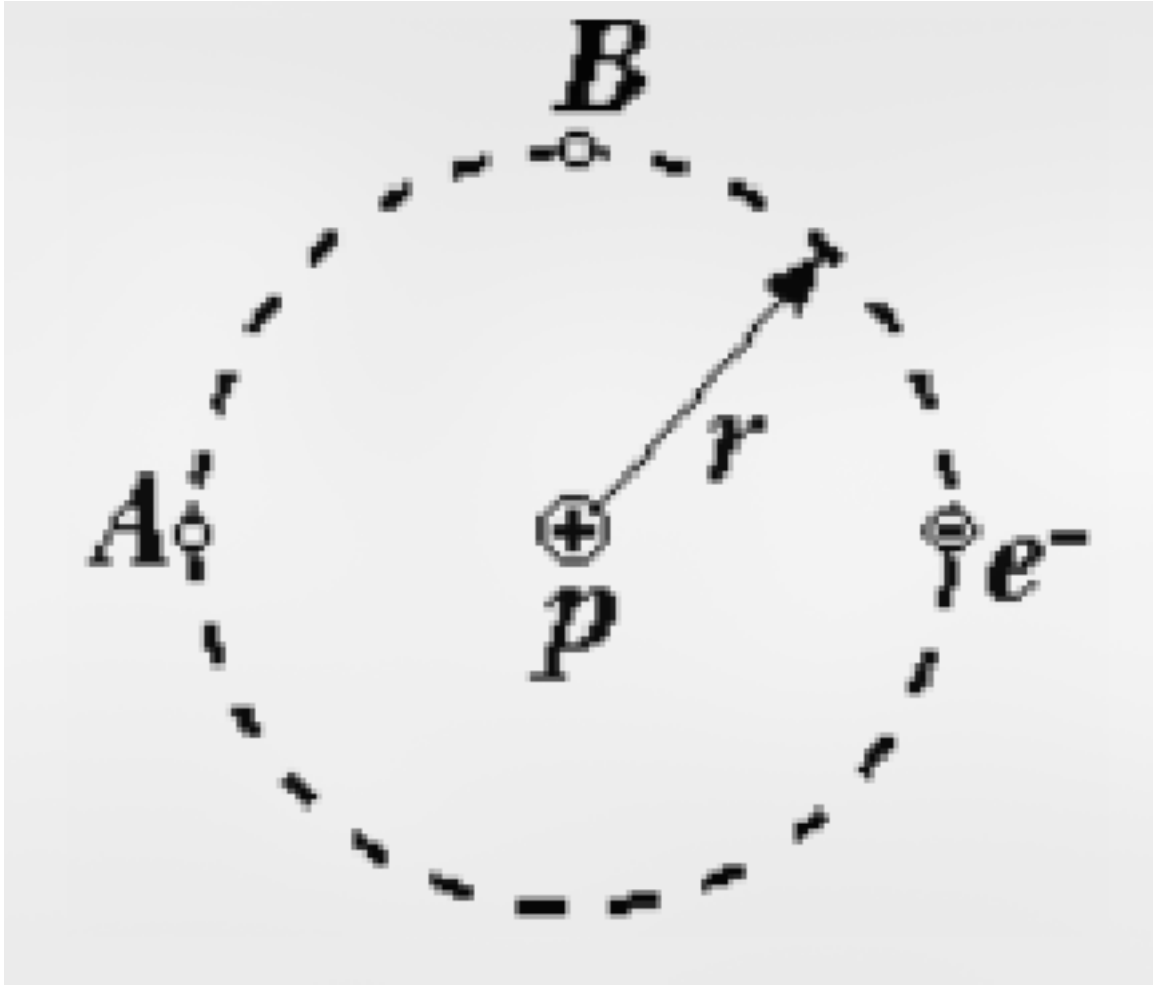


Рис. 6. Поясняющий рисунок.

Решение:

Ответ: $E_A = 4.3 \cdot 10^{11}$ В/м, $E_B = 4.2 \cdot 10^{11}$ В/м.

№8 (done)

Условие: В вершинах квадрата со сторонами $a = 0.08$ м расположены одинаковые заряды $q^{(+)} = 5$ нКл. Рассчитайте модуль напряжённости электрического поля в середине одной из сторон квадрата.

Решение:

Ответ: $E \approx 10$ кВ/м.

№9 (done)

Условие: Свинцовый шарик диаметр которого $d = 7$ мм поместили в однородное электрическое поле в глицериновый раствор. Рассчитать

заряд этого шарика, если электрическое поле направленно вверх, а модуль его напряжённости $E = 9 \text{ кВ/см}$.

Решение:

Ответ: $q \approx 20 \text{ нКл}$.

№10 (done)

Условие: Кусок тонкой проволоки изогнутый полукольцом радиусом R имеет равномерно распределённый заряд q . Рассчитать модуль напряжённости электрического поля E в центре этого полукольца.

Решение:

Ответ: $E = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$.

№11 (done)

Условие: Найти модуль напряжённости электрического поля на оси заряженного тонкого кольца, как функцию расстояния до центра кольца – $E(z)$, если заряд кольца равен q , а радиус R . Исследовать полученную зависимость при $z \gg R$. Рассчитать максимальное значение модуля напряжённости $E_{\max}$ и соответствующую ему координату точки на оси OZ .

Решение:

Ответ: $E(z) = \frac{kqz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$, $z_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $E_{\max} = \frac{2kq}{3^{\frac{3}{2}} R^2}$.

№12 (done)

Условие: Рассчитать модуль силы взаимодействия между тонким кольцом радиуса R , заряд которого равен q и длинной равномерно заряженной нитью, имеющей линейную плотность заряда равную λ , если нить расположена вдоль оси симметрии кольца, так, что один её конец совпадает с центром кольца.

Решение:

Ответ: $F = \frac{kq\lambda}{R}$.

№13 (done)

Условие: Тонкий стержень длины l имеет равномерно распределённый заряд q . Рассчитать, модуль напряжённости электрического поля в точке расположенной на расстоянии a от одного из концов стержня, по линии стержня.

Решение:

Ответ: $E = \frac{kq}{a(l+a)}.$

№14

Условие: Линейная плотность тонкого заряженного кольца радиуса R зависит от азимутального угла по закону $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$ (λ_0 – постоянная). Рассчитать модуль напряжённости электрического поля в центра кольца и на оси симметрии кольца в зависимости от расстояния до центра кольца.

Решение:

Ответ: $E_O = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}, E(z) = \frac{\lambda_0 R^2}{4\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$

№15

Условие: Система состоит из равномерно заряженного стержня длины $2a$, расположенного в вакууме. Рассчитать модуль вектора напряжённости как функцию расстояния r от центра стержня до точки на прямой:

- перпендикулярной стержню и проходящей через его центр;
- совпадающей с осью стержня, при $r > a$.

Заряд стержня равен q .

Решение:

Ответ: $E = \frac{kq}{r\sqrt{a^2 + r^2}}, E = \frac{kq}{r^2 - a^2}.$

№16

Условие: Сфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = (\vec{r}, \vec{a})$, где $\vec{a}$ некоторый постоянный вектор, а $\vec{r}$ – радиус вектор

точки на сфере относительно её центра. Рассчитать вектор напряжённости электрического поля в центре сферы.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{aR}{3\varepsilon_0} \vec{e}_z$.

№17

Условие: Рассчитать вектор напряжённости в центре заряженного шара радиуса R если объёмная плотность заряда шара $\rho = (\vec{r}, \vec{a})$, где $\vec{a}$ некоторый постоянный вектор, а $\vec{r}$ – радиус вектор произвольной точки шара, проведённый из его центра.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{R^2 a}{6\varepsilon_0} \vec{e}_z$.

№18

Условие: Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность круглого сечения заряжена так, что поверхностная плотность зависит только от угла φ цилиндрической системы координат: $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$. Рассчитать модуль вектора в произвольной точке, лежащей на оси цилиндра.

Решение:

Ответ: $E = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$.

Расчет напряженности непрерывного распределения заряда на основе теоремы Гаусса.

№1

Условие: Напряжённость электрического поля, как функция координат имеет вид: $\vec{E} = \frac{\alpha x \vec{i} + \alpha y \vec{j}}{x^2 + y^2}$, где $\alpha = \text{const}$, а $\vec{i}, \vec{j}$ – орты координатных осей OX и OY соответственно. Найти поток вектора $\vec{E}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат.

Решение:

Ответ: $P = 4\pi\alpha R$.

№2

Условие: Объёмная плотность положительно заряженного шара радиуса R зависит только от расстояния до центра шара: $\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$, где $\rho_0 = \text{const}$. Найти:

- модуль напряжённости электрического поля внутри и вне шара, как функцию r ;
- максимальное значения модуля напряжённости E_{max} и соответствующее ему значение r_{max} .

Диэлектрическая проницаемость всюду $\varepsilon = 1$.

Решение:

Ответ: $E_r(r \leq R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right)$, $E_r(r \geq R) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$, $r_{\text{max}} = \frac{2}{3}R$, $E_r(r_{\text{max}}) = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$.

№3

Условие: Система состоит из равномерно заряженного шара радиуса $R = 0.2$ м, объёмная плотность которого $\rho = 20$ нКл/м³. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля:

- на расстоянии $r = 0.1$ м от центра шара;
- на поверхности шара;
- на расстоянии $r = 0.25$ м от центра шара.

Диэлектрическая проницаемость материала из которого состоит шар $\varepsilon = 5$.

Решение:

Ответ: $E(0.1) \approx 15$ В/м, $E(0.2) \approx 30$ В/м ($r \leq R$), $E(0.25) \approx 96$ В/м, $E(0.2) \approx 151$ В/м ($r \geq R$).

№4

Условие: Шар радиуса R заряженный равномерно помещён в некоторую среду диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon = 1$. Среда заполнена зарядом, объёмная плотность которого $\rho = \frac{\alpha}{r}$, где α –

постоянная, а r – расстояние от центра шара. Рассчитать заряд шара при котором модуль напряжённости электрического поля вне шара не зависит от r .

Решение:

Ответ: $q = 2\pi\alpha R^2$.

№5

Условие: Система представлена областью пространства. По пространству распределён заряд, плотность которого зависит от расстояния до центра по закону $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, где α некоторая постоянная. Найти модуль напряжённости, как функцию r .

Решение:

Ответ: $E_r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2} (1 - \exp(-\alpha r^3))$.

№6

Условие: Рассчитать напряжённость электрического поля бесконечной плоскости, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда – σ . Расчёт произвести 2-мя способами:

- с использованием закона Кулона;
- с использованием теоремы Гаусса.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$.

№7

Условие: Рассчитать напряжённость электростатического поля создаваемого бесконечной длинной нитью, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда – λ . Расчёт произвести 2-мя способами:

- с использованием закона Кулона;
- с использованием теоремы Гаусса.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{n}$.

№8

Условие: Рассчитать вектор напряжённости электростатического поля в области пересечения двух шаров, равномерно заполненных разноименными зарядами с объёмной плотностью ρ и $-\rho$. Расстояния между центрами шаров характеризуется вектором $\vec{a}$.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{a}$.

№9

Условие: Напряжённость аксиально симметричного электростатического поля зависит от расстояния до источника по закону $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{r}$ (α – постоянная). Рассчитать заряд внутри сферы радиуса R , центр которой расположен на источнике.

Решение:

Ответ: хз.

Работа кулоновских сил. Потенциал электростатического поля.

№1 (done)

Условие: Потенциал электрического поля зависит от координат x, y по закону:

- $\varphi(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)$,
- $\varphi(x, y) = \alpha xy$,

где $\alpha = \text{const}$. Найти вектор напряжённости этих полей.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = -2\alpha\vec{r}$, $\vec{E} = -\alpha y\vec{i} - \alpha x\vec{j}$.

№2 (done)

Условие: Найти потенциалы, как функции координат следующих электрических полей:

а) $\vec{E} = a(y\vec{i} + x\vec{j})$;

б) $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 - y^2)\vec{j}$;

с) $\vec{E} = ay\vec{i} + (ax + bz)\vec{j} + by\vec{k}$.

Решение:

Ответ: $\varphi_a = -axy + C, \quad \varphi_b = ay\left(\frac{y^2}{3} - x^2\right) + C, \quad \varphi_c = -y(ax + bz) + C.$

№3 (done)

Условие: Потенциал электрического поля имеет вид: $\varphi(x, y, z) = \alpha(xy - z^2)$, где $\alpha = \text{const}$. Найти проекцию напряжённости электрического поля в точке $M\{2, 1, -3\}$ на направление вектора $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$.

Решение:

Ответ: $E_a = \frac{(\vec{E}, \vec{a})}{a} \approx -6\alpha.$

№4 (done)

Условие: Тонкий кусок проволоки изогнутый полукольцом имеет равномерно распределённый заряд, линейная плотность которого $\lambda = 5 \text{ нКл/м}$. Рассчитать потенциал φ , создаваемый зарядом проволоки в центре полукольца.

Решение:

Ответ: $\varphi = \pi k \lambda \approx 0.14 \text{ кВ}.$

№5 (done)

Условие: Тонкий стержень длиной $l = 10 \text{ см}$ заряжен равномерно. Рассчитать потенциал φ электрического поля в точке, расположенной на оси стержня на расстоянии $a = 50 \text{ см}$. от его ближайшего конца, если полный заряд стержня $q = 10 \text{ мкКл}$.

Решение:

Ответ: $\varphi = \frac{kq}{l} \ln\left(\frac{l+a}{a}\right) \approx 0.16 \text{ МВ}.$

№6 (done)

Условие: Тонкая проволока свёрнутая в кольцо несёт равномерный заряд $q = 20$ нКл. Рассчитать потенциал электрического поля кольца в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии $a = 50$ см от центра кольца. Радиус кольца $R = 8$ см.

Решение:

Ответ: $\varphi = \frac{q}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+a^2}} \approx 0.36$ кВ.

№7 (done)

Условие: Рассчитать разность потенциалов между центрами тонких проволочных колец радиуса $R = 30$ см, если центры колец лежат на одной оси, а расстояние между центрами $l = 52$ см. Заряды колец равны q и $-q$. $|q| = 0.4$ мКл.

Решение:

Ответ: $\Delta\varphi = 2kq\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+l^2}}\right) \approx 12$ кВ.

№8 (done)

Условие: Кольцо радиуса R заряжено неравномерно. Рассчитать работу, совершаемую при перемещении заряда q_0 из центра кольца в произвольную точку лежащую на оси кольца, если полный заряд кольца равен q .

Решение:

Ответ: $A = kqq_0\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$.

№9 (done)

Условие: Рассчитать разность потенциалов между точками (1) и (2) электрического поля, создаваемого тонкой равномерно заряженной нитью бесконечной длины, если известно, что точка (2) расположена в 7 раз дальше от нити, чем точка (1). Линейная плотность заряда нити $\lambda = 9$ мКл/м.

Решение:

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi} \ln 7 \approx 0.32$ МВ.

№10

Условие: Провод, изображённый на (Рис. 7) заряжен равномерно с линейной плотностью $\lambda = 0.5$ нКл/м. Длина прямого участка $a = 50$ см, радиус полукольца $R = 20$ см. Рассчитать, какую работу совершат электрические силы при удалении точечного заряда $q = 10$ нКл от центра полукольца на бесконечность.

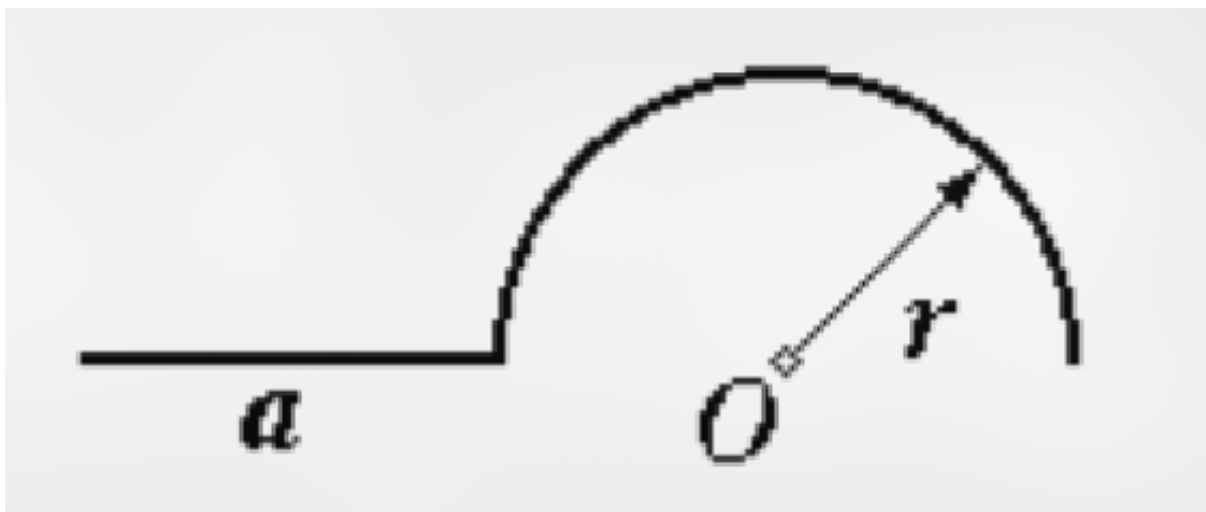


Рис. 7. Поясняющий рисунок.

Решение:

Ответ: $A = kq\lambda\left(\pi + \ln\left(\frac{R+a}{a}\right)\right) \approx 0.2$ мкДж.

№11

Условие: Электрическое поле создано равномерно заряженным шаром радиуса $R = 20$ см. Объёмная плотность заряда $\rho = 10$ нКл/м³. Рассчитать разность потенциалов между точками, лежащими на расстоянии $r_1 = 1$ см и $r_2 = 25$ см от центра шара соответственно. Диэлектрическая проницаемость всюду равна 1.

Решение:

Ответ: $\Delta\varphi \approx 11$ В.

№12

Условие: В вершинах равностороннего треугольника, сторона которого $a = 5$ см, расположены 3 точечных заряда q и $-2q$, как это показано на (Рис. 8). Рассчитать работу электрических сил при перемещении заряда $-2q$ из точки B в точку C если $q = 3$ нКл.

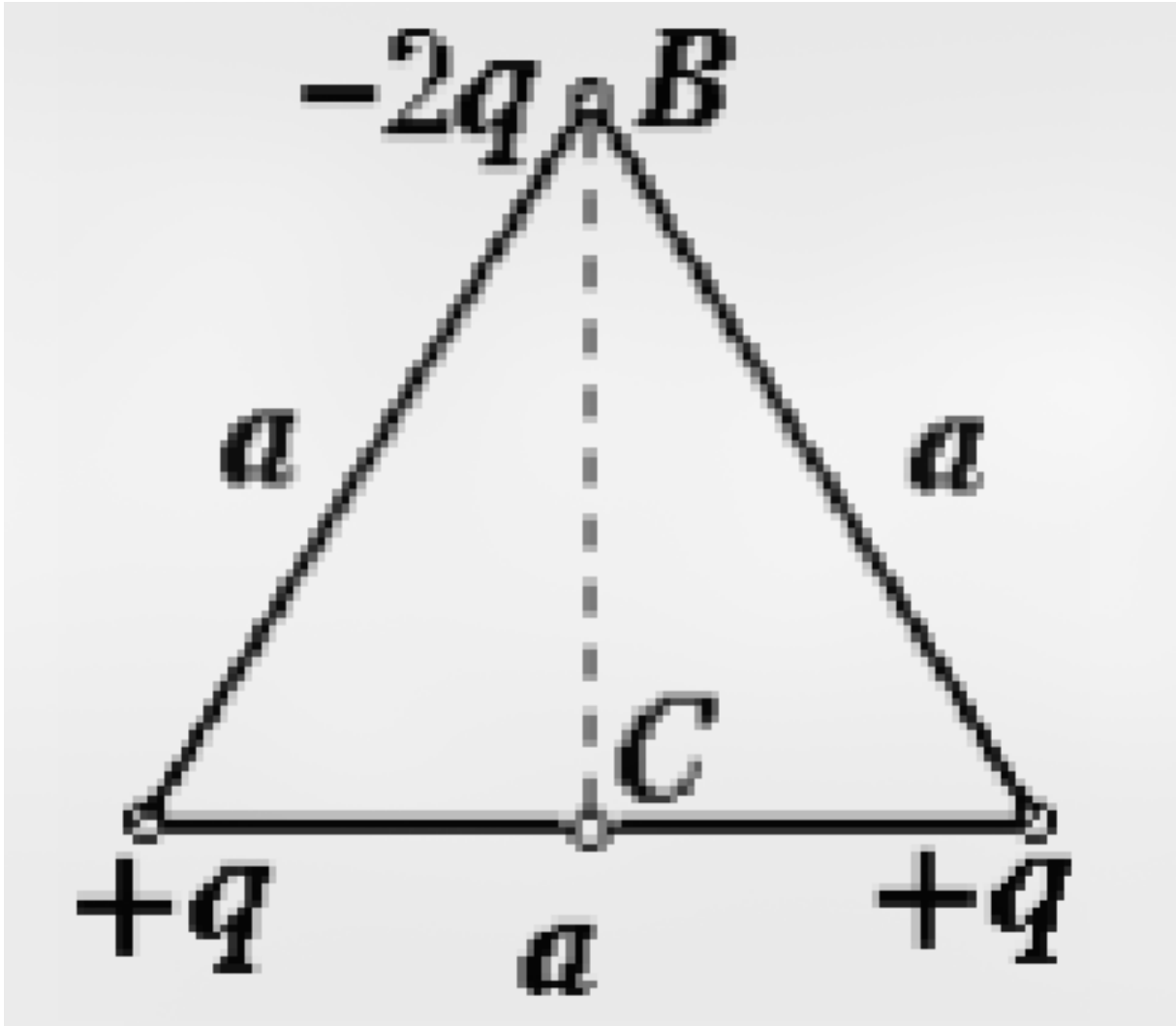


Рис. 8. Пояснительный рисунок.

Решение:

Ответ: $A = \frac{4kq^2}{a} \approx 6.5$ мкДж.

№13

Условие: Коническая поверхность, радиус основания которой равен R равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ . Рассчитать потенциал электростатического поля в вершине конуса.

Решение:

Ответ: $\varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$.

№14

Условие: Рассчитать потенциал в точке, расположенной на краю тонкого диска, радиуса R , если поверхностная плотность заряда, распределённого по диску равна σ .

Решение:

Ответ: $\varphi = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$.

№15

Условие: Потенциал электростатического поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до центра шара: $\varphi = ar^2 + b$. Рассчитать объёмную плотность заряда, как функцию r .

Решение:

Ответ: $\rho(r) = -6\varepsilon_0 a$.

№16

Условие: Заряд q распределён равномерно по объёму шара радиуса R . Рассчитать:

- потенциал в центре шара;
- потенциал внутри шара как функцию r .

Решение:

Ответ: $\varphi(0) = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}, \quad \varphi(r) = \varphi(0)\left(1 - \frac{r^2}{3R^3}\right)$

Электрический диполь.

№1

Условие: Заряд q помещён в точку с координатами $(a, 0)$. Найти вектор дипольного момента, если заряд $-q$ поместить в точку с координатами:

- $(-a, 0);$
- $(0, a);$
- $(-a, -a).$

Решение:

Ответ: $\vec{p} = 2qa\vec{i}; \vec{p} = q(a\vec{i} - a\vec{j}); \vec{p} = q(2a\vec{i} + a\vec{j}).$

№2

Условие: Рассчитать потенциалы и модули напряжённости электрического поля, создаваемого диполем в точках A и B , расположенных на расстоянии r от центра диполя на перпендикуляре к диполю и на оси диполя в направлении диполя, соответственно. Модуль дипольного момента $p = 0.12$ нКл/м, $|q| = 1$ нКл, $r = 8$ см.

Решение:

Ответ: $\varphi(A) = 0$ В, $\varphi(B) \approx 386$ В, $E(A) \approx 1.08$ кВ/м, $E(B) = 22$ кВ/м.

№3

Условие: Показать, что потенциал поля диполя с электрическим моментом $\vec{p}$ (Рис. 9) может быть представлен, как $\varphi(r) = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, где r – радиус-вектор.

- Найти с помощью этого выражения вектор напряжённости $\vec{E}$ как функцию $\vec{r}, \vec{p}$ и модуль вектора напряжённости электрического поля диполя, как функцию r и θ .
- Найти проекции напряжённости электрического поля диполя на ось $Z - E_z$, и на плоскость перпендикулярную оси $Z - E_{\perp}$.



Рис. 9. Поясняющий рисунок.

Решение:

Ответ:

$$\vec{E}(\vec{p}, \vec{r}) = k \left(\frac{3(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right), \quad E(p, \theta) = \frac{kp}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}; \quad E_z = \frac{kp}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad E_{\perp} = \frac{3kp \cos \theta \sin \theta}{r^3}.$$

№4

Условие: Диполь с электрическим моментом $\vec{p}$ равномерно вращается с частотой ν вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плечу диполя. Получить потенциал создаваемый диполем в точке S , отстоящей от центра диполя на расстояние $r \gg l$ (l – плечо диполя), как функцию времени. Считать, что $\varphi(0) = 0$.

Решение:

Ответ: $\varphi(t) = -\frac{kp}{r^2} \sin(2\pi\nu t).$

№5

Условие: Для системы состоящей из 2-х сонаправленных точечных диполей, лежащих на одной прямой, $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, рассчитать модуль силы взаимодействия между этими диполями если $p_1 = 1$ пКл/м, $p_2 = 4$ пКл/м, $r = 0.02$ м (r – расстояние между центрами диполей)

Решение:

Ответ: $F = \frac{3p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^4} \approx 1.35 \text{ мкН}$.

№6

Условие: Система состоит из равномерно заряженной нити, изогнутой в форме полуокружности радиуса R с зарядом $q > 0$, и отрицательного заряда $-q$, расположенного в её центре. Найти:

- Модуль электрического дипольного момента этой системы;
- Модуль напряжённости электрического поля в точке, расположенной на оси диполя на расстоянии $r \gg R$.

Решение:

Ответ: $p = \frac{2Rq}{\pi}$; $E(r) = \frac{Rq}{\epsilon_0 \pi^2 r^3}$.

№7

Условие: Система состоит из бесконечной равномерно заряженной тонкой нити и диполя, расположенного на расстоянии r от нити. $\vec{p}$ – дипольный момент, λ – линейная плотность заряда нити. Найти силу, действующую на диполь, если $\vec{p}$ ориентирован:

- вдоль нити;
- по вектору $\vec{r}$, перпендикулярному к нити;
- перпендикулярно нити и вектору $\vec{r}$.

Решение:

Ответ: $\vec{F} = \vec{0}$; $\vec{F} = -\frac{\vec{p}\lambda}{\epsilon_0 \pi r^2}$.

№8

Условие: Диполь $\vec{p}$ расположен во внешнем однородном поле $\vec{E}_0$, так что $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}_0$. При таком расположении одна из эквипотенциальных поверхностей представляет из себя сферу. Рассчитать радиус этой сферы.

Решение:

Ответ: хз.

Электростатическое поле при наличии диэлектриков.

№1

Условие: В центре шара, состоящего из однородного диэлектрика с проницаемостью ε расположен точечный заряд q . Найти поляризованность $\vec{P}$, как функцию радиус-вектора $\vec{r}$ относительно центра шара, а также связанный заряд q' внутри сферы, радиус которой меньше радиуса шара.

Решение:

Ответ: $\vec{P} = \frac{q}{4\pi r^3 \varepsilon}(\varepsilon - 1)\vec{r}; \quad q' = -\frac{q}{\varepsilon}(\varepsilon - 1).$

№2

Условие: Рассчитать поверхностные плотности связанных зарядов, модули векторов поляризованности и напряжённости поля, индуцированного точечным зарядом q , помещённым в центр двух концентрических сфер радиусами R_1 и R_2 , если сферический слой заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью ε .

Решение:

Ответ: $E(r < R_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad P(r < R_1) = 0; \quad E(R_1 < r < R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}, P(R_1 < r < R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}(\varepsilon - 1); \quad E(r > R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, P(r > R_2) = 0; \sigma(r = R_1) = -\frac{q}{4\pi R_1^2 \varepsilon}(\varepsilon - 1), \sigma(r = R_2) = \frac{q}{4\pi R_1^2 \varepsilon}(\varepsilon - 1).$

№3

Условие: Показать, что на границе однородного диэлектрика с проводником поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma_{\text{св}} = -\frac{\sigma(\varepsilon-1)}{\varepsilon}$, где ε - диэлектрическая проницаемость, а σ - поверхностная плотность зарядов на проводнике.

Решение:

Ответ: хз.

№4

Условие: Система состоит из диэлектрического тела имеющего форму сферического слоя с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) и диэлектрической проницаемостью ε , расположенного в вакууме. Найти модуль напряжённости, как функцию расстояния r от центра тела, если:

- внутренняя поверхность тела несёт свободный поверхностный заряд q ;
- свободный заряд q равномерно распределён по объёму тела.

Решение:

Ответ:

$$E_a(r < R_1) = 0; E_b(r < R_1) = 0; E_a(R_1 < r < R_2) = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon \varepsilon_0 r^2}; E_b(R_1 < r < R_2) = \frac{\rho r}{3\varepsilon \varepsilon_0} \left(1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right); E_a(r > R_2) = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}; E_b(r > R_2) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{\varepsilon_0 r^2}.$$

№5

Условие: Вблизи некоторой точки лежащей на границе между стеклом и вакуумом модуль напряжённости электрического поля в вакууме – E_0 , а угол между вектором $\vec{E}_0$ и вектором нормали к стеклу – α_0 . Рассчитать модуль вектора напряжённости в стекле, угол между вектором напряжённости в стекле и нормалью, а также поверхностную плотность связанных зарядов.

Решение:

Ответ:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} \sqrt{\cos^2 \alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha_0}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_0}{\varepsilon}; \sigma = \frac{E_0(\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{\varepsilon} \cos \alpha_0.$$

Электростатическое поле при наличии проводников.

№1

Условие: Над проводящей горизонтальной плоскостью на изолирующей нити, коэффициент жёсткости которой μ висит небольшой шарик. Когда шарик зарядили, он опустился на x , а расстояние до проводящей плоскости стало равно l . Рассчитайте заряд шарика.

Решение:

Ответ: $q = 4l\sqrt{\mu x \pi \varepsilon_0}$.

№2

Условие: Система состоит из точечного диполя $\vec{p}$ и проводящей плоскости. Расстояние от диполя до плоскости l . Рассчитать силу действующую на диполь, если дипольный момент перпендикулярен плоскости.

Решение:

Ответ: $\vec{F} = \frac{3p^2}{32\varepsilon_0 l^4} \vec{j}$.

№3

Условие: С одной стороны проводящей плоскости расположены 2 заряда q и $-q$. Расстояние между зарядами равно l , расстояние от каждого заряда до плоскости равно $\frac{l}{2}$. Рассчитать модуль силы, действующей на каждый заряд.

Решение:

Ответ: $F = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} (2\sqrt{2} - 1)$.

№4

Условие: Система состоит из точечного заряда q расположенного на расстоянии y от проводящей плоскости. Рассчитать поверхностную плотность зарядов, индуцированных на плоскости, как функцию расстояния x от основания перпендикуляра, опущенного из точки расположения заряда на плоскость.

Решение:

Ответ: $\sigma = -\frac{qy}{2\pi(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

№5

Условие: Система состоит из нити и проводящей плоскости. Нить заряжена равномерно, с линейной плотностью λ , и ориентирована перпендикулярно плоскости. Расстояние от ближайшего конца нити, ближайшего к плоскости, до плоскости l . Рассчитать поверхностную плотность индуцированного на плоскости заряда:

- в точке O , являющейся следом нити на плоскости;
- как функцию расстояния x до точки O .

Решение:

Ответ: $\sigma(O) = -\frac{\lambda}{2\pi l}; \sigma(x) = -\frac{\lambda}{2\pi(x^2+l^2)^{\frac{1}{2}}}.$

№6

Условие: Рассчитать потенциал незаряженной проводящей сферы радиуса R , вне которой на расстоянии d расположен заряд q .

Решение:

Ответ: $\varphi = \frac{kq}{d}.$

Энергия электростатического поля.

№1

Условие: В вершинах прямоугольника со сторонами $a = 40$ см и $b = 20$ см расположены четыре одинаковых заряда $q = 2$ мкКл. Рассчитать энергию взаимодействия этой системы.

Решение:

Ответ: $W = 2q^2k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \approx 0.7$ Дж.

№2

Условие: Система состоит из 4-х одинаковых зарядов $q = 500$ нКл, расположенных в вершинах квадрата сторона которого $a = 20$ см. Рассчитать потенциальную энергию взаимодействия данной системы.

Решение:

Ответ: $W = \frac{\sqrt{2}q^2k}{a}(2\sqrt{2} + 1) \approx 61$ мДж.

№3

Условие: Во внешнем электростатическом поле, модуль напряжённости которого $E = 300$ кВ/м, расположен точечный диполь, модуль дипольного момента которого $p = 12$ пКл/м. Под действием этого поля диполь начинает вращаться вокруг оси, проходящей через его

центр. Рассчитать модуль угловой скорости вращения диполя в момент установления равновесия, если в начальный момент времени диполь был ориентирован перпендикулярно полю. Момент инерции диполя относительно оси вращения - $I = 2 \cdot 10^{-9}$ кг/м².

Решение:

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{2pE}{I}} = 60$ рад/с.

№4

Условие: Система состоит из двух концентрических равномерно заряженных сфер, радиусами $R_1 = 1$ м и $R_2 = 1.5$ м, с поверхностными плотностями зарядов $\sigma_1 = 4$ мкКл/м² и $\sigma_2 = 10$ мкКл/м², расположенных в вакууме. Рассчитать энергию электрического поля заключённую между сферами.

Решение:

Ответ: $W = \frac{2\pi\sigma_1^2 R_1^4}{\varepsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \approx 3.8$ Дж.

№5

Условие: Система состоит из двух концентрических проводящих сфер радиусами $R_1 = 10$ см и $R_2 = 40$ см, имеющими одинаковый заряд $q = 200$ нКл. Рассчитать энергию электрического поля заключённого между двумя этими сферами.

Решение:

Ответ: $W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \right) \approx 1.35$ мДж.

Конденсаторы.

№1

Условие: Получить формулы для расчёта ёмкости следующих конденсаторов (ε среды между обкладками принять равной 1):

- Сферического, если известно что радиус внутренней обкладки R_1 , а внешней R_2 ;
- Цилиндрического, если известно, что радиус внутренней обкладки R_1 , внешней R_2 , а высота равна d ;

- Плоского, если известно, что площадь обкладок равна S , а расстояние между обкладками d .

Решение:

Ответ: $C_{\text{сф}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, C_{\text{цил}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 d}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, C_{\text{пл}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$

№2

Условие: Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого d , расположен вертикально. Конденсатор заряжен до разности потенциалов U . На расстоянии b от отрицательно заряженной пластины находится положительно заряженная пылинка массой m и зарядом q . Рассчитать время за которое пылинка достигнет пластины конденсатора.

Решение:

Ответ: $t = \sqrt{\frac{2bmd}{qU}}.$

№3

Условие: К одной из пластин плоского заряженного конденсатора прилегает диэлектрическая пластинка толщиной d_1 и диэлектрической проницаемостью ε . Расстояние между пластинами конденсатора d , а разность потенциалов U . Рассчитать модули напряжённости E_1 и E_2 в диэлектрике и воздухе.

Решение:

Ответ: $E_1 = \frac{U}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}, E_2 = \frac{U\varepsilon}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}.$

№4

Условие: К одной из пластин плоского конденсатора прилегает пластина диэлектрика толщиной d_1 и диэлектрической проницаемостью ε . Расстояние между пластинами конденсатора d . После отключения конденсатора от источника питания пластину вынули. Рассчитать во сколько раз выросла разность потенциалов между пластинами конденсатора.

Решение:

Ответ: $n = \frac{\varepsilon d}{d_1 + \varepsilon d - \varepsilon d_1}$.

Постоянное магнитное поле

Индукция магнитного поля. Закон Био-Савара

№1

Условие: Заряженная элементарная частица движется со скоростью, модуль которой $v = 900$ м/с. В некоторый момент в точке наблюдения P модуль напряжённости электрического поля этой частицы $E = 600$ В/м, а угол между векторами скорости и напряжённости $\alpha = 30^\circ$. Рассчитать индукцию магнитного поля данной частицы.

Решение:

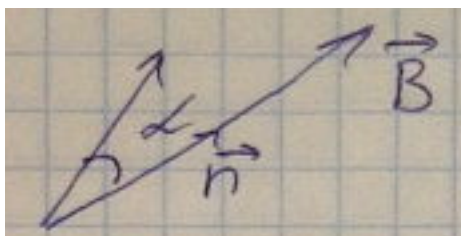


Рис. 10. Пояснительный рисунок.

$$B = \frac{\mu_0 v \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad (18)$$

$$E = k \frac{1}{r^2} \quad (19)$$

Умножим и разделим 18 на ε_0 чтобы сделать замену на E :

$$B = \mu_0 v \sin \alpha \varepsilon_0 E \quad (20)$$

Подставив числа, получим:

$$\begin{aligned} B &= 900 \cdot 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12.75 \cdot 10^{-7} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \\ &= 3 \cdot 10^{-12} = 3 \text{ пТл.} \end{aligned} \quad (21)$$

Ответ: $B = 3$ пТл.

№2

Условие: Используя закон Био-Савара, получить формулу для расчёта модуля вектора индукции магнитного поля, создаваемого током I , протекающим в линейном бесконечном проводнике в точке, расположенной на расстоянии r_0 от проводника.

Решение:

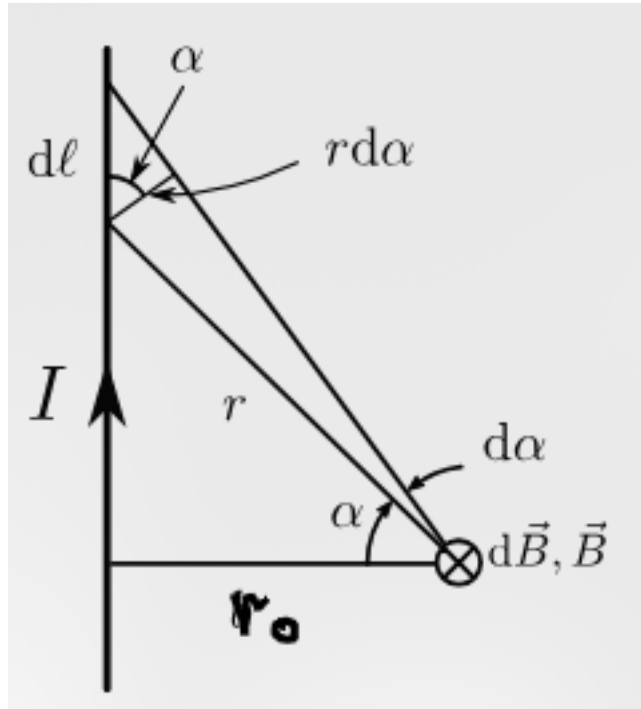


Рис. 11. Поясняющий рисунок.

Магнитное поле прямого тока, т.е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины. По свойству векторного произведения следует, что в произвольной точке A векторы $d\vec{B}$ от всех элементов токов имеют одно направление – за плоскость рисунка.

Поэтому можно складывать просто модули $d\vec{B}$. В нашем случае $d\vec{B}$ удобней выразить не через угол между $d\vec{l}$ и $\vec{r}$, а через α , тогда

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \cos \alpha}{r^3}. \quad (22)$$

Как видно из Рис. 11 $dl \cos \alpha = r d\alpha$ и $r = \frac{r_0}{\cos \alpha}$. Значит $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cos \alpha d\alpha}{r_0}$. Интегрируя последнее выражение по углу, получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1). \quad (23)$$

Это выражение позволяет находить магнитную индукцию от конечного проводника. В случае бесконечного проводника ($\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$):

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r_0} \quad (24)$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$.

№3

Условие: Рассчитать модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого конечным прямолинейным участком проводника, длины l , по которому протекает ток I , в точке отстоящей на произвольном расстоянии r_0 от оси проводника.

Решение:

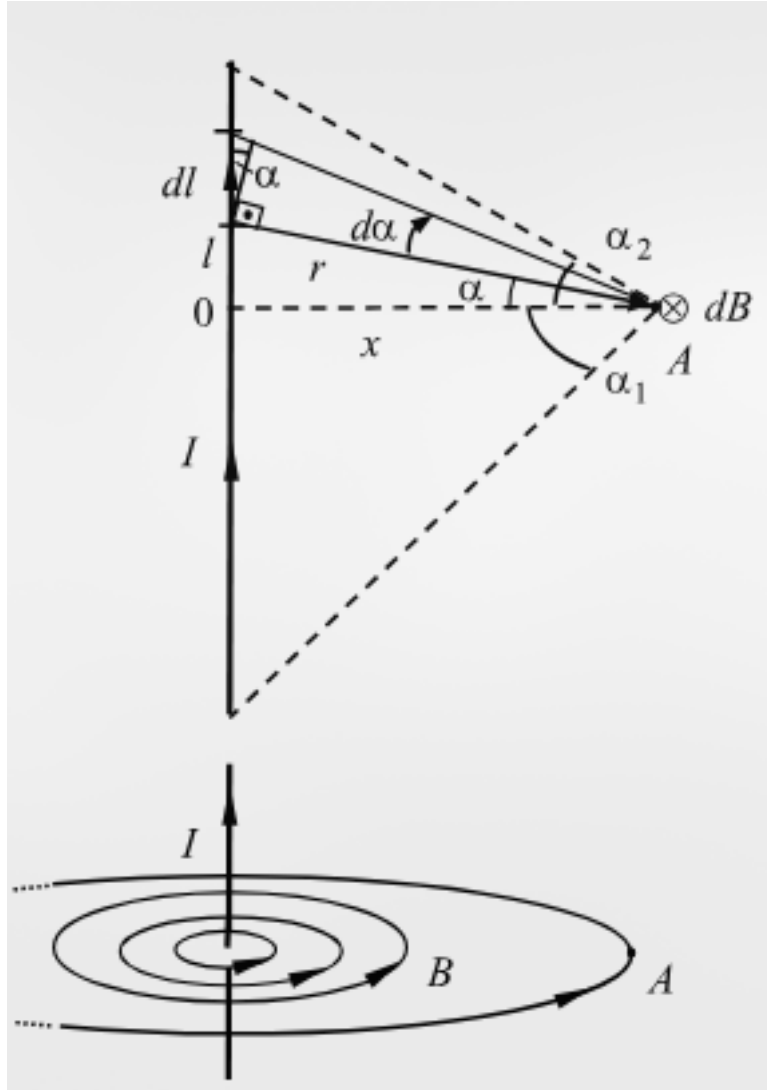


Рис. 12. Поясняющий рисунок.

Для решения задачи воспользуемся принципом суперпозиции. Разобьем проводник на элементарные участки $d\vec{l}$, по которым течет ток I (Рис. 12). Согласно закону Био-Савара, вектор магнитной индукции, создаваемого в точке A каждым элементом тока $I \cdot d\vec{l}$ равен

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (25)$$

Векторы $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ для всех участков проводника лежат в плоскости чертежа, поэтому в точке A векторы $d\vec{B}$ имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа (от нас $\otimes$), что продемонстрировано на нижнем рисунке. Сложение векторов $d\vec{B}$ сводится к сложению

их модулей. В качестве переменной интегрирования выберем угол α (угол между x и r). Выразим через угол α все остальные величины. Из Рис. 12 видно, что $r = \frac{x}{\cos \alpha}$, $l = x \operatorname{tg} \alpha$, поэтому длина элемента тока связана с приращением α соотношением

$$dl = x \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}. \quad (26)$$

Магнитная индукция, создаваемая элементом проводника, равна:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \frac{rd\alpha}{\cos \alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cos \alpha d\alpha. \quad (27)$$

Угол α для всех элементов прямого тока изменяется в пределах от α_1 до α_2 (Рис. 12), тогда

$$B = \int dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1), \quad (28)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1), \quad (29)$$

где α_1 и α_2 углы, под которыми мы видим из точки, в которой определяем поле, концы проводника. Эти углы являются алгебраическими величинами и отсчитываются от перпендикуляра, опущенного из точки на проводник. Положительное направление отсчета угла α соответствует углу, отсчитываемому от перпендикуляра в направлении тока.

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$.

№4

Условие: Замкнутый контур с током имеет вид прямоугольника с диагональю $d = 16$ см, угол между диагоналями $\alpha = 30^\circ$. Сила тока, протекающего по контуру $I = 5$ А. Рассчитать модуль индукции магнитного поля в центре контура.

Решение:

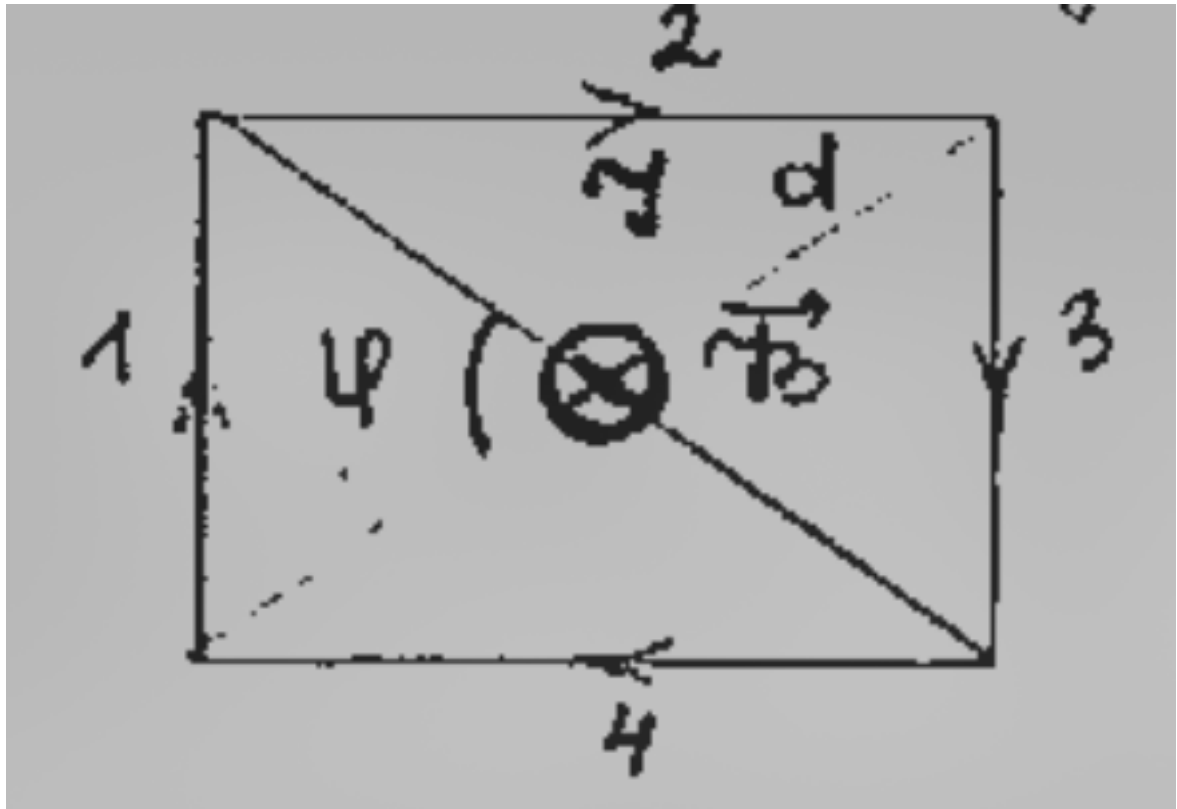


Рис. 13. Поясняющий рисунок.

В системе СИ: $d = 16 \text{ см} = 0.16 \text{ м}$.

По принципу суперпозиции для магнитного поля:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4. \quad (30)$$

Так как все $\vec{B}_i$ сонаправлены, то $B = 2(B_1 + B_2)$. По закону Био-Савара-Лапласа:

$$\begin{aligned} B &= 2 \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\cos \frac{\pi-\varphi}{2}}{\frac{d}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} + \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\frac{d}{2} \sin \frac{\varphi}{2}} \right) \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{1}{\frac{d}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \right) = \frac{4\mu_0 I}{\pi d \sin \varphi} \end{aligned} \quad (31)$$

Подставив числа из условия, получим:

$$B = \frac{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{\pi \cdot 0.16 \cdot \sin 30^\circ} \approx 0.1 \quad (32)$$

Ответ: $B = 0.1$ мТл.

№5

Условие: Определить модуль вектора индукции магнитного поля на оси кругового тока I радиуса R , как функцию $B(z)$, где z расстояние до центра контура.

Решение:

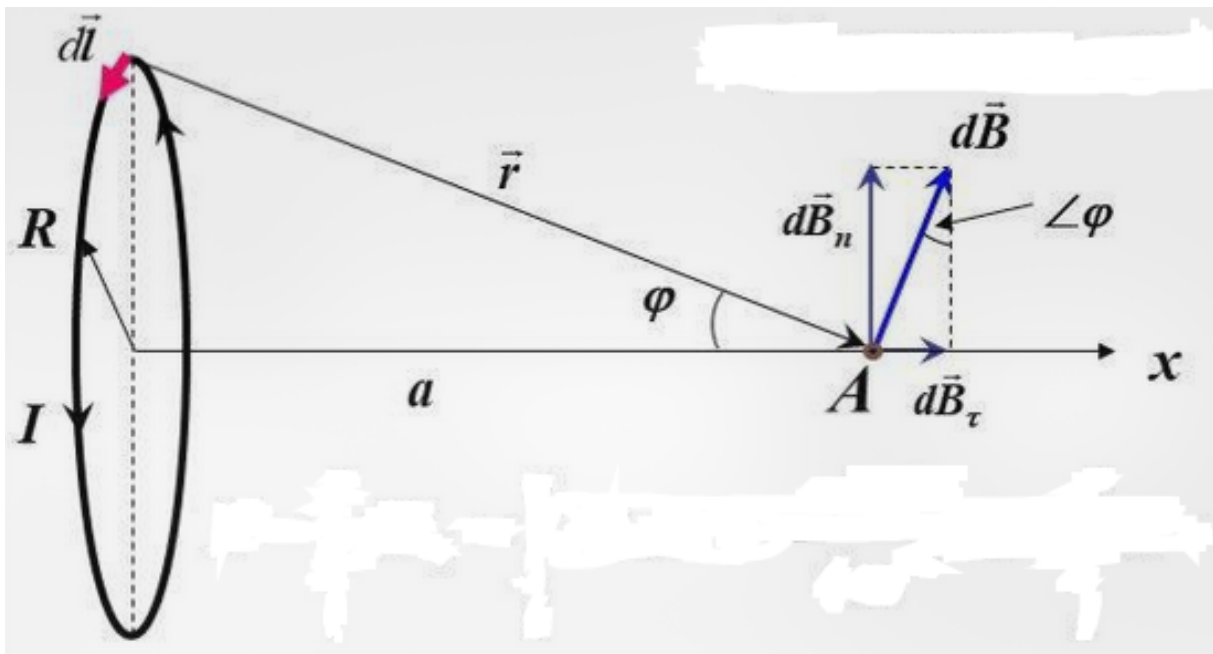


Рис. 14. Поясняющий рисунок.

Магнитное поле на оси кругового тока.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} B &= \int_l dB_\tau = \int_l dB \sin \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi \int_l dl = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi 2\pi R = \frac{\mu_0 I R}{2\pi r^2} \sin \varphi \end{aligned} \quad (34)$$

Преобразуем полученное выражение, учитывая, что $\sin \varphi = \frac{R}{r}$, $r^2 = R^2 + a^2$. После подстановки получим

$$B = \frac{\mu_0 I R}{2r^2} \sin \varphi = \frac{\mu_0 I R}{2(R^2 + a^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (35)$$

Ответ: $B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$

№6

Условие: По тонкому замкнутому проводнику (Рис. 15) течёт ток, сила которого $I = 5$ А. Радиус изогнутой части проводника $R = 120$ мм, угол $\varphi = 90^\circ$. Рассчитать модуль вектора магнитной индукции в точке O .



Рис. 15. Проводник.

Решение:

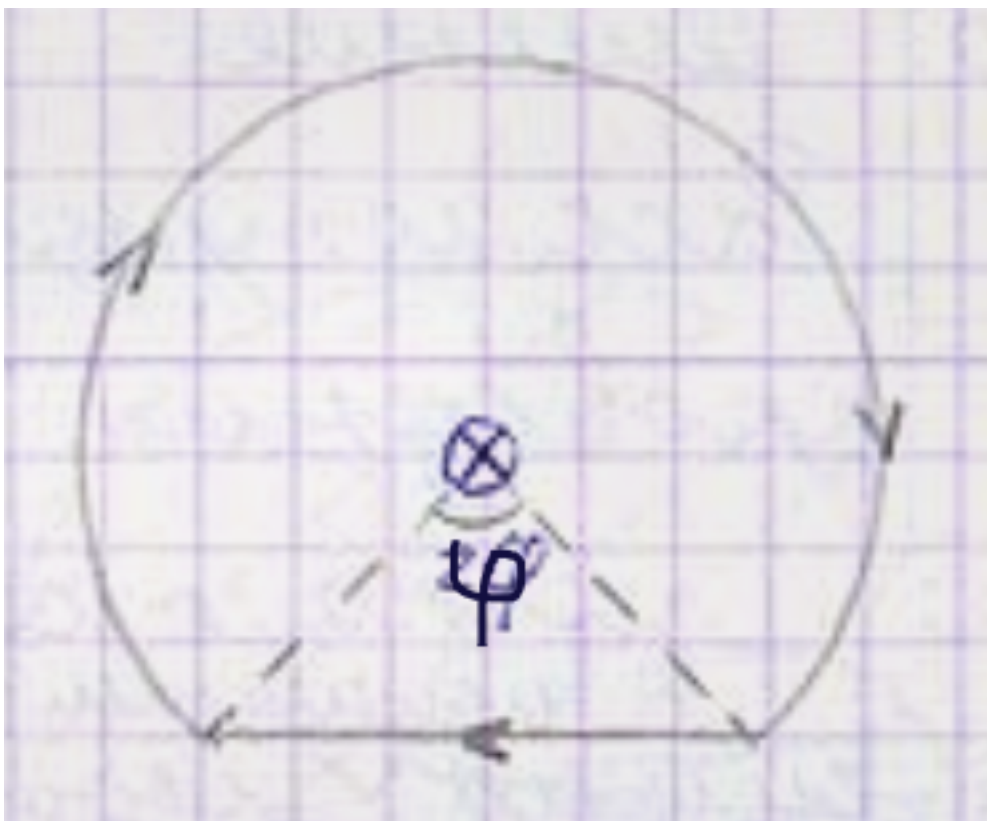


Рис. 16. Поясняющий рисунок.

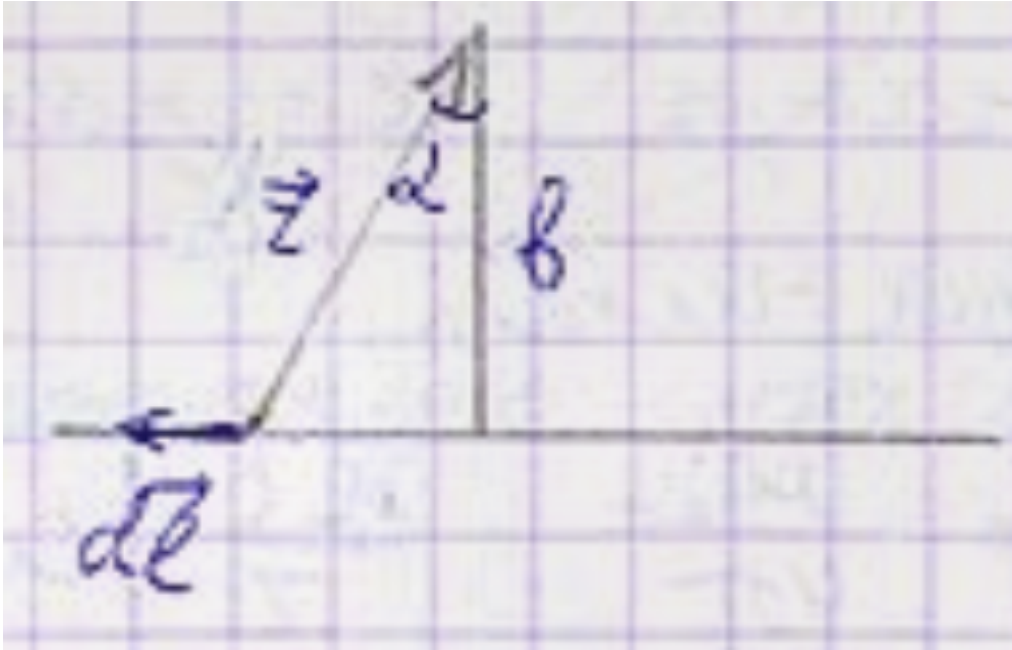
Пусть $\theta = \frac{\varphi}{2} = 45^\circ$.

Для части окружности:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi-2\theta} R d\alpha = \frac{\mu_0 I(\pi - \theta)}{2\pi R}. \quad (36)$$

Для отрезка:

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \angle(d\vec{l}; \vec{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} \cos \alpha \quad (37)$$



Поясняющий рисунок. 17. Рис.

$$\cos \alpha dl = z d\alpha \Rightarrow dl = \frac{z d\alpha}{\cos \alpha} \quad (38)$$

$$z = \frac{b}{\cos \alpha}, \quad b = R \cos \theta \quad (39)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{d\alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot b} \cdot \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos \theta} \cdot 2 \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tg} \theta \quad (40)$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \theta + \tan \theta) \quad (41)$$

Подставив числа, получим:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi \cdot 0.12} \left(\pi - \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) \approx 28 \text{ мкТл.} \quad (42)$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(1 + \frac{3}{4}\pi \right) \approx 28 \text{ мкТл.}$

№7

Условие: Замкнутый контур, по которому течёт ток силы I имеет форму показанную на (Рис. 18). Радиус окружности R , длина стороны квадрата a . Найти индукцию магнитного поля в точке O .

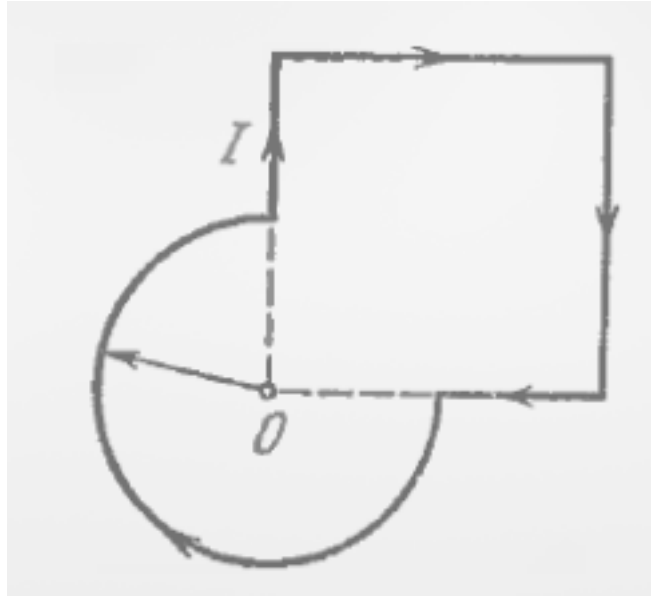


Рис. 18. Контур.

Решение:

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{3\pi}{2R} + \frac{\sqrt{2}}{a} \right).$

№8

Условие: Тонкий провод с изоляцией образует плоскую спираль из $N = 200$ плотно прилегающих витков, по которым течёт ток $I = 5$ мА. Радиус внутреннего витка $a = 100$ мм, радиус внешнего витка $b = 200$ мм. Рассчитать индукцию магнитного поля в центре спирали.

Решение: Магнитная индукция одного витка (окружности):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2z} \quad (43)$$

$$dN = \frac{N}{b-a} dz \quad (44)$$

Подставим 43 и 44 в

$$B = \int B_1 dN = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \int_a^b \frac{dz}{z} = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln z \Big|_a^b = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a} \quad (45)$$

Подставим числа и получим

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 200}{2(0.2 - 0.1)} \ln \frac{0.2}{0.1} \approx 4.4 \text{ мкТл.} \quad (46)$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a} \approx 4.4 \text{ мкТл.}$

№9

Условие: В параллельных плоскостях, расположенных на расстоянии $d = 8 \text{ см}$ друг от друга на одной оси находятся два круговых витка радиуса $R = 5 \text{ см}$ каждый. По виткам в одном направлении текут токи $I_1 = I_2 = 2 \text{ А}$. Рассчитать напряжённость магнитного поля в центре одного из витков.

Решение:

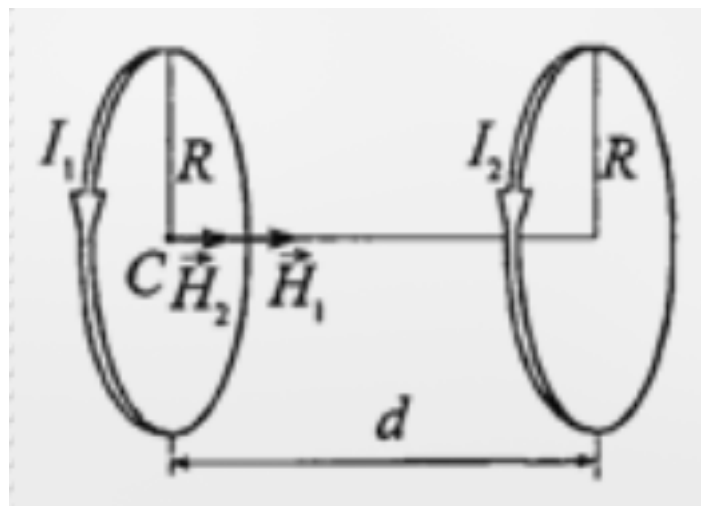


Рис. 19. Поясняющий рисунок.

Согласно принципу суперпозиции напряженность в точке C равна

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2, \quad \text{где } H = \frac{I_1}{2R}, \quad (47)$$

$$H_2 = \frac{I_2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (48)$$

Если токи текут в одном направлении, то $H = H_1 + H_2$. По условию

$$I_1 = I_2 = I \quad (49)$$

Тогда

$$H = \frac{I}{2R} + \frac{IR^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (50)$$

Подставив числа, получим:

$$H = \frac{2}{2 \cdot 0.05} + \frac{2 \cdot 0.05^2}{2(0.05^2 + 0.08^2)^{\frac{3}{2}}} \approx 23 \text{ А/м}. \quad (51)$$

Ответ: $H = \frac{I}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{R^2}{(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \approx 23 \text{ А/м}.$

№10

Условие: Рассчитать модуль вектора магнитной индукции на оси соленоида, длина которого l , количество витков проволоки, плотно прилегающих друг к другу равно N . Через витки течёт ток I , радиус витков R_0 .

Решение:

Ответ: $B(z) = \frac{\mu_0 I N}{2l} \left(\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{R_0^2 + (\frac{l}{2} - z)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{R_0^2 + (\frac{l}{2} + z)^2}} \right).$

Закон полного тока

№1

Условие: Используя закон полного тока, найти модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого током текущим по коаксиальному кабелю. Ток I течёт по центральной жиле радиуса R_1 , и возвращается по оболочке, внутренний и внешний радиусы которой R_2 и R_3 соответственно. Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком. Магнитную проницаемость всюду считать равной 1.

Решение:

Ответ: $B(r < R_1) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$, $B(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $B(R_2 < r < R_3) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$, $B(r > R_3) = 0$.

№2

Условие: Определить индукцию магнитного поля тока, равномерно распределённого:

- по бесконечной плоскости с линейной плотностью j ;
- по двум параллельным бесконечным плоскостям с линейными плотностями j и $-j$.

Решение:

а)

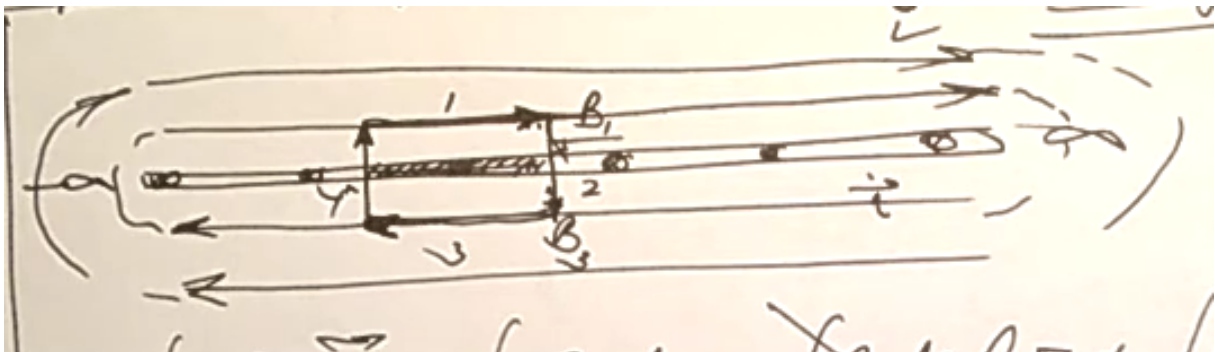


Рис. 20. Поясняющий рисунок.

По закону полного тока:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{полн}} \quad (52)$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} B_1 \cdot dl + \int_{l_2} B_2 \cdot dl \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \int_{l_3} B_3 dl \cos 0 + \int_{l_4} B_4 dl \cos \frac{\pi}{2} = 2Bl \quad (53)$$

$$I_{\text{полн}} = j \cdot l \quad (54)$$

$$2Bl = \mu_0 j l \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 j \quad (55)$$

б)

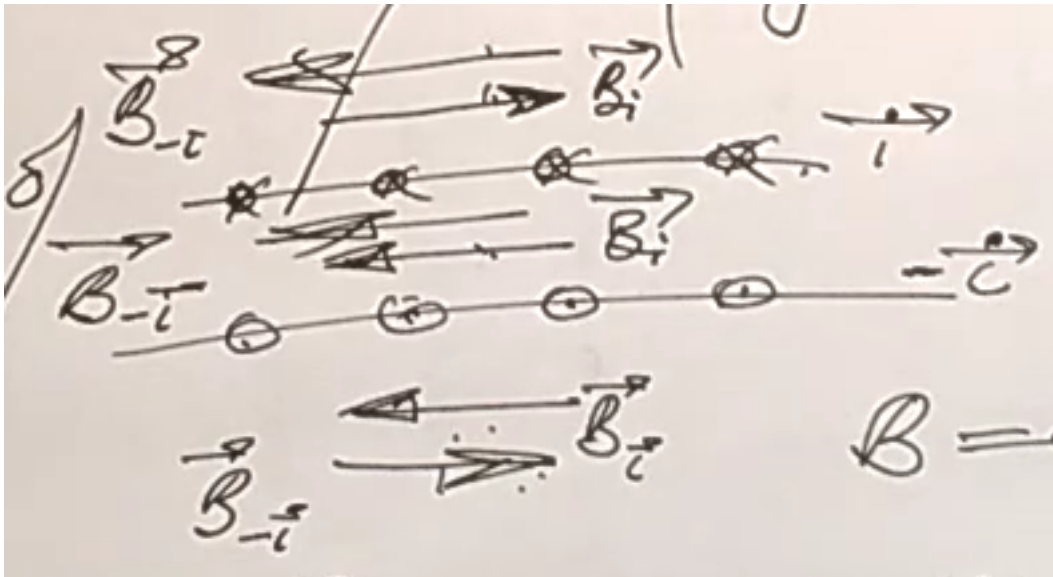


Рис. 21. Поясняющий рисунок.

$$\vec{B} = \vec{B}_j + \vec{B}_{-j} \quad (56)$$

$B = 0$ вне плоскостей.

$$B = 2B_{\text{пл}} = \mu_0 j \text{ между плоскостями.} \quad (57)$$

Ответ: а) $B = \frac{\mu_0 j}{2}$, б) $B = \mu_0 j$.

№3

Условие: Однородный ток, плотность которого j течёт внутри неограниченной пластины толщины $2d$ параллельно её поверхности. Найти индукцию магнитного поля этого тока, как функцию расстояния x от средней плоскости пластины. Магнитную проницаемость всюду считать равной 1.

Решение:

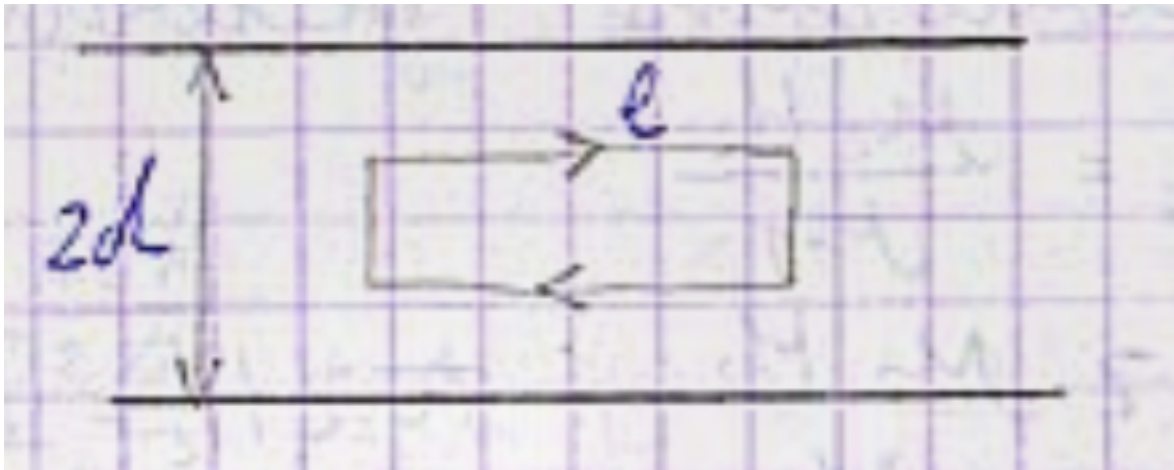


Рис. 22. Поясняющий рисунок.

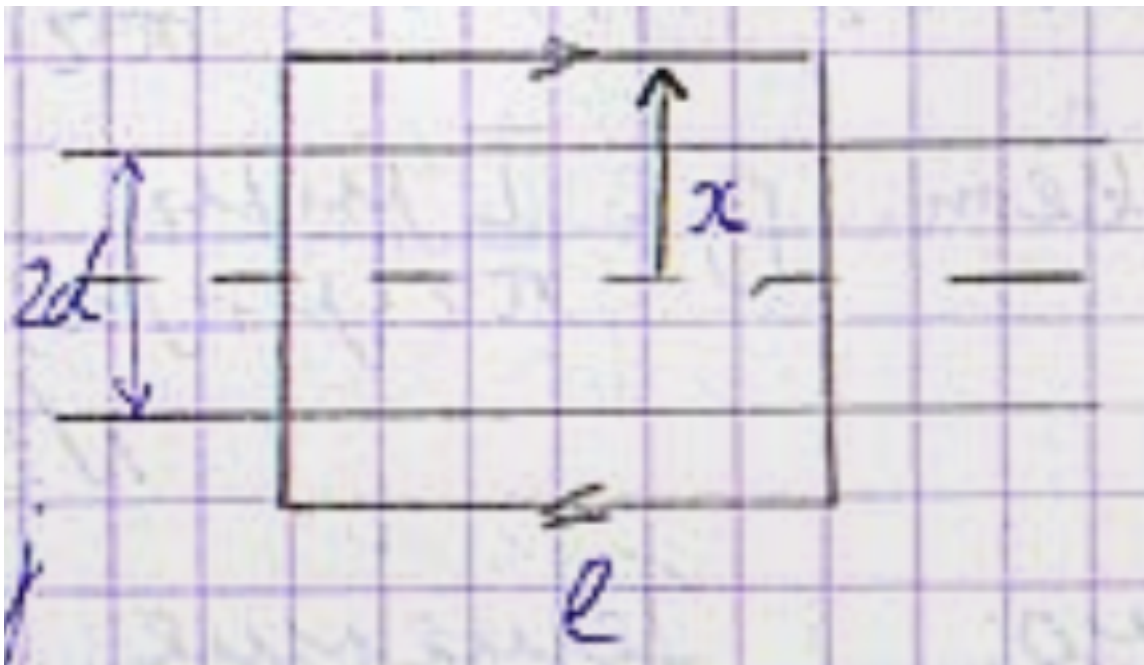


Рис. 23. Поясняющий рисунок.

По теореме о циркуляции

$$\oint B dz = \mu_0 j 2xl \quad (58)$$

$$I = 2xlj \quad (59)$$

Если $l \gg x$, то интегралом по $\perp$ составляющим можно пренебречь, тогда:

$$B \cdot 2l = \mu_0 \cdot 2xlj \quad (60)$$

$$B = \mu_0 xj \quad (61)$$

Возьмем $x > d$

$$\oint B dz = \mu_0 I = \mu_0 \cdot 2dlj \quad (62)$$

$$B \cdot 2l = \mu_0 \cdot 2dlj, \quad B = \mu_0 dj \quad (63)$$

Ответ: $B(x > d) = \mu_0 dj$, $B(x < d) = \mu_0 xj$.

№4

Условие: Найти вектор плотности тока, как функцию расстояния r от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от r как $B(r) = \beta r^\alpha$, где β и α положительные постоянные.

Решение:

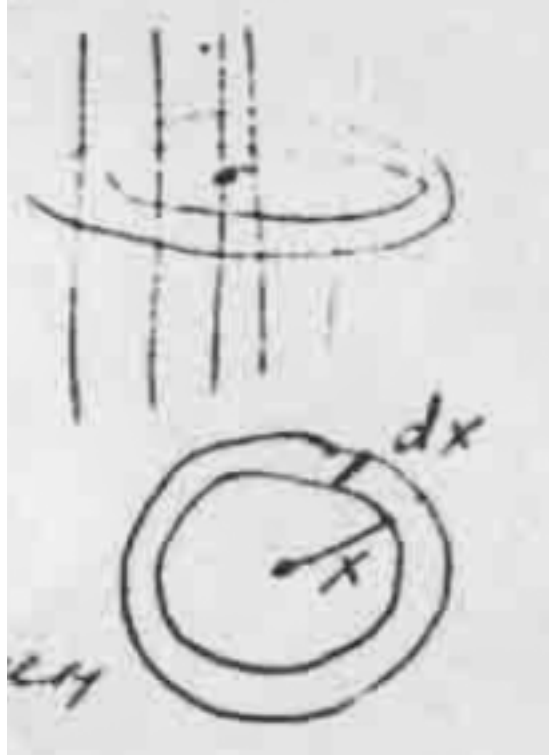


Рис. 24. Пояснительный рисунок.

Возьмем контур, $\perp$ пучку радиуса r и центром в центре пучка, тогда

$$\oint B dr = \beta r^2 \cdot 2\pi r = 2\pi\beta r^{\alpha+1} \quad (64)$$

Пусть $j = j(r)$, тогда

$$\int_r j dS = \int_0^r 2\pi x j(x) dx \quad (65)$$

Итого

$$\begin{aligned} 2\pi\beta r^{\alpha+1} &= \int_0^r 2\pi\mu_0 x j(x) dx = \\ &= \beta r^{\alpha+1} = \mu_0 \int_0^r x j(x) dx \end{aligned} \quad (66)$$

Дифференцируем по r

$$\beta(\alpha + 1)r^\alpha = \mu_0 r j(r) \Rightarrow j(r) = \frac{\beta(\alpha + 1)}{\mu_0} r^{\alpha-1} \quad (67)$$

Ответ: $\vec{j}(r) = \frac{\beta(\alpha+1)r^{\alpha-1}}{\mu_0} \vec{e}_z$.

№5

Условие: Используя закон полного тока, рассчитать индукцию магнитного поля внутри соленоида длиной $L = 0.5$ м, содержащего $N = 1000$ витков плотной обмотки, если сопротивление обмоток $R = 120$ Ом, а напряжение на её концах $U = 60$ В.

Решение:

$$\oint_L B dL = \mu_0 \sum_i I_i, \quad BL = \mu_0 IN \quad (68)$$

$$I = \frac{U}{R}, \quad B = \frac{\mu_0 UN}{RL} \quad (69)$$

Подставим числа:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 1000}{120 \cdot 0.5} \approx 1.25 \text{ мТл.} \quad (70)$$

Ответ: $B = 1.25$ мТл.

№6

Условие: По бесконечному прямому проводу, радиус сечения которого R , течёт постоянный ток, плотность которого $\vec{j}$. Найти вектор магнитной индукции поля, создаваемого этим током, в точке, положение которой относительно оси провода определяется радиус-вектором $\vec{r}$.

Решение:



Рис. 25. Поясняющий рисунок.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int B \cdot dl \cdot \cos 0^\circ = B \cdot 2\pi r \quad (71)$$

$$I_{\text{полн}} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int j dS = j \cdot \pi r^2 \quad (72)$$

При $r < R$:

$$B \cdot 2\pi r = j\pi r^2 \mu_0 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 j r \quad (73)$$

$$\vec{B}_1 = B_1 \cdot \vec{e}_\varphi \quad \vec{B}_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} \times \vec{r} = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j}, \vec{r}] \quad (74)$$

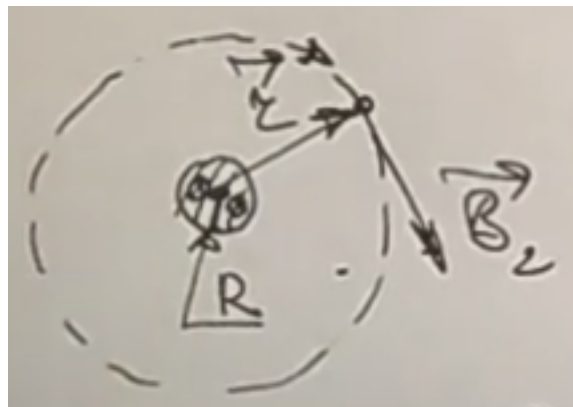


Рис. 26. Поясняющий рисунок.

При $r > R$:

$$I_{\text{полн}} = j \cdot \pi R^2 \quad (75)$$

$$B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi R^2 \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 R^2 j}{2r} \vec{e}_\varphi \quad (76)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 R^2}{2} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^2} \quad (77)$$

Ответ: $\vec{B}(r < R) = \frac{\mu_0 [\vec{j}; \vec{r}]}{2}, \vec{B}(r > R) = \frac{\mu_0 R^2 [\vec{j}; \vec{r}]}{2}.$

№7

Условие: По длинному цилиндрическому проводу течёт ток, плотность которого $\vec{j}$. Внутри провода имеется цилиндрическая полость, идущая параллельно оси провода. Расстояние от оси провода до оси полости задаётся вектором $\vec{l}$. Найти вектор индукции магнитного поля внутри полости.

Решение:

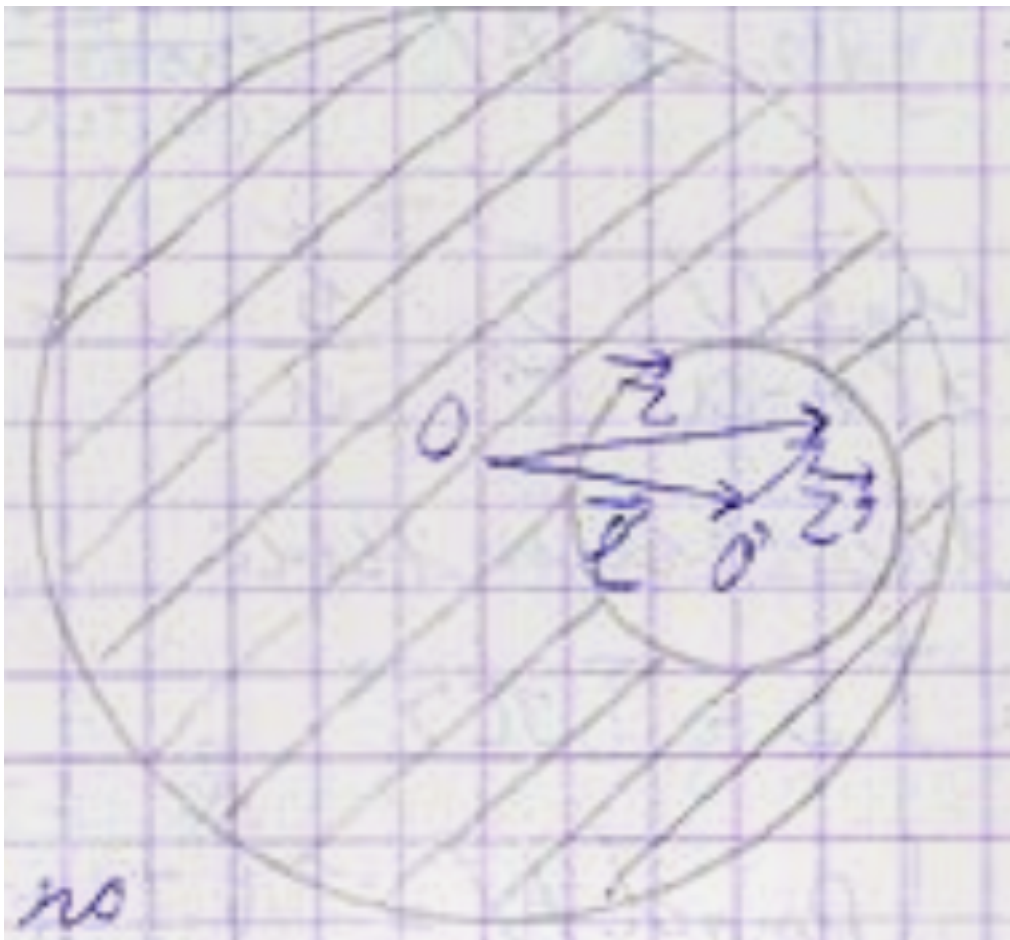


Рис. 27. Поясняющий рисунок.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}', \quad (78)$$

где $\vec{B}_0$ - если проводник сплошной.

$\vec{B}'$ - от тока, текущего по той части проводника, которую удалили.

По теореме о циркуляции:

$$2\pi z B_0 = \mu_0 \pi z^2 j \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2} \mu_0 z j \quad (79)$$

Или в векторной форме

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{z}] \quad (80)$$

$$\vec{B}' = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{z}'] \quad (81)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{z} - \vec{z}'] = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{l}] \quad (82)$$

Ответ: $\vec{B} = \frac{\mu_0 [\vec{j}; \vec{l}]}{2}$.

№8

Условие: Ток I течёт по длинному проводу и затем равномерно растекается по всем направлениям однородной проводящей среды (Рис. 28). Рассчитать индукцию магнитного поля в точке A , отстоящей от точки O на расстоянии r под углом θ .

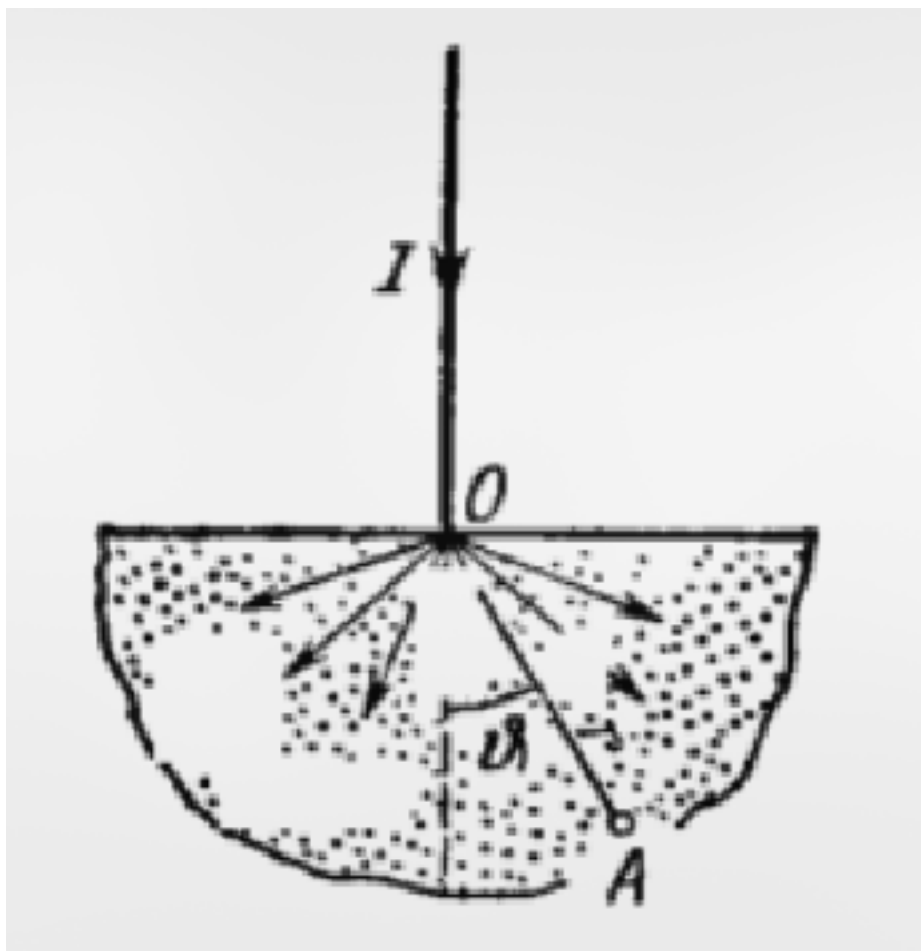


Рис. 28. Проводящая среда.

Решение:

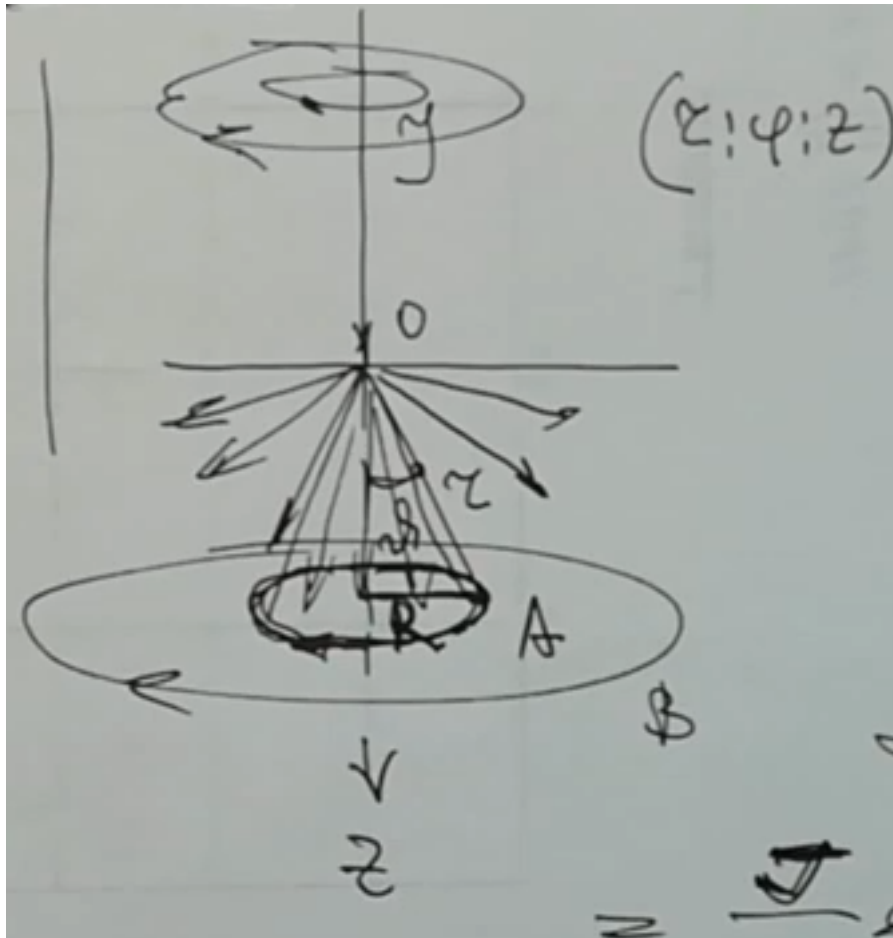


Рис. 29. Поясняющий рисунок.

Система обладает аксиальной симметрией.

$$\vec{B}(0; B_\varphi; z) \Rightarrow \oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{охв}}. \quad (83)$$

$$B = B(R) \quad (84)$$

$$B \cdot 2\pi R = B 2\pi r \sin \theta \quad (85)$$

$$J = \frac{dI}{d\omega} = \frac{I}{2\pi} = \text{const} \quad (86)$$

$$I_{\text{охв}} = \int_0^\theta I \cdot \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2\pi} 2\pi \cos \theta \Big|_\theta^0 = I(1 - \cos \theta) \quad (87)$$

85 и 87 подставляем в 83

$$B \cdot 2\pi r \sin \theta = \mu_0 I (1 - \cos \theta) \quad (88)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \sin \theta} (1 - \cos \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (89)$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tan \frac{\theta}{2}$.

№9

Условие: Ток I течёт по длинному прямому проводу круглого сечения. Рассчитать поток магнитного поля через половину осевого сечения провода приходящейся на один метр его длины.

Решение: Считаем, что ток распределен по сечению равномерно с плоскостью

$$j = \frac{I}{\pi R^2} \quad (90)$$

Согласно теореме Стокса:

$$\oint B dr = \mu_0 I \text{ (через сечение)}. \quad (91)$$

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2 \quad (92)$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{r^2}{R^2} \frac{1}{r} \quad (93)$$

Поток через половину сечения на единицу длины

$$\Phi = \int_0^R dr B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^R \frac{r dr}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I. \quad (94)$$

Ответ: $\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$.

Магнитное поле при наличии Магнетиков. Магнитный момент.

№1

Условие: Найти магнитный момент тонкого кругового витка с током, если радиус витка $R = 100$ мм, а индукция магнитного поля в центре $B = 6$ мкТл.

Решение:



Рис. 30. Поясняющий рисунок

$$p_m = I \cdot S; \quad B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{4\pi \cdot R^2} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot 2\pi \cdot R}{4\pi \cdot R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R} \Rightarrow I = \frac{B \cdot 2R}{\mu_0} \quad (95)$$

$$p_m = \frac{B \cdot 2R}{\mu_0} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{2\pi \cdot B \cdot R^3}{\mu_0} \quad (96)$$

Подставим числа и получим

$$p_m = \frac{6.28 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 0.1^3}{1.27 \cdot 10^{-6}} \approx 30 \text{ мА/м}^2 \quad (97)$$

Ответ: $p_m = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} \approx 30 \text{ мА/м}^2$.

№2

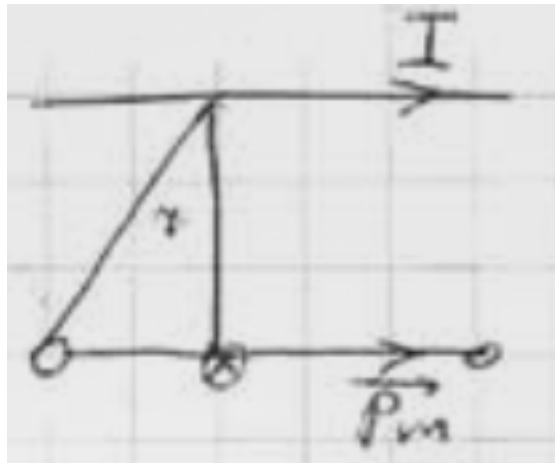
Условие: Магнитный диполь, момент которого $\vec{p}_m$ поместили на расстоянии r от длинного провода по которому течёт ток I . Найти вектор силы действующей на диполь со стороны магнитного поля, создаваемого током I если вектор магнитного момента:

- параллелен проводнику;
- направлен по вектору $\vec{r}$;

- совпадает по направлению с магнитным полем тока I .

Решение:

а)

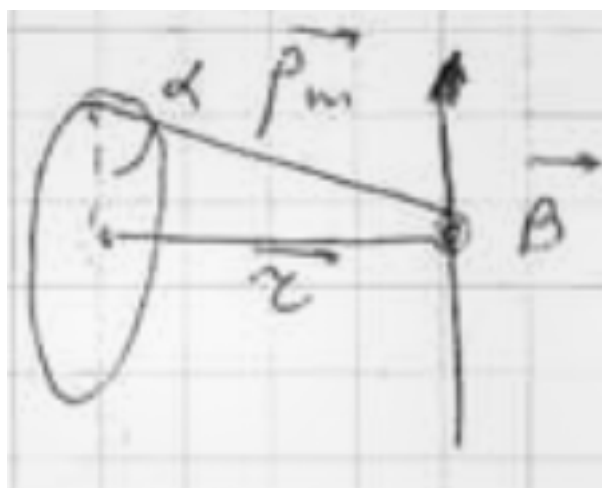


31.

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha \quad (98)$$

$$\cos \alpha = 0 \Rightarrow F = 0 \quad (99)$$

б)



32.

$$W_{\text{II}} = -p_m B \cos \varphi \quad (100)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \cos \varphi} \quad (101)$$

$$r' = r \cos \varphi \quad (102)$$

$$F_x = -p_m \frac{\partial B}{\partial r} \cos \varphi = - \left(p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi \cos \varphi} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right) \cos \varphi = \frac{p_m \mu_0 I}{2\pi r^2} \quad (103)$$

в)

$$F_x = -p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha = \frac{p_m \mu_0 I}{2\pi r^2}. \quad (104)$$

Ответ: а) $\vec{F} = \vec{0}$, б) $\vec{F} = -\frac{\mu_0 p_m I}{2\pi r^2} \vec{e}_\varphi$, в) $\vec{F} = -\frac{\mu_0 p_m I}{2\pi r^2} \vec{e}_r$.

№3

Условие: Тонкий диск из диэлектрика, несущий заряд поверхностная плотность которого σ равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Рассчитать:

- индукцию магнитного поля в центре диска;
- магнитный момент диска.

Решение:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad dq = \sigma dS \quad (105)$$

$$I = \frac{\sigma dS \omega}{2\pi} = \frac{\sigma \omega 2\pi r dr}{2\pi} = \sigma \omega r dr \quad (106)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I[dl, r]}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl r \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I \cdot 2\pi \cdot r}{4\pi \cdot r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r} \quad (107)$$

$$\text{а) } B = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr}{2R} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$$

$$\text{б) } p_m = \int I dS = \int \sigma \omega \pi r^3 dr = \frac{\sigma \omega \pi R^4}{4}$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega R$, $p_m = \frac{\pi \sigma R^4}{4}$.

№4

Условие: Сферическая поверхность радиуса R , состоящая из диэлектрика вращается равномерно вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω . Рассчитать магнитную индукцию в центре сферы если поверхностная плотность зарядов равна σ .

Решение:

Ответ: $B = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R$.

№5

Условие: Вдоль оси бесконечного прямого цилиндра радиуса R_0 течёт линейный ток силой I . Магнитная проницаемость вещества цилиндра μ . Вокруг цилиндра вакуум. Найти:

- напряженность магнитного поля $\vec{H}$;
- индукция магнитного поля $\vec{B}$;
- намагниченность $\vec{J}$;

во всех точках пространства. Рассчитать объёмную и поверхностную плотность молекулярных токов.

Решение:

Ответ: $\vec{H}(r < R_0) = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \vec{H}(r > R_0)$, $\vec{B}(r < R_0) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$, $\vec{J}(r < R_0) = \frac{I(\mu-1)}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$, $\vec{B}(r > R_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$, $\vec{J}(r > R_0) = \vec{0}$, $\vec{j}_{\text{мо}} = \vec{0}$, $j_{\text{мп}} = \frac{I(1-\mu)}{2\pi R_0}$.

№6

Условие: Среда состоит из однородного изотропного магнетика и вакуума. Модуль вектора индукция магнитного поля вблизи поверхности магнетика со стороны вакуума равен B . Найти модуль индукции магнитного поля B' в магнетике вблизи его поверхности, если вектор B составляет угол α с нормалью к поверхности раздела магнетика и

вакуума (поверхность можно считать плоскостью), а магнитная проницаемость магнетика μ .

Решение:

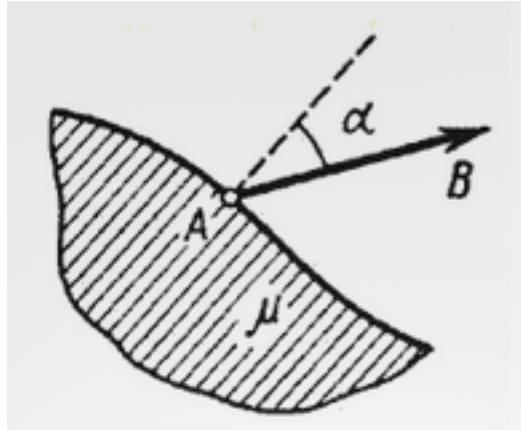


Рис. 33. Поясняющий рисунок.

$$B' = \sqrt{B_n^2 + B_\tau^2} \quad (108)$$

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (109)$$

$$H_{2\tau} = H_{1\tau} \quad (110)$$

$$B_n = B \cos \alpha \quad (111)$$

$$B_\tau = \mu \mu_0 H_\tau = \mu \mu_0 H_{0\tau} = \mu (B)_\tau = \mu B \sin \alpha \quad (112)$$

$$B' = B \sqrt{\cos^2 \alpha + \mu^2 \sin^2 \alpha} \quad (113)$$

Ответ: $B' = B \sqrt{\cos^2 \alpha + \mu^2 \sin^2 \alpha}$.

№7

Условие: Воспользовавшись условиями предыдущей задачи рассчитать циркуляцию вектора $\vec{B}$ по замкнутому квадратному контуру, длина стороны которого l . Граница раздела сред пересекает контур параллельно двум его противоположным сторонам.

Решение:

Ответ: $\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = B \sin \alpha l (1 - \mu)$.

№8

Условие: По длинному цилиндрическому проводу течёт ток перпендикулярно плоскости поперечного сечения. Сила тока I . Провод изготовлен из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ . Найти:

- силу поверхностного молекулярного тока $I'_{\text{пов}}$;
- силу объёмного молекулярного тока $I'_{\text{об}}$.

Определить как эти токи направлены друг относительно друга.

Решение: Внутри цилиндрического провода имеется внешний ток плотности $\frac{I}{\pi R^2}$. Это дает магнитное поле H_ϕ с

$$H_\phi 2\pi r = I \frac{r^2}{R^2} \quad \text{или,} \quad H_\phi = \frac{Ir}{2\pi R^2} \quad (114)$$

Из этого $B_\phi = \frac{\mu\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$ и $J_\phi = \frac{\mu-1}{2\pi} \frac{Ir}{R^2} = \frac{\chi I}{2\pi R} dl = \chi I =$ намагниченность.

Следовательно, объёмный молекулярный ток,

$$\oint_{r=R} \vec{J}_\phi \cdot d\vec{r} = \int \frac{\chi I}{2\pi R} dl = \chi I \quad (115)$$

Поверхностный ток получается с использованием эквивалентности плотности поверхностного тока к $\vec{J} \times \vec{n}$, это приводит к плотности поверхностного тока в z -направлении $-\frac{\chi I}{2\pi R}$

Поверхностный молекулярный ток

$$I'_{\text{пов}} = -\frac{\chi I}{2\pi R} (2\pi R) = -\chi I \quad (116)$$

Оба тока имеют противоположные знаки.

Ответ: $I_{\text{мо}} = I_\chi$, $I_{\text{мп}} = -I_\chi$.

№9

Условие: Длинный соленоид заполнен неоднородным парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого зависит от расстояния до оси как $\chi = \alpha r^2$. На оси соленоида магнитная индукция равна B_0 .

Рассчитать, как функцию r :

- намагниченность магнетика;
- плотности объемного молекулярного тока.

Решение:

Ответ: $J(r) = \frac{B_0 \alpha r^2}{\mu_0}$, $j(r) = \frac{2\alpha B_0}{\mu_0} r$.

Частица в магнитном поле

№1

Условие: Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью перпендикулярной полю. Напряжённость магнитного поля $H = 103 \text{ А/м}$. Ускоряющая разность потенциалов, придавшая электрону скорость $U = 400 \text{ В}$. Рассчитать радиус кривизны траектории R и частоту ν обращения электрона в магнитном поле.

Решение:

Ответ: $R = \frac{1}{\mu_0 H} \sqrt{\frac{2U}{q_m}} \approx 5.37 \text{ см}, \nu = \frac{\mu_0 H q_m}{2\pi} \approx 35 \text{ МГц}$.

№2

Условие: В однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 0.4 \text{ Тл}$ перпендикулярно полю с постоянной скоростью влетает заряженная частица. В течении 6 мкс включается постоянное электрическое поле напряжённостью $E = 300 \text{ В/м}$ сонаправленно магнитному полю. Рассчитать шаг винтовой траектории частицы после выключения электрического поля.

Решение: По формуле силы Лоренца:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (117)$$

До включения электрического поля:

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (118)$$

Частица движется по окружности

$$F_{\text{маг}} = qvB. \quad (119)$$

Сила Лоренца равна центростремительной силе:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} \quad (120)$$

Угловая частота:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} \quad (121)$$

Когда включается электрическое поле вдоль магнитного поля, на частицу вдоль B действует $F = qE$. Соответственно вдоль оси B ускорение $a = \frac{qE}{m}$.

За время Δt скорость вдоль оси становится:

$$v = a\Delta t = \frac{qE}{m}\Delta t \quad (122)$$

После выключения электрического поля частица летит в магнитном поле с постоянной перпендикулярной скоростью и параллельной, то есть по винтовой траектории.

Расстояние за один оборот:

$$h = vT, \quad (123)$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$ - период кругового движения.

Подставим:

$$h = vT = \frac{qE}{m}\Delta t \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi E\Delta t}{B} \quad (124)$$

Подставим числа:

$$h = \frac{2\pi \cdot 300 \text{ В/м} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ с}}{0.4 \text{ Тл}} \approx 0.28 \text{ м.} \quad (125)$$

Ответ: $h = \frac{2\pi E}{B}t \approx 0.028 \text{ м.}$

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

№ 1

Условие: В однородное магнитное поле, индукция которого $B = 1$ Тл внесли квадратный контур со стороной $a = 10$ см, по которому течёт ток $I = 100$ А, после чего контур свободно устанавливается в магнитном поле под действием механического момента. Рассчитать работу A' , совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон на угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Решение:

Ответ: $A = B I a^2 = 1$ Дж.

№ 2

Условие: Магнитное поле создаётся длинным прямым проводником, по которому течёт ток I_0 . В одной плоскости с проводником расположена квадратная рамка с током I , сторона рамки a . Рассчитать:

- силу ампера действующую на рамку;
- работу, которую необходимо совершить при медленном повороте рамки вокруг оси параллельной проводнику на угол 180° , проходящей через центры противоположных сторон рамки;

если расстояние от этой оси до проводника в η раз больше стороны рамки.

Решение:

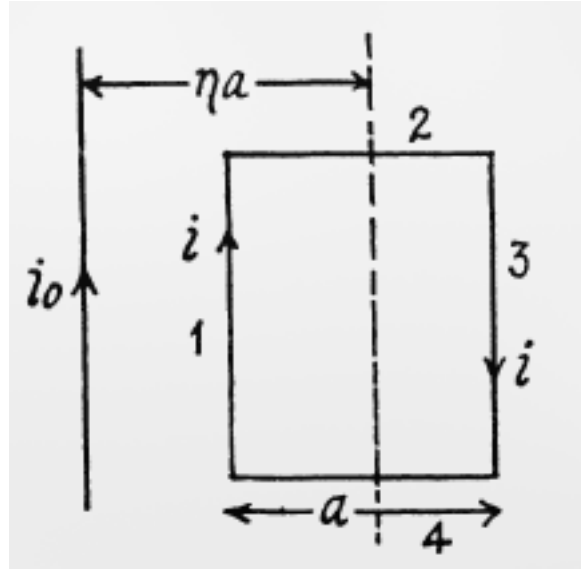


Рис. 34. Поясняющий рисунок.

а) Как видно из условия, силы Ампера на сторонах (2) и (4) равны по величине, но противоположны по направлению. Следовательно, чистая эффективная сила на рамке является результатом сил, испытываемых сторонами (1) и (3).

Теперь сила Ампера на (1),

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II_0}{\left(\eta - \frac{1}{2}\right)} \quad (126)$$

и на (3),

$$F_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 I}{\left(\eta + \frac{1}{2}\right)} \quad (127)$$

Итак, результирующая сила на рамке $= F_1 - F_3$, (поскольку они противоположны).

$$= \frac{2\mu_0 II_0}{\pi(4\eta^2 - 1)} \quad (128)$$

б) Выполненная работа при повороте рамки на некоторый угол $A = \int I d\Phi = I(\Phi_{\text{кон}} - \Phi_{\text{нач}})$, где $\Phi_{\text{кон}}$ - поток через рамку в конечном положении, а $\Phi_{\text{нач}}$ - в исходное положение.

Итак, $|\Phi_{\text{кон}}| = |\Phi_{\text{нач}}| = \Phi$ и $\Phi_{\text{нач}} = -\Phi_{\text{кон}}$ значит,

$$\Delta\Phi = 2\Phi \quad \text{и} \quad A = I2\Phi \quad (129)$$

Следовательно

$$A = 2I \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2I \int_{a(\eta-\frac{1}{2})}^{a(\eta+\frac{1}{2})} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 a}{r} dr = \frac{\mu_0 I I_0 a}{\pi} \ln \left(\frac{2\eta+1}{2\eta-1} \right)$$

Ответ: $F_A = \frac{2\mu_0 I I_0}{\pi(4\eta^2-1)}, \quad A = \frac{\mu_0 I_0 I a}{\pi} \ln \left(\frac{2\eta+1}{2\eta-1} \right).$

Электромагнитная индукция

Индукция токов. Закон электромагнитной индукции Фарадея

№1

Условие: В однородном магнитном поле, с индукцией модуль которой B , расположен замкнутый контур (Рис. 35). Верхнюю часть контура, представляющую с собой полуокружность радиуса R_0 вращают вокруг оси OO' с постоянной угловой частотой ω . Найти э.д.с. индукции возникающую в контуре, как функцию времени, если в момент $t = 0$ магнитный поток через контур максимальный.

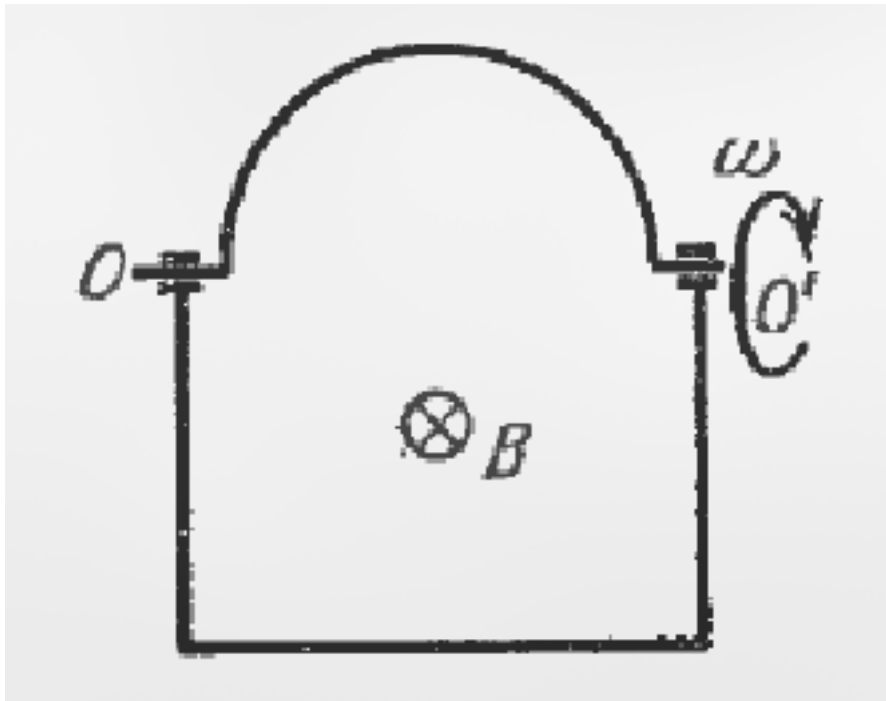


Рис. 35. Контур.

Решение:

Ответ: $\mathcal{E}^{\text{инд}} = \frac{\pi}{2} R_0^2 B \omega \sin \omega t$.

№2

Условие: В однородном магнитном поле, модуль индукции которого $B = 0.4$ Тл, с постоянной частотой $\nu = 480$ об/мин вращается замкнутая рамка, состоящая из $N = 1000$ витков проволоки. Площадь ограниченная контуром рамки $S = 200$ см². Рассчитать значение эдс

индукции в момент, когда угол между нормалью к рамке и вектором магнитной индукции равен 30° .

Решение:

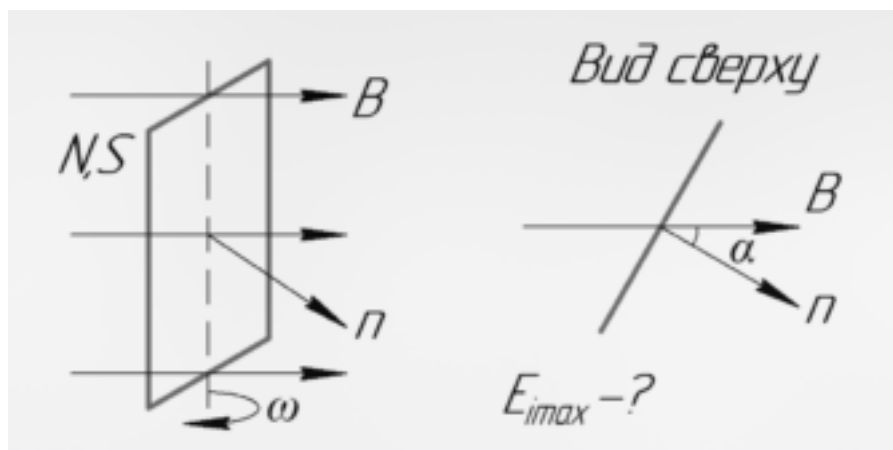


Рис. 36. Поясняющий рисунок

В общем случае магнитный поток Φ через некоторую плоскую поверхность, помещенную в однородном магнитном поле, можно определить по такой формуле:

$$\Phi = BS \cos \alpha \quad (131)$$

В этой формуле B - индукция магнитного поля, S - площадь поверхности, через которую определяется магнитный поток, α - угол между нормалью к площадке и вектором магнитной индукции.

Если учесть, что рамка имеет N витков обмотки, при этом сама рамка вращается в поле с некоторой угловой скоростью ω , то формула 131 примет следующий вид:

$$\Phi = NBS \cos \omega t \quad (132)$$

Согласно закону Фарадея для электромагнитной индукции, ЭДС индукции, возникающая в контуре при изменении магнитного потока, пересекающего этот контур, равна по модулю скорости изменения магнитного потока (то есть первой производной функции изменения потока от времени):

$$\varepsilon_i = -\Phi'(t) \quad (133)$$

Тогда

$$\varepsilon_i = -(NBS \cos \omega t)' = NBS\omega \sin \omega t \quad (134)$$

Угловая скорость вращения ω связана с частотой вращения ν по такой формуле:

$$\omega = 2\pi\nu \quad (135)$$

Получим окончательную формулу:

$$\varepsilon_i = NBS2\pi\nu \sin 2\pi\nu t \quad (136)$$

Мы знаем, что $\omega t = 30^\circ$. Тогда:

$$\varepsilon_i = NBS2\pi\nu \sin 30^\circ = NBS2\pi\nu \frac{1}{2} = NBS\pi\nu \quad (137)$$

Подставим числа и получим:

$$\varepsilon_i = 1000 \cdot 0.4 \cdot 0.02 \cdot \pi \cdot \frac{480}{60} \approx 201 \text{ В} \quad (138)$$

Ответ: $\mathcal{E}_{\text{инд}} = NBS\nu\pi \approx 201 \text{ В}$.

№3

Условие: В однородном магнитном поле, модуль индукции которого $B = 0.1 \text{ Тл}$ расположен плоский проволочный виток, замкнутый на гальванометр. Площадь ограниченная контуром витка $S = 10^{-2} \text{ м}^2$. В начальный момент времени плоскость витка располагалась перпендикулярно магнитному полю. После поворота витка на некоторый угол α , через гальванометр прошёл заряд $q = 7.5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$. Рассчитайте угол α на который повернули виток если его сопротивление $R = 2 \text{ Ом}$.

Решение: Проволочный виток (замкнутый контур) в магнитном поле. Магнитный поток, пронизывающий контур, находящийся в магнитном поле:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha. \quad (139)$$

При повороте витка, меняется угол, поэтому меняется магнитный поток, что приводит к возникновению ЭДС индукции. За время поворота Δt по витку пройдет заряд:

$$q = I \cdot \Delta t, \quad (140)$$

здесь I - сила индукционного тока. Воспользуемся законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R}, \quad (141)$$

ЭДС индукции, согласно закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \quad (142)$$

$\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ - изменение магнитного потока. $\Phi_1 = BS$, т.к. по условию угол между нормалью к контуру и индукцией поля равен нулю.

$$\Phi_2 = B \cdot S \cdot \cos \alpha, \quad (143)$$

$$q = \frac{\varepsilon_i}{R} \Delta t = \frac{\Delta \Phi}{R} = \frac{B \cdot S \cdot \cos \alpha - B \cdot S}{R} \quad (144)$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{q \cdot R + B \cdot S}{B \cdot S} \right| = 1 - \frac{q \cdot R}{B \cdot S} \quad (145)$$

Ответ: $\alpha = 1 - \frac{Rq}{BS} \approx 120^\circ$.

№4

Условие: К источнику сторонних эдс сопротивление которого пренебрежимо мало, а $\varepsilon_0 = 2$ В подключили соленоид индуктивность которого $L = 0.1$ Гн, а сопротивление $R = 0.02$ Ом. Рассчитать заряд, который пройдет через соленоид за первые 5 с.

Решение:

Ответ: $q = \frac{\varepsilon}{R} \left(t + \frac{L}{R} \left(\exp \left[-\frac{R}{L} t \right] - 1 \right) \right) \approx 184$ Кл.

№5

Условие: Квадратная рамка со стороной $a = 70$ см помещена в магнитное поле так, что нормаль к рамке составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с направлением магнитного поля. Индукция магнитного поля меняется по закону $B = B_0 \cos \omega t$, где $B_0 = 0.2$ Тл, $\omega = 6\text{с}^{-1}$. Рассчитать ЭДС индукции, возникающей в рамке в момент времени $t = 3$ с.

Решение:

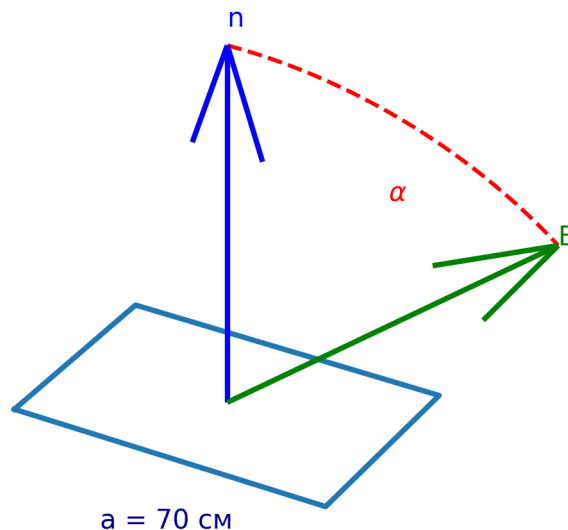


Рис. 37. Квадратная рамка в переменном магнитном поле.

По формуле магнитного потока через плоскость:

$$\Phi = BS \cos \alpha \quad (146)$$

Площадь рамки:

$$S = a^2 \quad (147)$$

Так как $B = B_0 \cos(\omega t)$:

$$\Phi = B_0 a^2 \cos \beta \cos(\omega t) \quad (148)$$

По закону Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\Phi'(t) = B_0 a^2 \omega \cos \beta \sin \omega t \quad (149)$$

Подставив числа из условия, получим:

$$\mathcal{E} = 0.2 \cdot 0.7^2 \cdot 6 \cdot \cos(45^\circ) \cdot \sin(6 \cdot 3) \approx -0.31 \text{ В.} \quad (150)$$

Ответ: $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0 \omega \sin(\omega t) \approx -0.31 \text{ В.}$

№6

Условие: В прямом бесконечном проводнике течёт ток, сила которого меняется по закону $I = \beta t^3$, где $\beta = 2 \text{ А/с}^3$. В одной плоскости с проводником, параллельно ему, расположена квадратная рамка, сторона которой $a = 20 \text{ см}$, а сопротивление материала рамки $R = 7 \text{ Ом}$. Расстояние от ближайшей стороны рамки до проводника $l = 20 \text{ см}$. Рассчитать силу тока в рамке в момент времени $t = 10 \text{ с}$.

Решение:

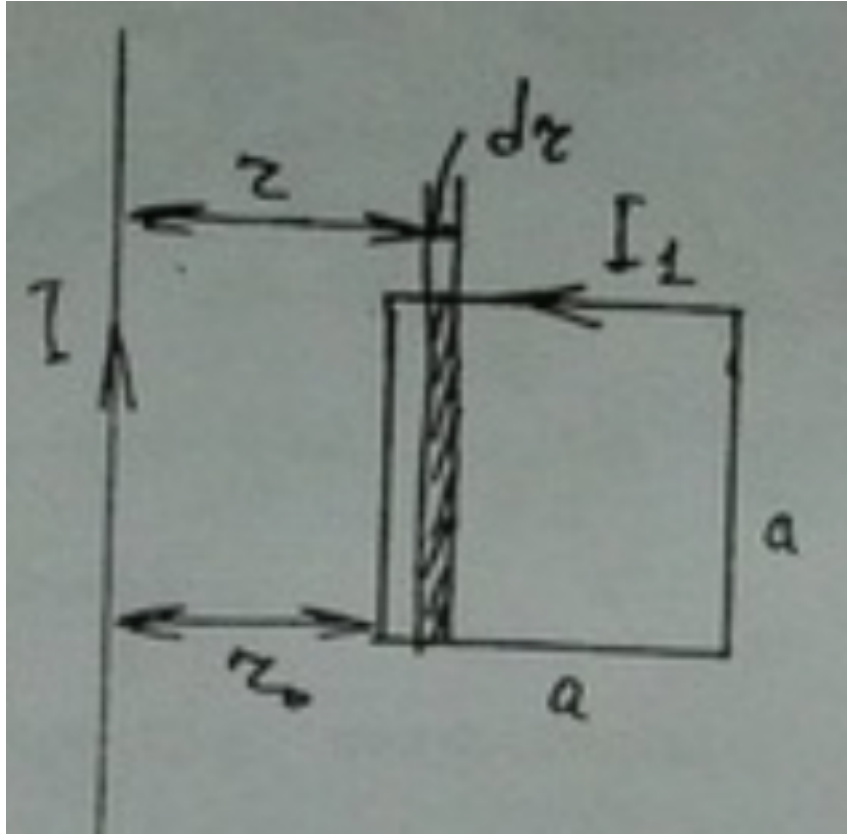


Рис. 38. Поясняющий рисунок.

Магн. индукция поля, создаваемого бесконечным проводником:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (151)$$

Найдем поток этого магнитного поля сквозь контур:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_l^{l+a} B \cdot a \cdot dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \int_l^{l+a} \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \end{aligned} \quad (152)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \frac{dI}{dt} \quad (153)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta t^3) = 3\beta t^2 \quad (154)$$

$$\varepsilon = -\frac{3\mu_0\beta at^2}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \quad (155)$$

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{3\mu_0\beta at^2}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \quad (156)$$

Подставим числа и получим:

$$I = \frac{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 0.2 \cdot 10^2}{2\pi \cdot 7} \ln\left(1 + \frac{0.2}{0.3}\right) \approx 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ А} \quad (157)$$

Ответ: $I = \frac{3\mu_0 a \beta}{2\pi} \log\left(1 + \frac{a}{l}\right) t^2 \approx 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ А}.$

№7

Условие: П-образный проводник расположен в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости проводника. Магнитная индукция поля изменяется с постоянной скоростью β . Вдоль параллельных сторон проводника с постоянным ускорением a перемещают проводник перемычку, длина которой l . Рассчитать эдс индукции через время t после начала перемещения перемычки, если в начальный момент времени и индукция и площадь контура равны 0.

Решение: Площадь контура как функция времени:

$$S(t) = l \cdot s(t) = l \cdot \frac{a \cdot t^2}{2} \quad (158)$$

Индукция магнитного поля как функция времени:

$$B(t) = \beta t \quad (159)$$

ЭДС индукции (без учетного знака):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left| \frac{d}{dt} \Phi \right| = \left| \frac{d}{dt} (B(t) \cdot S(t)) \right| = \left| \frac{d}{dt} \left[\beta t \left(l \cdot \frac{a \cdot t^2}{2} \right) \right] \right| = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \beta \cdot t^2 \cdot l \cdot a. \end{aligned} \quad (160)$$

Ответ: $\varepsilon = -\frac{3l\beta a}{2}t^2$.

№8

Условие: Внутри длинного соленоида расположена катушка состоящая из N витков. Площадь поперечного сечения катушки S . Катушку поворачивают с постоянной угловой скоростью ω вдоль оси совпадающей с её диаметром и перпендикулярной к оси соленоида. Рассчитать эдс индукции в катушке если, индукция магнитного поля в соленоиде изменяется со временем как $B = B_0 \sin(\omega t)$, а в момент времени $t = 0$ ось катушки совпадала с осью соленоида.

Решение: Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, ЭДС индукции в катушке равна

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}, \quad (161)$$

где

- $\phi = N\Phi$ - полное потокоцепление катушки,
- N - число витков,
- Φ - магнитный поток через один виток.

Магнитный поток через один виток определяется выражением

$$\Phi = \int_S B_n dS = \int_S B \cos \alpha dS \quad (162)$$

где

B_n - проекция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$ к плоскости витка, α - угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{n}$.

Поскольку катушка вращается с угловой скоростью ω , угол между нормалью к витку и направлением магнитного поля меняется по закону

$$\alpha = \omega t. \quad (163)$$

В момент времени $t = 0$ ось катушки совпадает с осью соленоида, поэтому $\alpha(0) = 0$.

Поле внутри длинного соленоида однородно, следовательно, магнитный поток через один виток равен

$$\Phi = BS \cos \omega t, \quad (164)$$

где S - площадь витка.

Тогда потокосцепление катушки

$$\phi = N\Phi = NBS \cos \omega t. \quad (165)$$

Если магнитная индукция изменяется со временем по закону

$$B = B_0 \sin \omega t, \quad (166)$$

то

$$\phi = NB_0 S \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} NB_0 S \sin 2\omega t. \quad (167)$$

Теперь найдем ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} NB_0 S \cdot 2\omega \cos 2\omega t = NB_0 S \omega \cos 2\omega t. \quad (168)$$

Ответ: $\varepsilon = B_0 N S \omega \cos(2\omega t)$.

№9

Условие: По длинному прямому соленоиду, радиус сечения которого R и плотностью намотки n , течёт ток, скорость изменения которого от времени равна $\dot{i}$. Рассчитать вектор напряжённости вихревого электрического поля, как функцию расстояния r от оси соленоида.

Решение:

Ответ: