

Содержание

Электростатика	5
Закон Кулона. Принцип суперпозиции.	5
№1	5
№2	5
№3	5
№4	5
№5	6
№6	6
№7	7
№8	7
№9	8
№10	8
№11	8
№12	8
№13	9
№14	9
№15	9
№16	9
№17	10
№18	10
Расчет напряженности непрерывного распределения заряда на основе теоремы Гаусса.	10
№1	10
№2	10
№3	11
№4	11
№5	11
№6	12
№7	12
№8	12
№9	12
Работа кулоновских сил. Потенциал электростатического поля.	13
№1	13
№2	13
№3	13
№4	13
№5	13
№6	13
№7	14

№8	14
№9	14
№10	14
№11	14
№12	14
№13	15
№14	15
№15	15
№16	15
Электрический диполь.	15
№1	15
№2	15
№3	15
№4	16
№5	16
№6	16
№7	16
№8	16
Электростатическое поле при наличии диэлектриков.	16
№1	16
№2	17
№3	17
№4	17
№5	17
Электростатическое поле при наличии проводников.	17
№1	17
№2	17
№3	17
№4	18
№5	18
№6	18
Энергия электростатического поля.	18
№1	18
№2	18
№3	18
№4	19
№5	19
Конденсаторы.	19
№1	19
№2	19
№3	19
№4	19

Постоянное магнитное поле	20
Индукция магнитного поля. Закон Био-Савара	20
№1	20
№2	20
№3	22
№4	23
№5	25
№6	26
№7	28
№8	28
№9	29
№10	30
Закон полного тока	31
№1	31
№2	31
№3	32
№4	34
№5	35
№6	35
№7	37
№8	38
№9	41
Магнитное поле при наличии Магнетиков. Магнитный момент.	42
№1	42
№2	42
№3	44
№4	44
№5	45
№6	45
№7	46
№8	46
№9	47
Частица в магнитном поле	48
№1	48
№2	48
Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле	50
№1	50
№2	50
Электромагнитная индукция	53

Индукция токов. Закон электромагнитной индукции	
Фарадея	53
№1	53
№2	53
№3	55
№4	56
№5	56
№6	58
№7	59
№8	60
№9	61

Электростатика

Закон Кулона. Принцип суперпозиции.

№1

Условие: На шёлковой нити подвешен шар массы m , заряд которого q_1^+ . Рассчитать на какое расстояние необходимо поднести положительно заряженный шар, с зарядом q_2^+ , чтобы сила натяжения нити уменьшилась вдвое.

Решение:

Ответ: $l = \sqrt{\frac{2kq_1^+q_2^+}{mg}}.$

№2

Условие: К потолку в одной точке на шёлковых нитях длины l подвешены два одинаковых шара обладающих одинаковым зарядом q и массой m . Расстояние между шарами $x \ll l$. Рассчитать скорость утечки зарядов $\frac{dq}{dt}$ с каждого шара, если скорость их сближения, как функция от x имеет вид: $v(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x}}$ (α – некоторая постоянная).

Решение:

Ответ: $\frac{dq}{dt} = \frac{3\alpha}{2} \sqrt{\frac{mg}{2kl}}.$

№3

Условие: Радиус векторы двух положительных зарядов q_1 и q_2 соответственно $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Рассчитать отрицательный заряд q_3 и его радиус-вектор $\vec{r}_3$ точки в которую его надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из зарядов была равна 0.

Решение:

Ответ: $q_3 = -\frac{q_1q_2}{(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2})^2}, \vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_1}\vec{r}_2+\sqrt{q_2}\vec{r}_1}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}.$

№4

Условие: Точечный заряд $q = 50$ мкКл расположен в точке с радиус-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Найти напряжённость $\vec{E}$ электрического поля и её модуль в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$. Координаты векторов заданы в метрах.

Решение:

Ответ: $E = 4.5$ кВ/м; $\vec{E} = 2.7\vec{i} - 3.6\vec{j}.$

№5

Условие: Точечные заряды $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$ расположены по углам квадрата (Рис. 1), диагональ которого равна $2l$. Найти модуль напряжённости электрического поля в точке, отстоящей на расстояние x от плоскости квадрата, симметрично относительно его вершин.

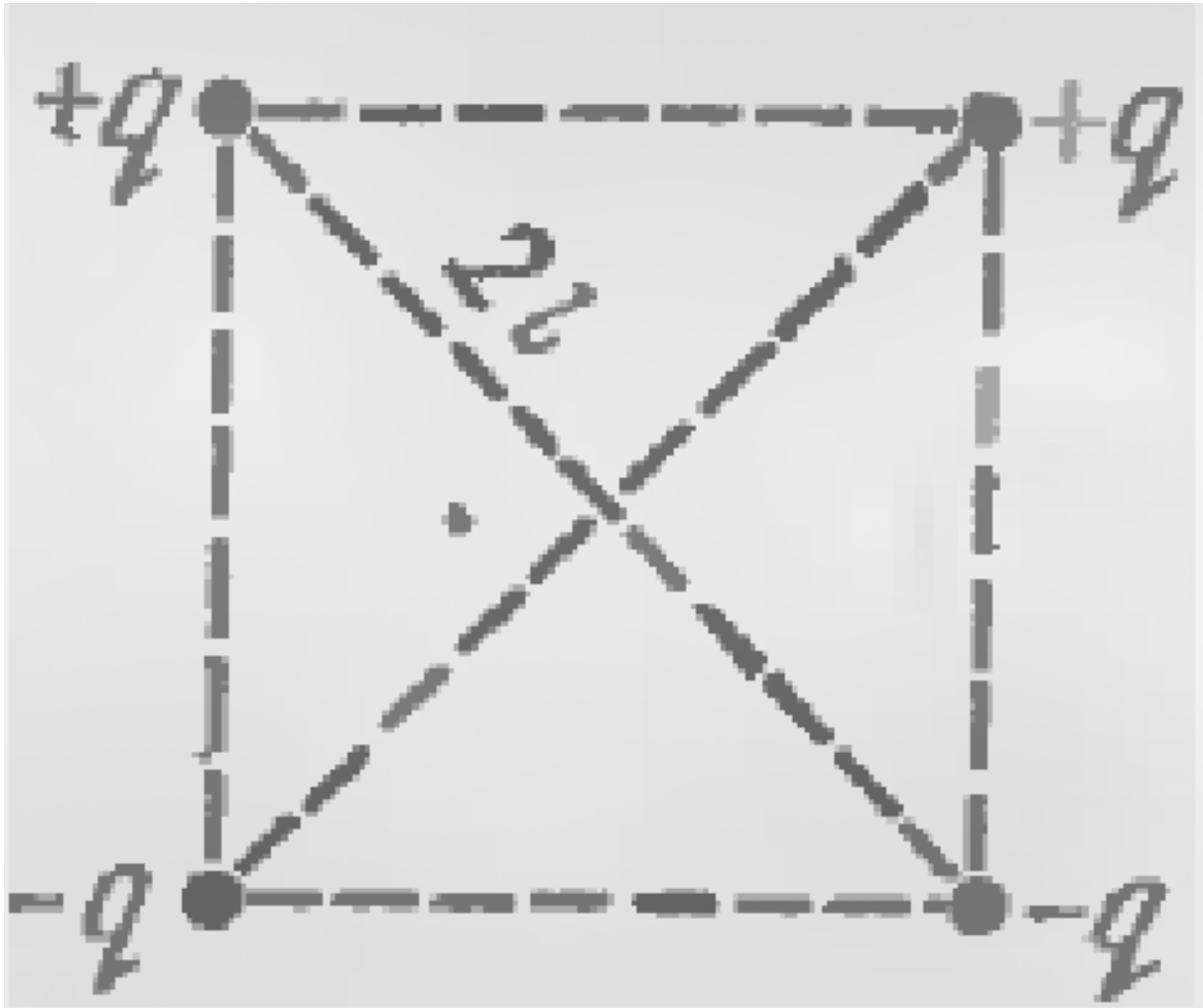


Рис. 1: Поясняющий рисунок.

Решение:

Ответ: $E = k \frac{2\sqrt{2}ql}{(l^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

№6

Условие: В центре равностороннего треугольника расположен заряд $q_0 = 10$ нКл. Рассчитайте, какие одинаковые заряды q_1 необходимо расположить в вершинах этого треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю.

Решение:

Ответ: $q_1 = -17$ нКл.

№7

Условие: Система состоит из протона p и электрона e , расстояние между которыми $r = 50$ пм. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля, создаваемого этими частицами в точках A и B , когда эти частицы находятся в положении, изображённом на (Рис. 2).

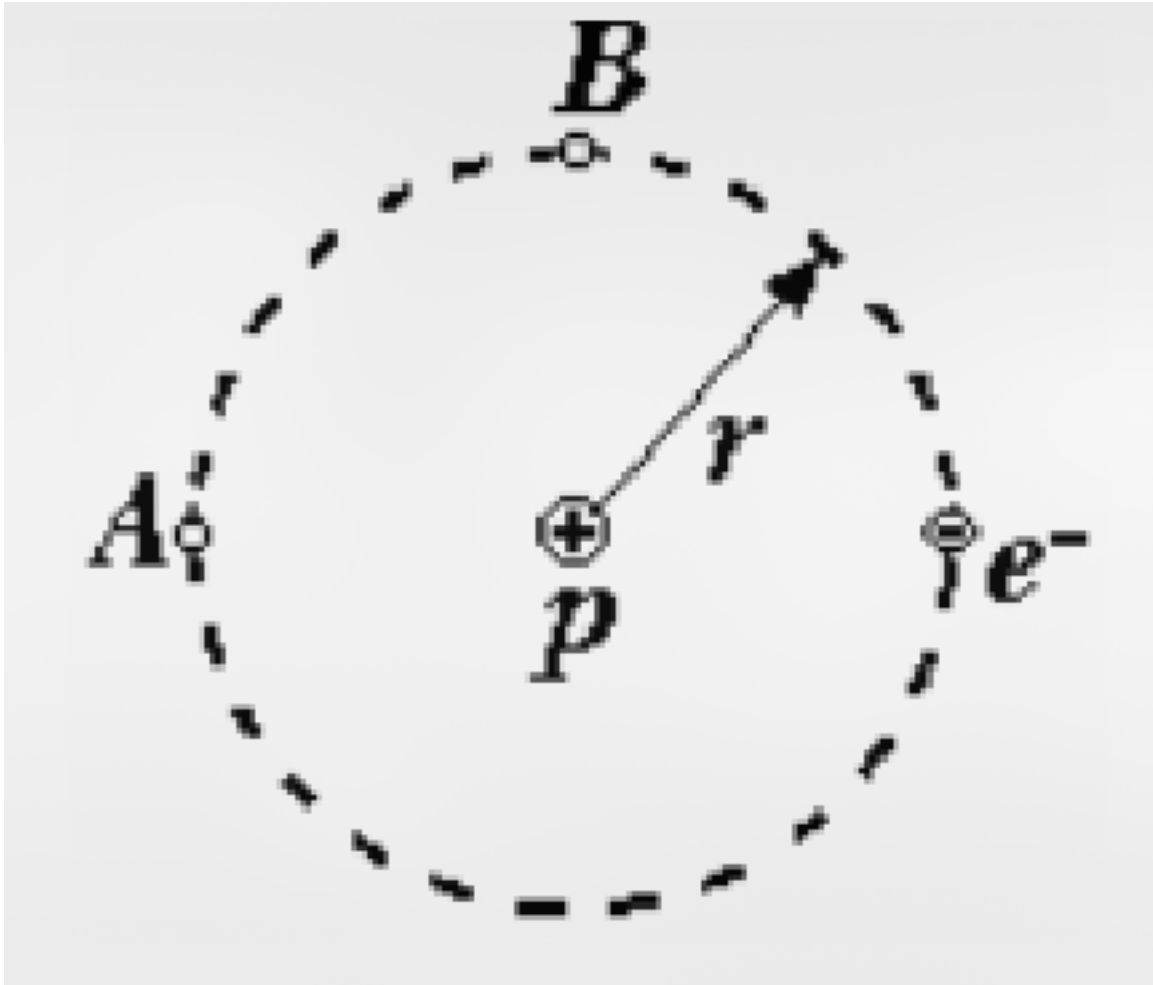


Рис. 2: Поясняющий рисунок.

Решение:

Ответ: $E_A = 4.3 \cdot 10^{11}$ В/м, $E_B = 4.2 \cdot 10^{11}$ В/м.

№8

Условие: В вершинах квадрата со сторонами $a = 0.08$ м расположены одинаковые заряды $q^{(+)} = 5$ нКл. Рассчитайте модуль напряжённости электрического поля в середине одной из сторон квадрата.

Решение:

Ответ: $E \approx 10$ кВ/м.

№9

Условие: Свинцовый шарик диаметр которого $d = 7$ мм поместили в однородное электрическое поле в глицериновый раствор. Рассчитать заряд этого шарика, если электрическое поле направленно вверх, а модуль его напряжённости $E = 9$ кВ/см.

Решение:

Ответ: $q \approx 20$ нКл.

№10

Условие: Кусок тонкой проволоки изогнутый полукольцом радиусом R имеет равномерно распределённый заряд q . Рассчитать модуль напряжённости электрического поля E в центре этого полукольца.

Решение:

Ответ: $E = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$.

№11

Условие: Найти модуль напряжённости электрического поля на оси заряженного тонкого кольца, как функцию расстояния до центра кольца – $E(z)$, если заряд кольца равен q , а радиус R . Исследовать полученную зависимость при $z \gg R$. Рассчитать максимальное значение модуля напряжённости $E_{\max}$ и соответствующую ему координату точки на оси OZ .

Решение:

Ответ: $E(z) = \frac{kqz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$, $z_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $E_{\max} = \frac{2kq}{3^{\frac{3}{2}} R^2}$.

№12

Условие: Рассчитать модуль силы взаимодействия между тонким кольцом радиуса R , заряд которого равен q и длинной равномерно заряженной нитью, имеющей линейную плотность заряда равную λ , если нить расположена вдоль оси симметрии кольца, так, что один её конец совпадает с центром кольца.

Решение:

Ответ: $F = \frac{kq\lambda}{R}$.

№13

Условие: Тонкий стержень длины l имеет равномерно распределённый заряд q . Рассчитать, модуль напряжённости электрического поля в точке расположенной на расстоянии a от одного из концов стержня, по линии стержня.

Решение:

Ответ: $E = \frac{kq}{a(l+a)}.$

№14

Условие: Линейная плотность тонкого заряженного кольца радиуса R зависит от азимутального угла по закону $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$ (λ_0 – постоянная). Рассчитать модуль напряжённости электрического поля в центра кольца и на оси симметрии кольца в зависимости от расстояния до центра кольца.

Решение:

Ответ: $E_O = \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}, E(z) = \frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$

№15

Условие: Система состоит из равномерно заряженного стержня длины $2a$, расположенного в вакууме. Рассчитать модуль вектора напряжённости как функцию расстояния r от центра стержня до точки на прямой:

- перпендикулярной стержню и проходящей через его центр;
- совпадающей с осью стержня, при $r > a$.

Заряд стержня равен q .

Решение:

Ответ: $E = \frac{kq}{r\sqrt{a^2 + r^2}}, E = \frac{kq}{r^2 - a^2}.$

№16

Условие: Сфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = (\vec{r}, \vec{a})$, где $\vec{a}$ некоторый постоянный вектор, а $\vec{r}$ – радиус вектор точки на сфере относительно её центра. Рассчитать вектор напряжённости электрического поля в центре сферы.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{aR}{3\varepsilon_0} \vec{e}_z.$

№17

Условие: Рассчитать вектор напряжённости в центре заряженного шара радиуса R если объёмная плотность заряда шара $\rho = (\vec{r}, \vec{a})$, где $\vec{a}$ некоторый постоянный вектор, а $\vec{r}$ – радиус вектор произвольной точки шара, проведённый из его центра.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{R^2 a}{6\epsilon_0} \vec{e}_z$.

№18

Условие: Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность круглого сечения заряжена так, что поверхностная плотность зависит только от угла φ цилиндрической системы координат: $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$. Рассчитать модуль вектора в произвольной точке, лежащей на оси цилиндра.

Решение:

Ответ: $E = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$.

Расчет напряженности непрерывного распределения заряда на основе теоремы Гаусса.

№1

Условие: Напряжённость электрического поля, как функция координат имеет вид: $\vec{E} = \frac{\alpha x \vec{i} + \alpha y \vec{j}}{x^2 + y^2}$, где $\alpha = \text{const}$, а $\vec{i}, \vec{j}$ – орты координатных осей OX и OY соответственно. Найти поток вектора $\vec{E}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат.

Решение:

Ответ: $P = 4\pi\alpha R$.

№2

Условие: Объёмная плотность положительно заряженного шара радиуса R зависит только от расстояния до центра шара: $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$, где $\rho_0 = \text{const}$. Найти:

- модуль напряжённости электрического поля внутри и вне шара, как функцию r ;
- максимальные значения модуля напряжённости E_{max} и соответствующее ему значение r_{max} .

Диэлектрическая проницаемость всюду $\epsilon = 1$.

Решение:

Ответ: $E_r(r \leq R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right), \quad E_r(r \geq R) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}, \quad r_{\max} = \frac{2}{3}R, \quad E_r(r_{\max}) = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}.$

№3

Условие: Система состоит из равномерно заряженного шара радиуса $R = 0.2$ м, объёмная плотность которого $\rho = 20$ нКл/м³. Рассчитать модуль напряжённости электрического поля:

- на расстоянии $r = 0.1$ м от центра шара;
- на поверхности шара;
- на расстоянии $r = 0.25$ м от центра шара.

Диэлектрическая проницаемость материала из которого состоит шар $\varepsilon = 5$.

Решение:

Ответ: $E(0.1) \approx 15$ В/м, $E(0.2) \approx 30$ В/м ($r \leq R$), $E(0.25) \approx 96$ В/м, $E(0.2) \approx 151$ В/м ($r \geq R$).

№4

Условие: Шар радиуса R заряженный равномерно помещён в некоторую среду диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon = 1$. Среда заполнена зарядом, объёмная плотность которого $\rho = \frac{\alpha}{r}$, где α – постоянная, а r – расстояние от центра шара. Рассчитать заряд шара при котором модуль напряжённости электрического поля вне шара не зависит от r .

Решение:

Ответ: $q = 2\pi\alpha R^2$.

№5

Условие: Система представлена областью пространства. По пространству распределён заряд, плотность которого зависит от расстояния до центра по закону $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, где α некоторая постоянная. Найти модуль напряжённости, как функцию r .

Решение:

Ответ: $E_r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2} (1 - \exp(-\alpha r^3)).$

№6

Условие: Рассчитать напряжённость электрического поля бесконечной плоскости, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда – σ . Расчёт произвести 2-мя способами:

- с использованием закона Кулона;
- с использованием теоремы Гаусса.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$.

№7

Условие: Рассчитать напряжённость электростатического поля создаваемого бесконечной длинной нитью, заряженной равномерно. Поверхностная плотность заряда – λ . Расчёт произвести 2-мя способами:

- с использованием закона Кулона;
- с использованием теоремы Гаусса.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{n}$.

№8

Условие: Рассчитать вектор напряжённости электростатического поля в области пересечения двух шаров, равномерно заполненных разноименными зарядами с объёмной плотностью ρ и $-\rho$. Расстояния между центрами шаров характеризуется вектором $\vec{a}$.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a}$.

№9

Условие: Напряжённость аксиально симметричного электростатического поля зависит от расстояния до источника по закону $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{r}$ (α – постоянная). Рассчитать заряд внутри сферы радиуса R , центр которой расположен на источнике.

Решение:

Ответ: хз.

Работа кулоновских сил. Потенциал электростатического поля.

№1

Условие: Потенциал электрического поля зависит от координат x, y по закону:

- $\varphi(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)$,
- $\varphi(x, y) = \alpha xy$,

где $\alpha = \text{const}$. Найти вектор напряжённости этих полей.

Решение:

Ответ: $\vec{E} = -2\alpha\vec{r}$, $\vec{E} = -\alpha y\vec{i} - \alpha x\vec{j}$.

№2

Условие:

Решение:

Ответ:

№3

Условие:

Решение:

Ответ:

№4

Условие:

Решение:

Ответ:

№5

Условие:

Решение:

Ответ:

№6

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 7

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 8

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 9

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 10

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 11

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 12

Условие:

Решение:

Ответ:

№13

Условие:

Решение:

Ответ:

№14

Условие:

Решение:

Ответ:

№15

Условие:

Решение:

Ответ:

№16

Условие:

Решение:

Ответ:

Электрический диполь.

№1

Условие:

Решение:

Ответ:

№2

Условие:

Решение:

Ответ:

№3

Условие:

Решение:

Ответ:

№4

Условие:

Решение:

Ответ:

№5

Условие:

Решение:

Ответ:

№6

Условие:

Решение:

Ответ:

№7

Условие:

Решение:

Ответ:

№8

Условие:

Решение:

Ответ:

Электростатическое поле при наличии диэлектриков.

№1

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 2

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 3

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 4

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 5

Условие:

Решение:

Ответ:

Электростатическое поле при наличии проводников.

№ 1

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 2

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 3

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 4

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 5

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 6

Условие:

Решение:

Ответ:

Энергия электростатического поля.

№ 1

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 2

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 3

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 4

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 5

Условие:

Решение:

Ответ:

Конденсаторы.

№ 1

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 2

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 3

Условие:

Решение:

Ответ:

№ 4

Условие:

Решение:

Ответ:

Постоянное магнитное поле

Индукция магнитного поля. Закон Био-Савара

№1

Условие: Заряженная элементарная частица движется со скоростью, модуль которой $v = 900$ м/с. В некоторый момент в точке наблюдения P модуль напряжённости электрического поля этой частицы $E = 600$ В/м, а угол между векторами скорости и напряжённости $\alpha = 30^\circ$. Рассчитать индукцию магнитного поля данной частицы.

Решение:

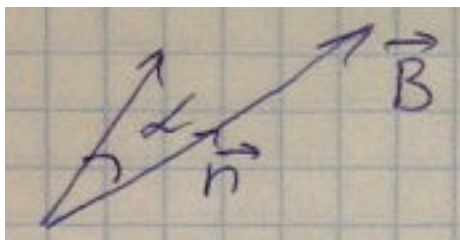


Рис. 3: Пояснительный рисунок.

$$B = \frac{\mu_0 v \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad (1)$$

$$E = k \frac{1}{r^2} \quad (2)$$

Умножим и разделим 1 на ϵ_0 чтобы сделать замену на E :

$$B = \mu_0 v \sin \alpha \epsilon_0 E \quad (3)$$

Подставив числа, получим:

$$\begin{aligned} B &= 900 \cdot 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12.75 \cdot 10^{-7} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \\ &= 3 \cdot 10^{-12} = 3 \text{ пТл.} \end{aligned} \quad (4)$$

Ответ: $B = 3$ пТл.

№2

Условие: Используя закон Био-Савара, получить формулу для расчёта модуля вектора индукции магнитного поля, создаваемого током I , протекающем в линейном бесконечном проводнике в точке, расположенной на расстоянии r_0 от проводника.

МОГО ТОКА, т.е. тока, текущего по

Поэтому можно складывать просто модули $d\vec{B}$. В нашем случае $d\vec{B}$ удобнее выразить не через угол между $d\vec{l}$ и $\vec{r}$, а через α , тогда

$$d\alpha = r d\alpha \text{ и } r = \frac{r_0}{\cos \alpha}. \text{ Значит } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cos \alpha d\alpha}{r_0}.$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1). \quad (6)$$

иет находить магнитную индукцию от конечного бесконечного проводника ($\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$):

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r_0} \quad (7)$$

21

№3

Условие: Рассчитать модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого конечным прямолинейным участком проводника, длины l , по которому протекает ток I , в точке отстоящей на произвольном расстоянии r_0 от оси проводника.

Решение:

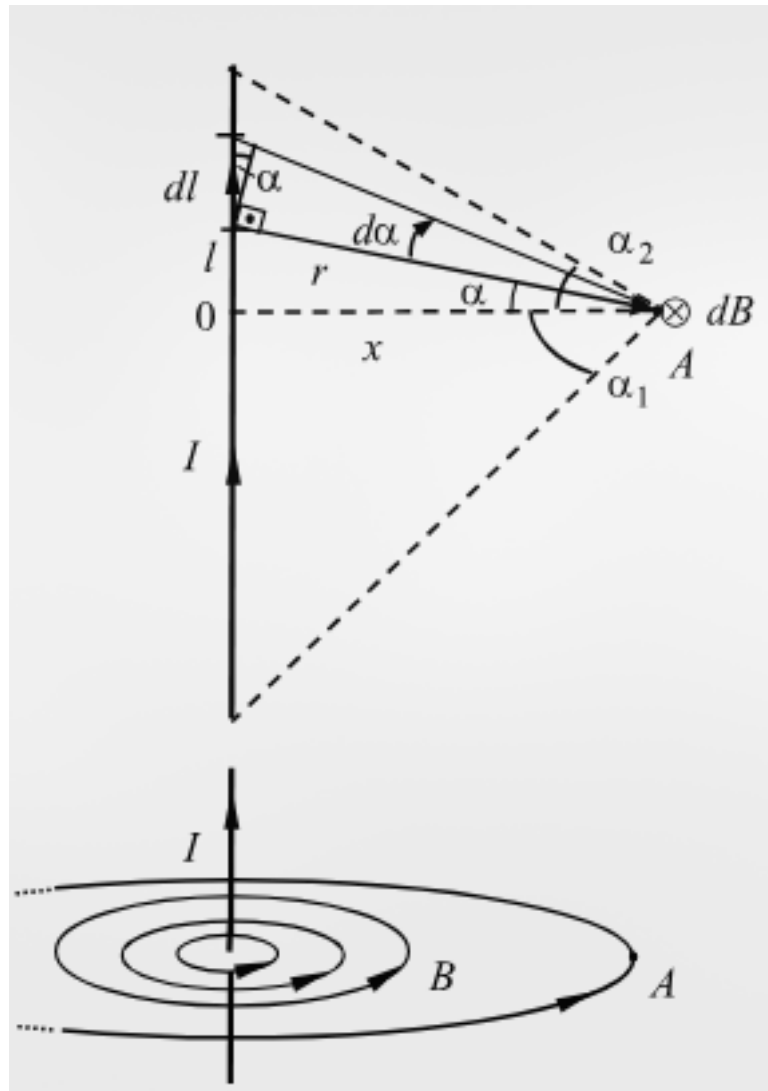


Рис. 5: Поясняющий рисунок.

Для решения задачи воспользуемся принципом суперпозиции. Разобьем проводник на элементарные участки $d\vec{l}$, по которым течет ток I (Рис. 5). Согласно закону Био-Савара, вектор магнитной индукции, создаваемого в точке A каждым элементом тока $I \cdot d\vec{l}$ равен

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (8)$$

Векторы $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ для всех участков проводника лежат в плоскости чертежа, поэтому в точке A векторы $d\vec{B}$ имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа (от нас $\otimes$), что продемонстрировано на нижнем рисунке. Сложение векторов $d\vec{B}$ сводится к сложению их модулей. В качестве переменной интегрирования выберем угол α (угол между x и r). Выразим через угол α все остальные величины. Из Рис. 5 видно, что $r = \frac{x}{\cos \alpha}$, $l = x \operatorname{tg} \alpha$, поэтому длина элемента тока связана с приращением α соотношением

$$dl = x \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}. \quad (9)$$

Магнитная индукция, создаваемая элементом проводника, равна:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \frac{rd\alpha}{\cos \alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cos \alpha d\alpha. \quad (10)$$

Угол α для всех элементов прямого тока изменяется в пределах от α_1 до α_2 (Рис. 5), тогда

$$B = \int dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1), \quad (11)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1), \quad (12)$$

где α_1 и α_2 углы, под которыми мы видим из точки, в которой определяем поле, концы проводника. Эти углы являются алгебраическими величинами и отсчитываются от перпендикуляра, опущенного из точки на проводник. Положительное направление отсчета угла α соответствует углу, отсчитываемому от перпендикуляра в направлении тока.

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$.

№4

Условие: Замкнутый контур с током имеет вид прямоугольника с диагональю $d = 16$ см, угол между диагоналями $\alpha = 30^\circ$. Сила тока, протекающего по контуру $I = 5$ А. Рассчитать модуль индукции магнитного поля в центре контура.

Решение:

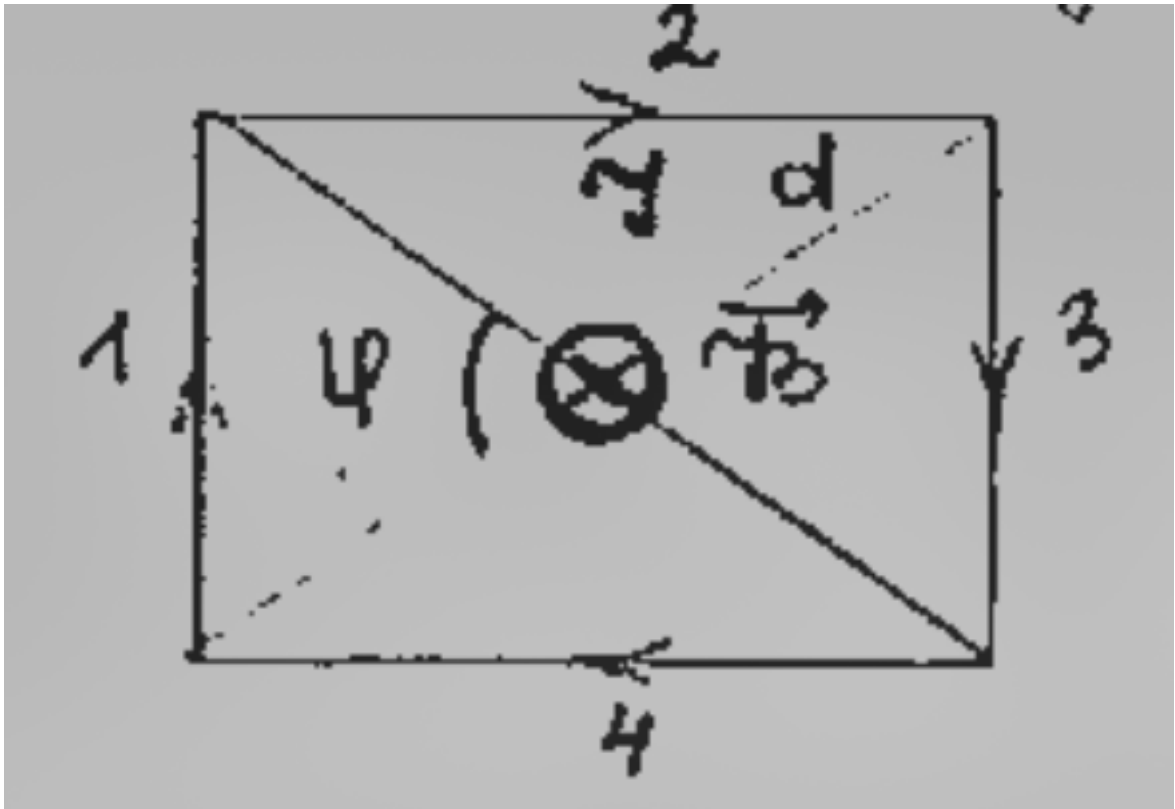


Рис. 6: Поясняющий рисунок.

В системе СИ: $d = 16 \text{ см} = 0.16 \text{ м}$.

По принципу суперпозиции для магнитного поля:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4. \quad (13)$$

Так как все $\vec{B}_i$ сонаправлены, то $B = 2(B_1 + B_2)$. По закону Био-Савара-Лапласа:

$$\begin{aligned} B &= 2 \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\cos \frac{\pi-\varphi}{2}}{\frac{d}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} + \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\frac{d}{2} \sin \frac{\varphi}{2}} \right) \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{1}{\frac{d}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \right) = \frac{4\mu_0 I}{\pi d \sin \varphi} \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив числа из условия, получим:

$$B = \frac{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{\pi \cdot 0.16 \cdot \sin 30^\circ} \approx 0.1 \quad (15)$$

Ответ: $B = 0.1 \text{ мТл}$.

№5

Условие: Определить модуль вектора индукции магнитного поля на оси кругового тока I радиуса R , как функцию $B(z)$, где z расстояние до центра контура.

Решение:

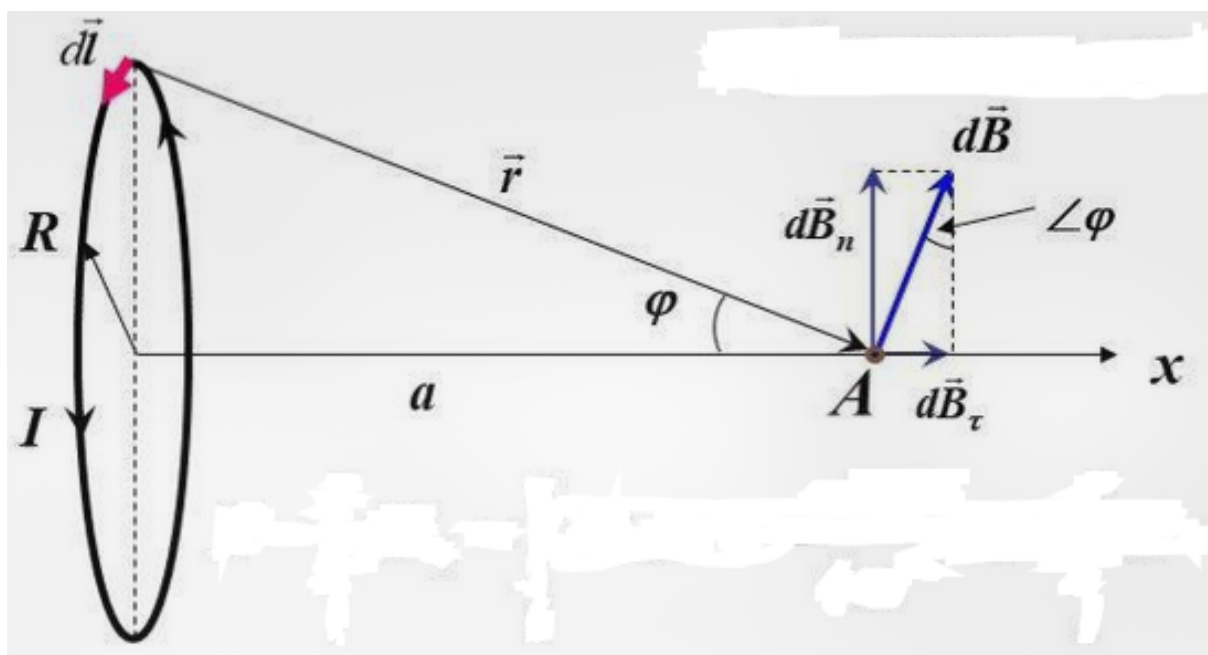


Рис. 7: Поясняющий рисунок.

Магнитное поле на оси кругового тока.

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} B &= \int_l dB_\tau = \int_l dB \sin \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi \int_l dl = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \varphi 2\pi R = \frac{\mu_0 IR}{2\pi r^2} \sin \varphi \end{aligned} \quad (17)$$

Преобразуем полученное выражение, учитывая, что $\sin \varphi = \frac{R}{r}$, $r^2 = R^2 + a^2$. После подстановки получим

$$B = \frac{\mu_0 IR}{2r^2} \sin \varphi = \frac{\mu_0 IR}{2(R^2 + a^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (18)$$

Ответ: $B(z) = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

№6

Условие: По тонкому замкнутому проводнику (Рис. 8) течёт ток, сила которого $I = 5$ А. Радиус изогнутой части проводника $R = 120$ мм, угол $\varphi = 90^\circ$. Рассчитать модуль вектора магнитной индукции в точке O .



Рис. 8: Проводник.

Решение:

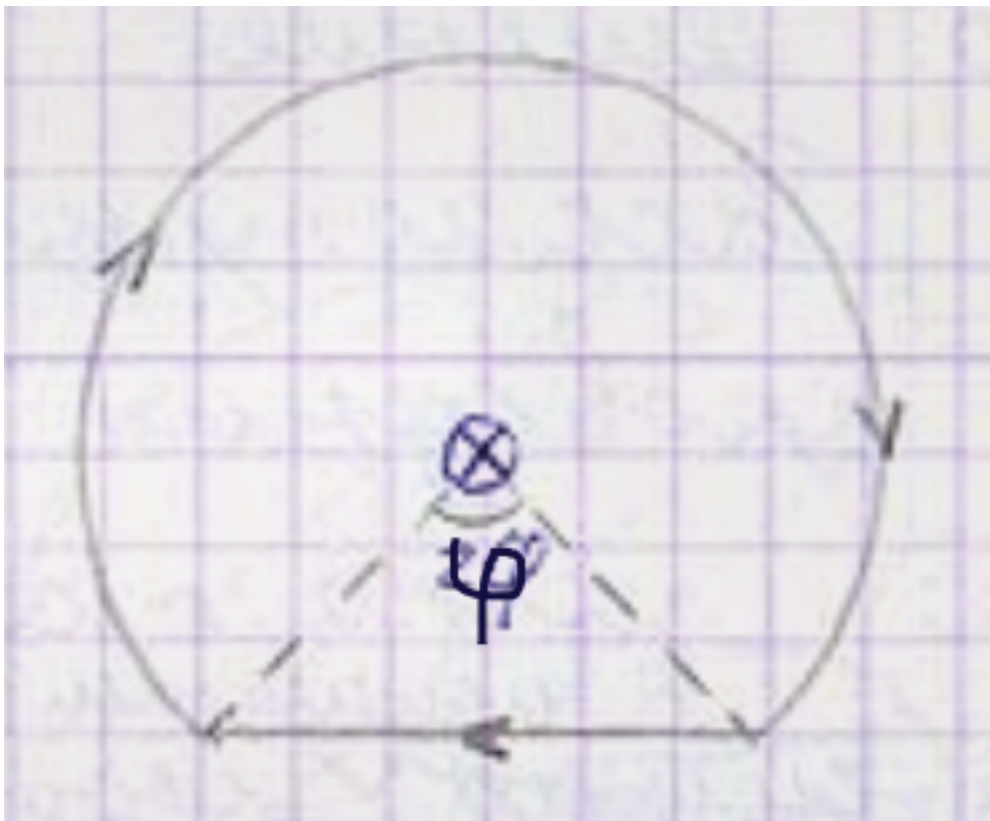


Рис. 9: Поясняющий рисунок.

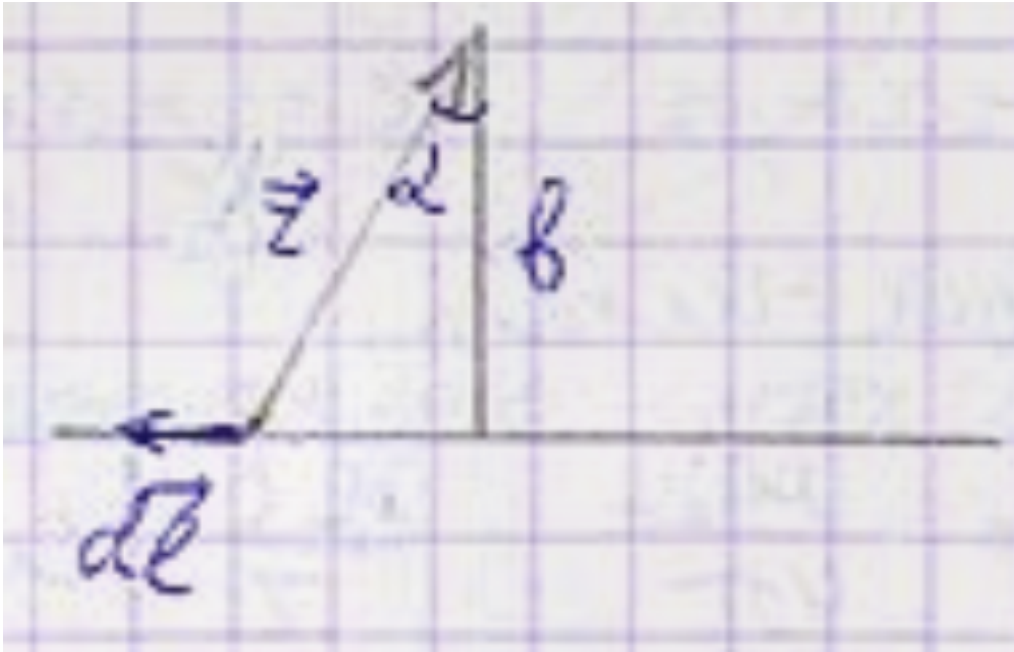
Пусть $\theta = \frac{\varphi}{2} = 45^\circ$.

Для части окружности:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi-2\theta} R d\alpha = \frac{\mu_0 I(\pi - \theta)}{2\pi R}. \quad (19)$$

Для отрезка:

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \angle(d\vec{l}; \vec{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} \cos \alpha \quad (20)$$



Поясняющий рисунок. 10: Рис.

$$\cos \alpha dl = z d\alpha \Rightarrow dl = \frac{z d\alpha}{\cos \alpha} \quad (21)$$

$$z = \frac{b}{\cos \alpha}, \quad b = R \cos \theta \quad (22)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{d\alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot b} \cdot \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos \theta} \cdot 2 \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tg} \theta \quad (23)$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \theta + \tan \theta) \quad (24)$$

Подставив числа, получим:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi \cdot 0.12} \left(\pi - \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) \approx 28 \text{ мкТл.} \quad (25)$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(1 + \frac{3}{4}\pi \right) \approx 28 \text{ мкТл.}$

№7

Условие: Замкнутый контур, по которому течёт ток силы I имеет форму показанную на (Рис. 11). Радиус окружности R , длина стороны квадрата a . Найти индукцию магнитного поля в точке O .

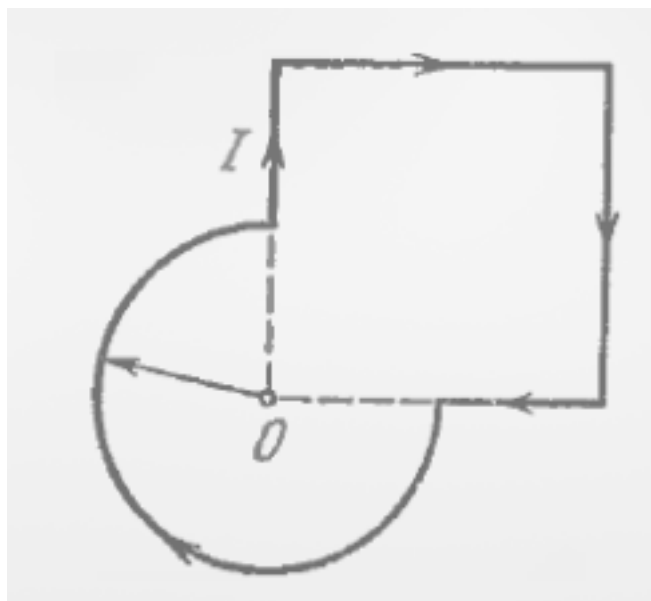


Рис. 11: Контур.

Решение:

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{3\pi}{2R} + \frac{\sqrt{2}}{a} \right).$

№8

Условие: Тонкий провод с изоляцией образует плоскую спираль из $N = 200$ плотно прилегающих витков, по которым течёт ток $I = 5 \text{ мА}$. Радиус внутреннего витка $a = 100 \text{ мм}$, радиус внешнего витка $b = 200 \text{ мм}$. Рассчитать индукцию магнитного поля в центре спирали.

Решение: Магнитная индукция одного витка (окружности):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2z} \quad (26)$$

$$dN = \frac{N}{b-a} dz \quad (27)$$

Подставим 26 и 27 в

$$B = \int B_1 dN = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \int_a^b \frac{dz}{z} = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln z \Big|_a^b = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a} \quad (28)$$

Подставим числа и получим

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 200}{2(0.2 - 0.1)} \ln \frac{0.2}{0.1} \approx 4.4 \text{ мкТл}. \quad (29)$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a} \approx 4.4 \text{ мкТл}.$

№9

Условие: В параллельных плоскостях, расположенных на расстоянии $d = 8 \text{ см}$ друг от друга на одной оси находятся два круговых витка радиуса $R = 5 \text{ см}$ каждый. По виткам в одном направлении текут токи $I_1 = I_2 = 2 \text{ А}$. Рассчитать напряжённость магнитного поля в центре одного из витков.

Решение:

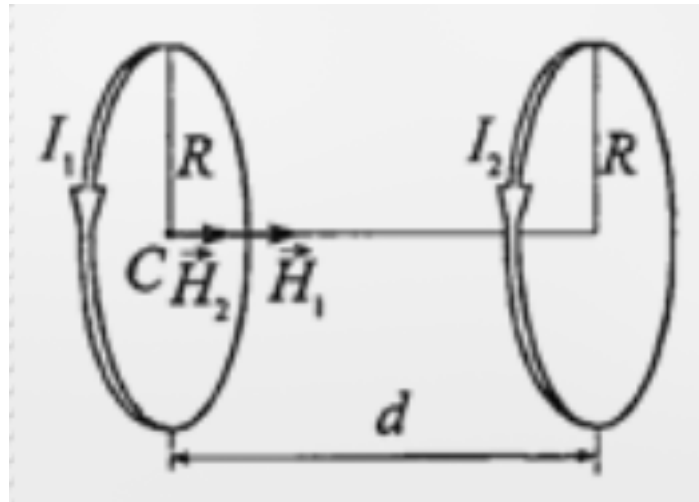


Рис. 12: Поясняющий рисунок.

Согласно принципу суперпозиции напряженность в точке C равна

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2, \quad \text{где } H = \frac{I_1}{2R}, \quad (30)$$

$$H_2 = \frac{I_2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (31)$$

Если токи текут в одном направлении, то $H = H_1 + H_2$. По условию

$$I_1 = I_2 = I \quad (32)$$

Тогда

$$H = \frac{I}{2R} + \frac{IR^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (33)$$

Подставив числа, получим:

$$H = \frac{2}{2 \cdot 0.05} + \frac{2 \cdot 0.05^2}{2(0.05^2 + 0.08^2)^{\frac{3}{2}}} \approx 23 \text{ А/м}. \quad (34)$$

Ответ: $H = \frac{I}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{R^2}{(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \approx 23 \text{ А/м}.$

№10

Условие: Рассчитать модуль вектора магнитной индукции на оси соленоида, длина которого l , количество витков проволоки, плотно прилегающих друг к другу равно N . Через витки течёт ток I , радиус витков R_0 .

Решение:

Ответ: $B(z) = \frac{\mu_0 I N}{2l} \left(\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{R_0^2 + (\frac{l}{2} - z)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{R_0^2 + (\frac{l}{2} + z)^2}} \right).$

Закон полного тока

№1

Условие: Используя закон полного тока, найти модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого током текущим по коаксиальному кабелю. Ток I течёт по центральной жиле радиуса R_1 , и возвращается по оболочке, внутренний и внешний радиусы которой R_2 и R_3 соответственно. Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком. Магнитную проницаемость всюду считать равной 1.

Решение:

Ответ: $B(r < R_1) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$, $B(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $B(R_2 < r < R_3) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$, $B(r > R_3) = 0$.

№2

Условие: Определить индукцию магнитного поля тока, равномерно распределённого:

- по бесконечной плоскости с линейной плотностью j ;
- по двум параллельным бесконечным плоскостям с линейными плотностями j и $-j$.

Решение:

а)

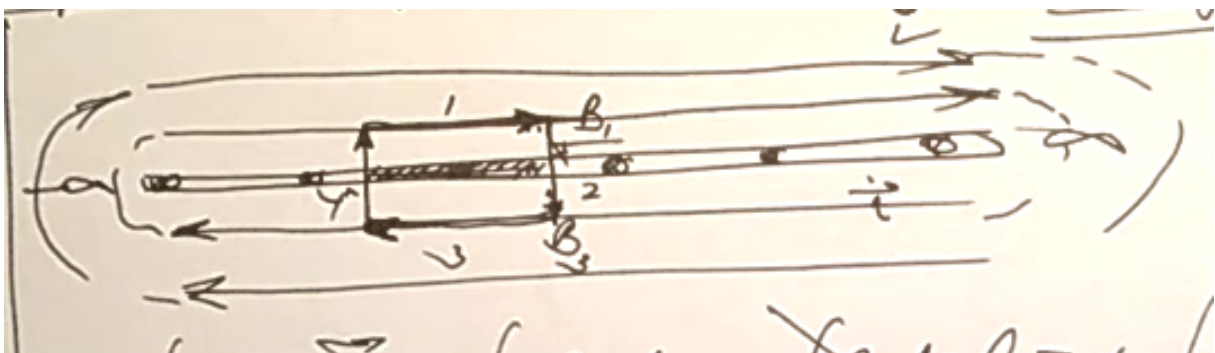


Рис. 13: Поясняющий рисунок.

По закону полного тока:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{полн}} \quad (35)$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} B_1 \cdot dl + \int_{l_2} B_2 \cdot dl \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \int_{l_3} B_3 dl \cos 0 + \int_{l_4} B_4 dl \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2Bl$$

$$I_{\text{полн}} = j \cdot l \quad (37)$$

$$2Bl = \mu_0 j l \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 j \quad (38)$$

б)

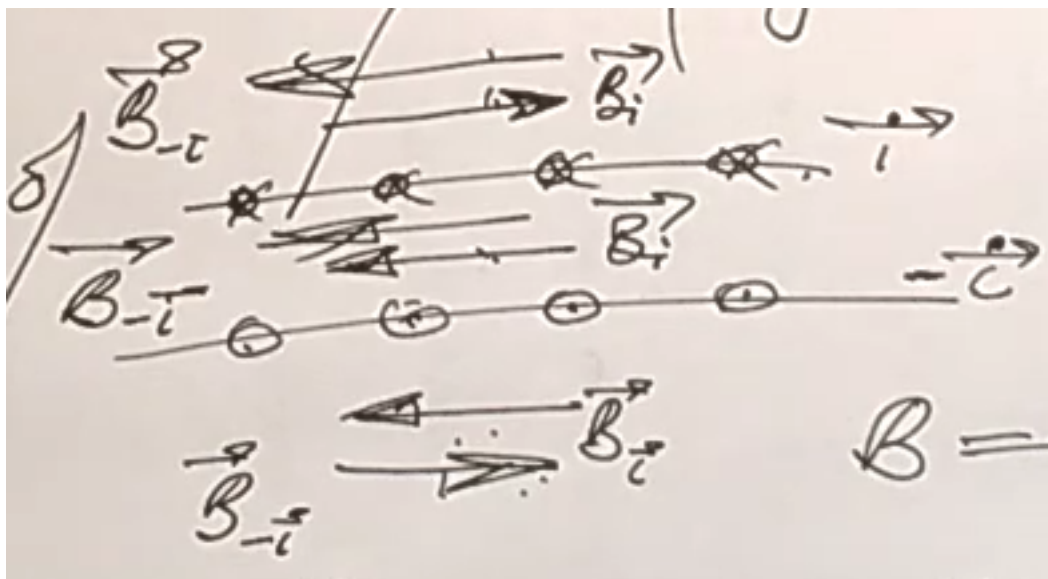


Рис. 14: Поясняющий рисунок.

$$\vec{B} = \vec{B}_j + \vec{B}_{-j} \quad (39)$$

$B = 0$ вне плоскостей.

$$B = 2B_{\text{пл}} = \mu_0 j \text{ между плоскостями.} \quad (40)$$

Ответ: а) $B = \frac{\mu_0 j}{2}$, б) $B = \mu_0 j$.

№3

Условие: Однородный ток, плотность которого j течёт внутри неограниченной пластины толщины $2d$ параллельно её поверхности. Найти индукцию магнитного поля этого тока, как функцию расстояния x от средней плоскости пластины. Магнитную проницаемость всюду считать равной 1.

Решение:

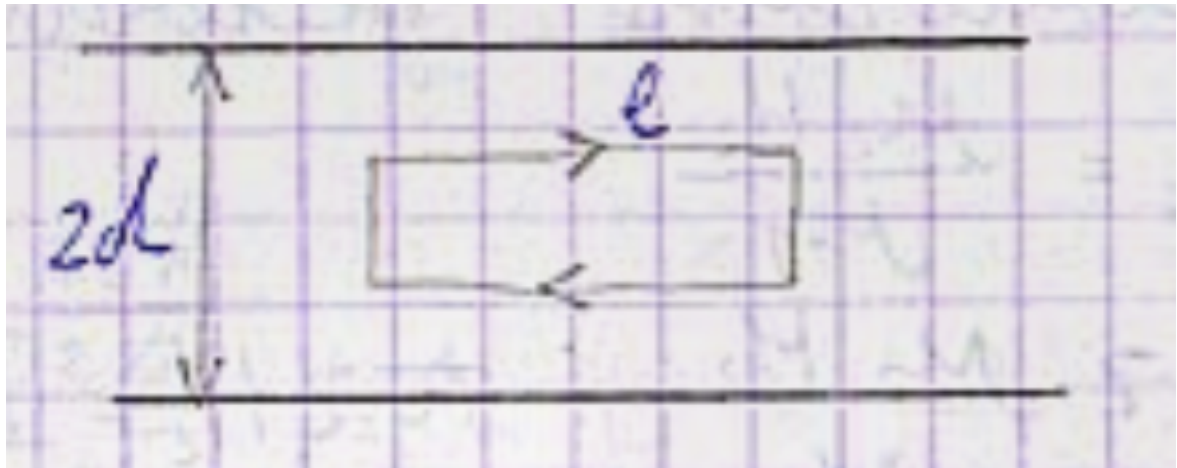


Рис. 15: Поясняющий рисунок.

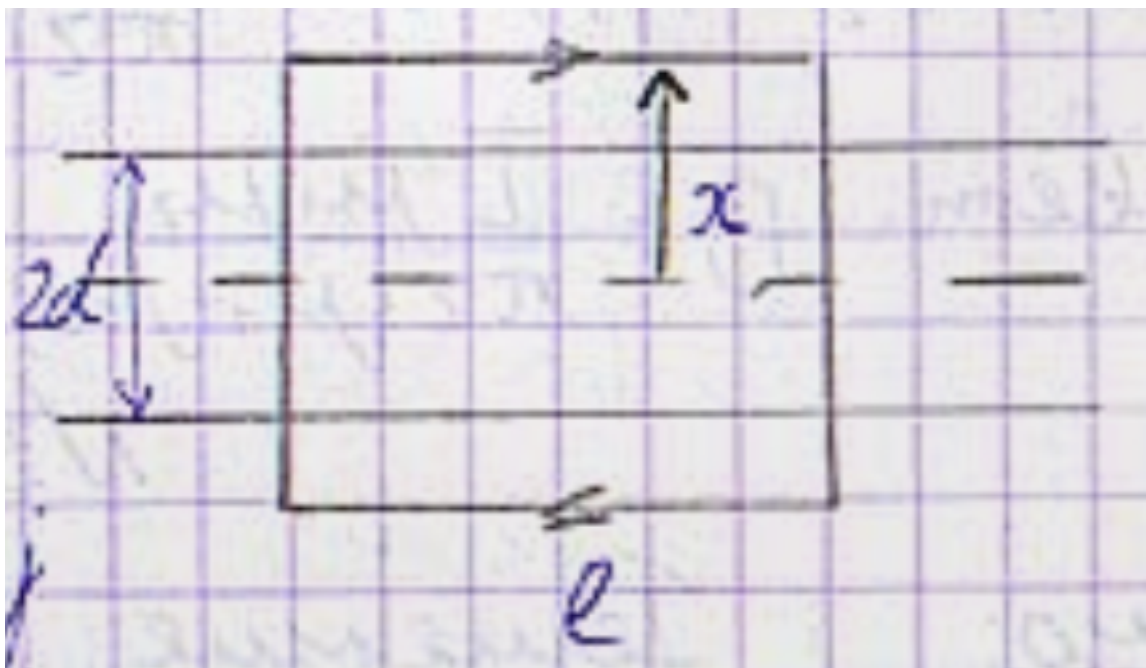


Рис. 16: Поясняющий рисунок.

По теореме о циркуляции

$$\oint B dz = \mu_0 j 2x l \quad (41)$$

$$I = 2x l j \quad (42)$$

Если $l \gg x$, то интегралом по $\perp$ составляющим можно пренебречь, тогда:

$$B \cdot 2l = \mu_0 \cdot 2x l j \quad (43)$$

$$B = \mu_0 x j \quad (44)$$

Возьмем $x > d$

$$\oint B dz = \mu_0 I = \mu_0 \cdot 2dlj \quad (45)$$

$$B \cdot 2l = \mu_0 \cdot 2dlj, \quad B = \mu_0 dj \quad (46)$$

Ответ: $B(x > d) = \mu_0 dj$, $B(x < d) = \mu_0 xj$.

№4

Условие: Найти вектор плотности тока, как функцию расстояния r от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от r как $B(r) = \beta r^\alpha$, где β и α положительные постоянные.

Решение:

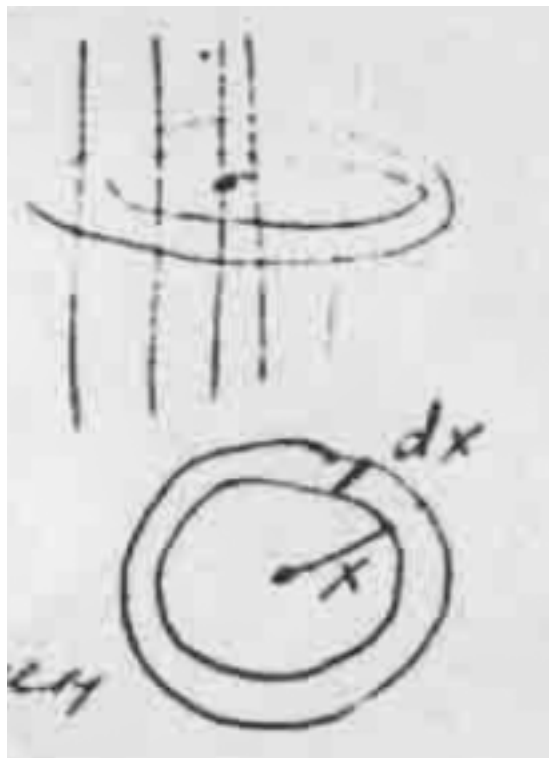


Рис. 17: Пояснительный рисунок.

Возьмем контур, $\perp$ пучку радиуса r и центром в центре пучка, тогда

$$\oint B dr = \beta r^2 \cdot 2\pi r = 2\pi \beta r^{\alpha+1} \quad (47)$$

Пусть $j = j(r)$, тогда

$$\int_r j dS = \int_0^r 2\pi x j(x) dx \quad (48)$$

Итого

$$\begin{aligned} 2\pi\beta r^{\alpha+1} &= \int_0^r 2\pi\mu_0 x j(x) dx = \\ &= \beta r^{\alpha+1} = \mu_0 \int_0^r x j(x) dx \end{aligned} \quad (49)$$

Дифференцируем по r

$$\beta(\alpha+1)r^\alpha = \mu_0 r j(r) \Rightarrow j(r) = \frac{\beta(\alpha+1)}{\mu_0} r^{\alpha-1} \quad (50)$$

Ответ: $\vec{j}(r) = \frac{\beta(\alpha+1)r^{\alpha-1}}{\mu_0} \vec{e}_z$.

№5

Условие: Используя закон полного тока, рассчитать индукцию магнитного поля внутри соленоида длиной $L = 0.5$ м, содержащего $N = 1000$ витков плотной обмотки, если сопротивление обмоток $R = 120$ Ом, а напряжение на её концах $U = 60$ В.

Решение:

$$\oint_L B dL = \mu_0 \sum_i I_i, \quad BL = \mu_0 IN \quad (51)$$

$$I = \frac{U}{R}, \quad B = \frac{\mu_0 UN}{RL} \quad (52)$$

Подставим числа:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 1000}{120 \cdot 0.5} \approx 1.25 \text{ мТл.} \quad (53)$$

Ответ: $B = 1.25$ мТл.

№6

Условие: По бесконечному прямому проводу, радиус сечения которого R , течёт постоянный ток, плотность которого $\vec{j}$. Найти вектор магнитной индукции поля, создаваемого этим током, в точке,

положение которой относительно оси провода определяется радиус-вектором $\vec{r}$.

Решение:



Рис. 18: Поясняющий рисунок.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int B \cdot dl \cdot \cos 0^\circ = B \cdot 2\pi r \quad (54)$$

$$I_{\text{полн}} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int j d\vec{S} = j \cdot \pi r^2 \quad (55)$$

При $r < R$:

$$B \cdot 2\pi r = j\pi r^2 \mu_0 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 j r \quad (56)$$

$$\vec{B}_1 = B_1 \cdot \vec{e}_\varphi \quad \vec{B}_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} \times \vec{r} = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j}, \vec{r}] \quad (57)$$

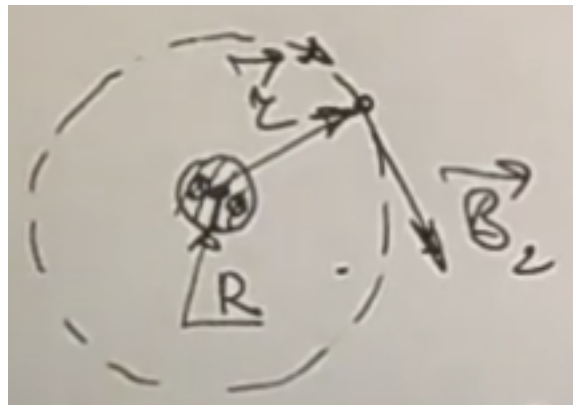


Рис. 19: Поясняющий рисунок.

При $r > R$:

$$I_{\text{полн}} = j \cdot \pi R^2 \quad (58)$$

$$B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi R^2 \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 R^2}{2} \frac{j}{r} \vec{e}_\varphi \quad (59)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 R^2}{2} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^2} \quad (60)$$

Ответ: $\vec{B}(r < R) = \frac{\mu_0 [\vec{j}; \vec{r}]}{2}, \vec{B}(r > R) = \frac{\mu_0 R^2 [\vec{j}; \vec{r}]}{2}.$

№7

Условие: По длинному цилиндрическому проводу течёт ток, плотность которого $\vec{j}$. Внутри провода имеется цилиндрическая полость, идущая параллельно оси провода. Расстояние от оси провода до оси полости задаётся вектором $\vec{l}$. Найти вектор индукции магнитного поля внутри полости.

Решение:

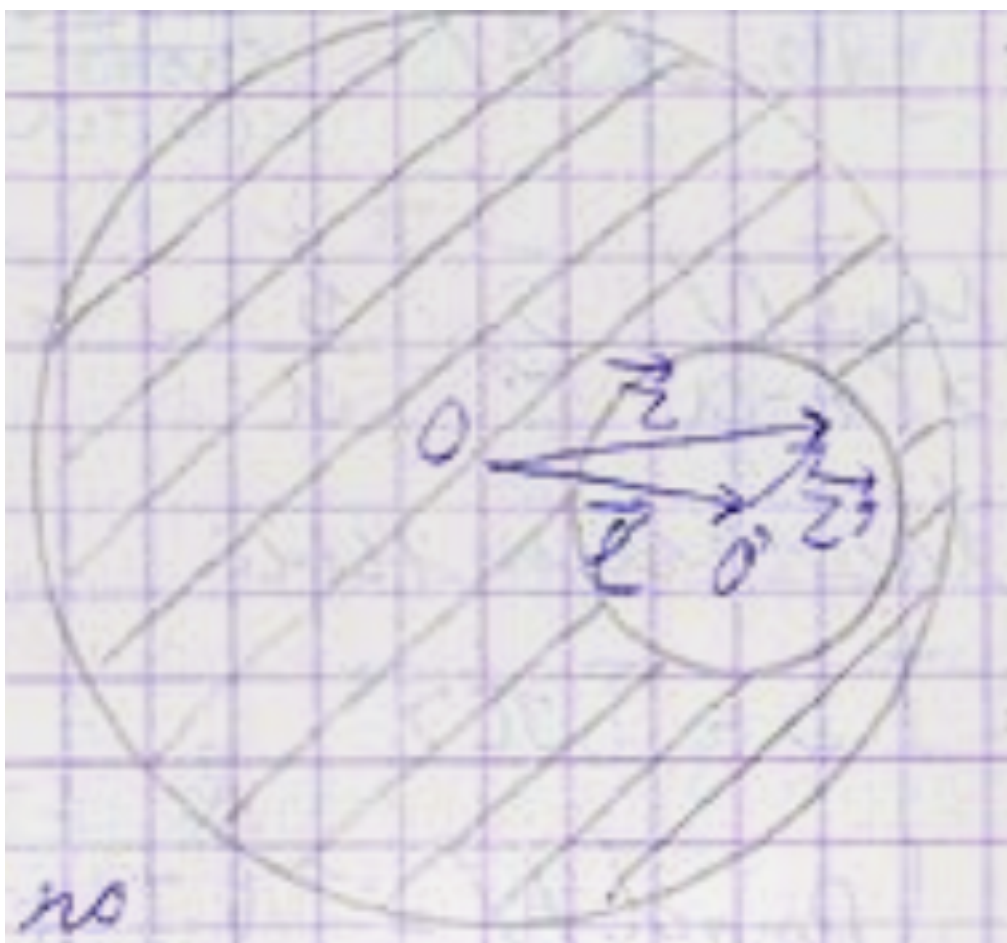


Рис. 20: Поясняющий рисунок.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}', \quad (61)$$

где $\vec{B}_0$ - если проводник сплошной.

$\vec{B}'$ - от тока, текущего по той части проводника, которую удалили.

То теореме о циркуляции:

$$2\pi z B_0 = \mu_0 \pi z^2 j \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2} \mu_0 z j \quad (62)$$

Или в векторной форме

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{z}] \quad (63)$$

$$\vec{B}' = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{z}'] \quad (64)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{z} - \vec{z}'] = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}; \vec{l}] \quad (65)$$

Ответ: $\vec{B} = \frac{\mu_0 [\vec{j}; \vec{l}]}{2}$.

№8

Условие: Ток I течёт по длинному проводу и затем равномерно растекается по всем направлениям однородной проводящей среды (Рис. 21). Рассчитать индукцию магнитного поля в точке A , отстоящей от точки O на расстоянии r под углом θ .

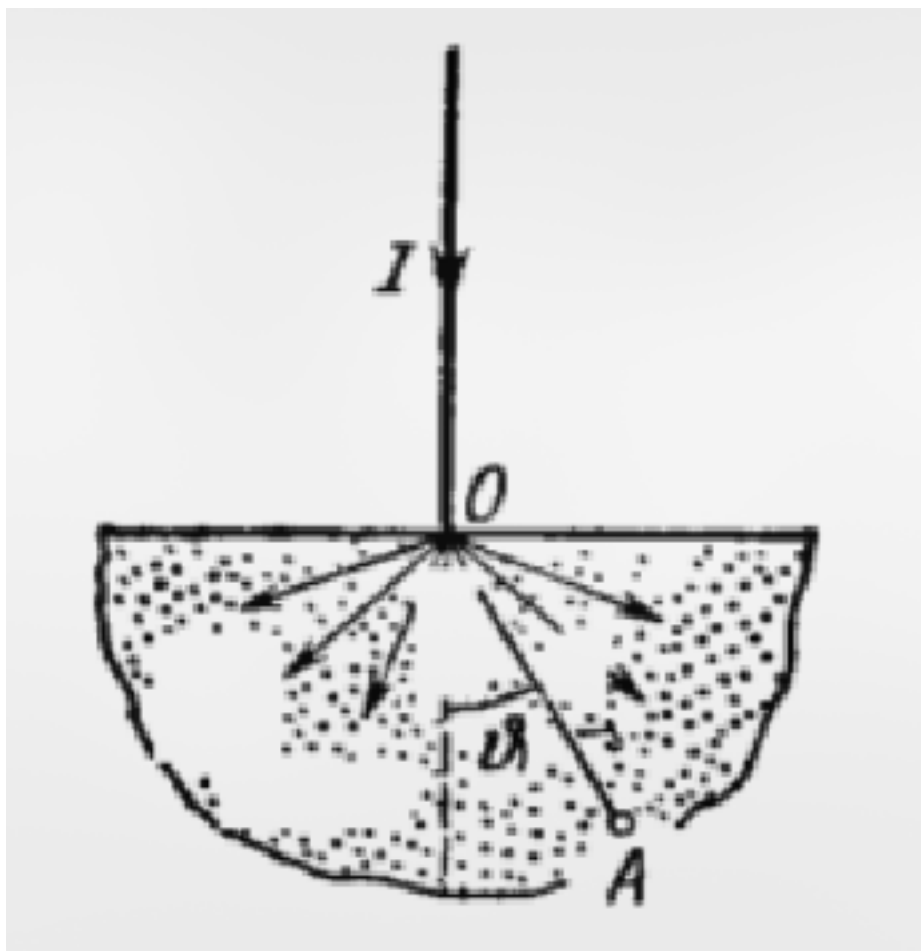


Рис. 21: Проводящая среда.

Решение:

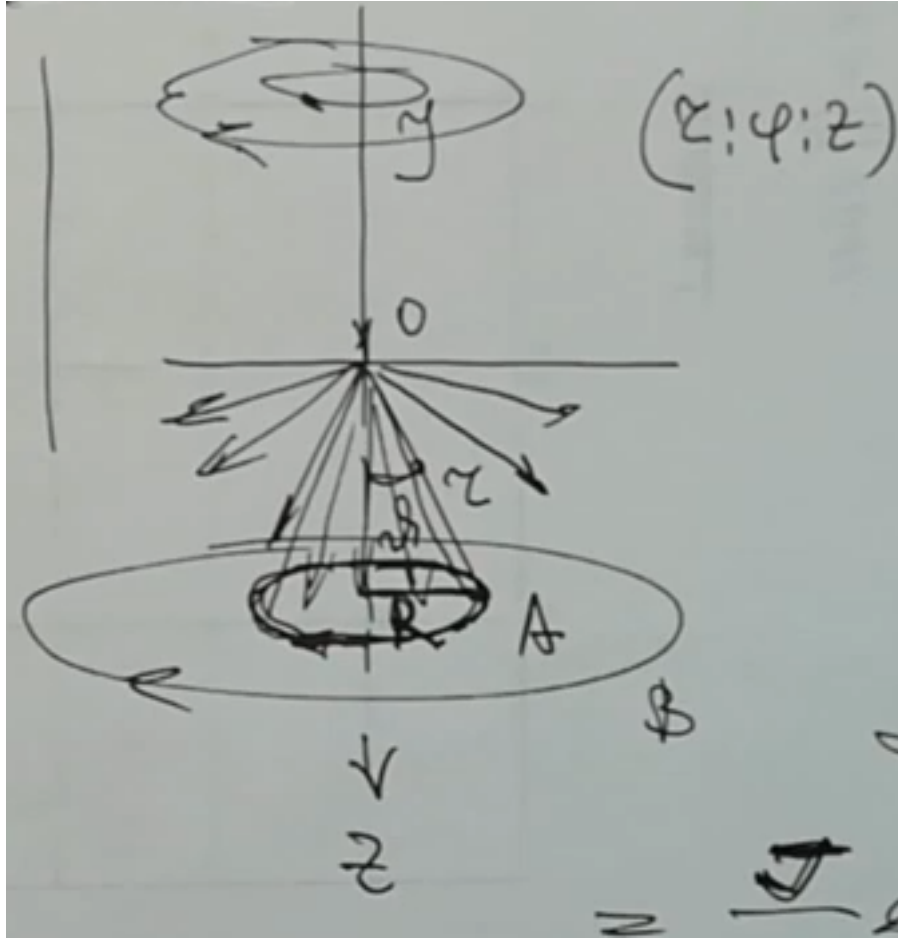


Рис. 22: Поясняющий рисунок.

Система обладает аксиальной симметрией.

$$\vec{B}(0; B_\varphi; z) \Rightarrow \oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{охв}}. \quad (66)$$

$$B = B(R) \quad (67)$$

$$B \cdot 2\pi R = B 2\pi r \sin \theta \quad (68)$$

$$J = \frac{dI}{d\omega} = \frac{I}{2\pi} = \text{const} \quad (69)$$

$$I_{\text{охв}} = \int_0^\theta I \cdot \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2\pi} 2\pi \cos \theta \Big|_\theta^0 = I(1 - \cos \theta) \quad (70)$$

68 и 70 подставляем в 66

$$B \cdot 2\pi r \sin \theta = \mu_0 I(1 - \cos \theta) \quad (71)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \sin \theta} (1 - \cos \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (72)$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tan \frac{\theta}{2}$.

№9

Условие: Ток I течёт по длинному прямому проводу круглого сечения. Рассчитать поток магнитного поля через половину осевого сечения провода приходящейся на один метр его длины.

Решение: Считаем, что ток распределен по сечению равномерно с плоскостью

$$j = \frac{I}{\pi R^2} \quad (73)$$

Согласно теореме Стокса:

$$\oint B dr = \mu_0 I \text{ (через сечение)}. \quad (74)$$

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2 \quad (75)$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{r^2}{R^2} \frac{1}{r} \quad (76)$$

Поток через половину сечения на единицу длины

$$\Phi = \int_0^R dr B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^R \frac{r dr}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I. \quad (77)$$

Ответ: $\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$.

Магнитное поле при наличии Магнетиков. Магнитный момент.

№1

Условие: Найти магнитный момент тонкого кругового витка с током, если радиус витка $R = 100$ мм, а индукция магнитного поля в центре $B = 6$ мкТл.

Решение:

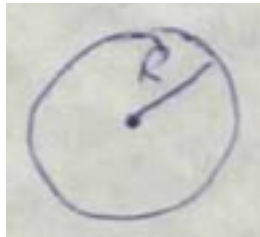


Рис. 23: Поясняющий рисунок

$$p_m = I \cdot S; \quad B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{4\pi \cdot R^2} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot 2\pi \cdot R}{4\pi \cdot R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R} \Rightarrow I = \frac{B \cdot 2R}{\mu_0} \quad (78)$$

$$p_m = \frac{B \cdot 2R}{\mu_0} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{2\pi \cdot B \cdot R^3}{\mu_0} \quad (79)$$

Подставим числа и получим

$$p_m = \frac{6.28 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 0.1^3}{1.27 \cdot 10^{-6}} \approx 30 \text{ мА/м}^2 \quad (80)$$

Ответ: $p_m = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} \approx 30 \text{ мА/м}^2$.

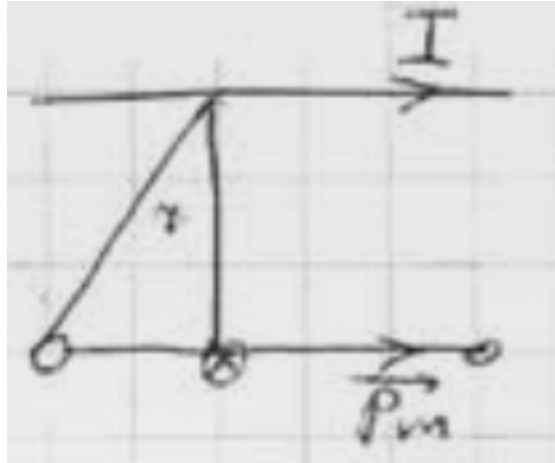
№2

Условие: Магнитный диполь, момент которого $\vec{p}_m$ поместили на расстоянии r от длинного провода по которому течёт ток I . Найти вектор силы действующей на диполь со стороны магнитного поля, создаваемого током I если вектор магнитного момента:

- параллелен проводнику;
- направлен по вектору $\vec{r}$;
- совпадает по направлению с магнитным полем тока I .

Решение:

а)

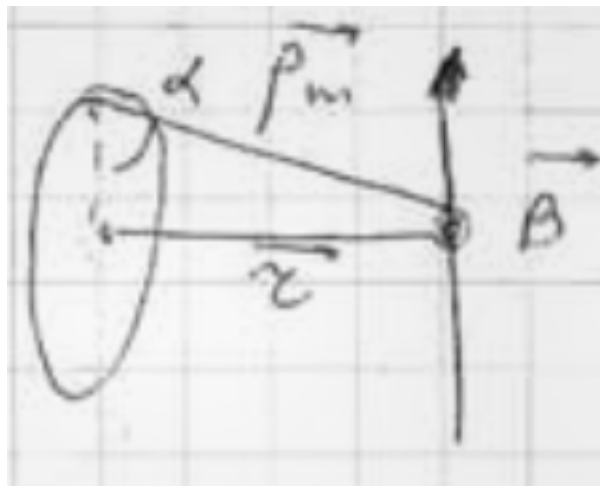


24:

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha \quad (81)$$

$$\cos \alpha = 0 \Rightarrow F = 0 \quad (82)$$

б)



25:

$$W_{\Pi} = -p_m B \cos \varphi \quad (83)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \cos \varphi} \quad (84)$$

$$r' = r \cos \varphi \quad (85)$$

$$F_x = -p_m \frac{\partial B}{\partial r} \cos \varphi = -\left(p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi \cos \varphi} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right) \cos \varphi = \frac{p_m \mu_0 I}{2\pi r^2} \quad (86)$$

в)

$$F_x = -p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha = \frac{p_m \mu_0 I}{2\pi r^2}. \quad (87)$$

Ответ: а) $\vec{F} = \vec{0}$, б) $\vec{F} = -\frac{\mu_0 p_m I}{2\pi r^2} \vec{e}_\varphi$, в) $\vec{F} = -\frac{\mu_0 p_m I}{2\pi r^2} \vec{e}_r$.

№3

Условие: Тонкий диск из диэлектрика, несущий заряд поверхностная плотность которого σ равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Рассчитать:

- индукцию магнитного поля в центре диска;
- магнитный момент диска.

Решение:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad dq = \sigma dS \quad (88)$$

$$I = \frac{\sigma dS \omega}{2\pi} = \frac{\sigma \omega 2\pi r dr}{2\pi} = \sigma \omega r dr \quad (89)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I[dl, r]}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl r \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I \cdot 2\pi \cdot r}{4\pi \cdot r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r} \quad (90)$$

$$\text{а) } B = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr}{2R} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$$

$$\text{б) } p_m = \int I dS = \int \sigma \omega \pi r^3 dr = \frac{\sigma \omega \pi R^4}{4}$$

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega R, \quad p_m = \frac{\pi \sigma R^4}{4}.$$

№4

Условие: Сферическая поверхность радиуса R , состоящая из диэлектрика вращается равномерно вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω . Рассчитать магнитную индукцию в центре сферы если поверхностная плотность зарядов равна σ .

Решение:

$$\text{Ответ: } B = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R.$$

№5

Условие: Вдоль оси бесконечного прямого цилиндра радиуса R_0 течёт линейный ток силой I . Магнитная проницаемость вещества цилиндра μ . Вокруг цилиндра вакуум. Найти:

- напряженность магнитного поля $\vec{H}$;
- индукция магнитного поля $\vec{B}$;
- намагниченность $\vec{J}$;

во всех точках пространства. Рассчитать объёмную и поверхностную плотность молекулярных токов.

Решение:

Ответ: $\vec{H}(r < R_0) = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi = \vec{H}(r > R_0)$, $\vec{B}(r < R_0) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$, $\vec{J}(r < R_0) = \frac{I(\mu-1)}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$, $\vec{B}(r > R_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$, $\vec{J}(r > R_0) = \vec{0}$, $\vec{j}_{\text{мо}} = \vec{0}$, $j_{\text{мп}} = \frac{I(1-\mu)}{2\pi R_0}$.

№6

Условие: Среда состоит из однородного изотропного магнетика и вакуума. Модуль вектора индукция магнитного поля вблизи поверхности магнетика со стороны вакуума равен B . Найти модуль индукции магнитного поля B' в магнетике вблизи его поверхности, если вектор B составляет угол α с нормалью к поверхности раздела магнетика и вакуума (поверхность можно считать плоскостью), а магнитная проницаемость магнетика μ .

Решение:

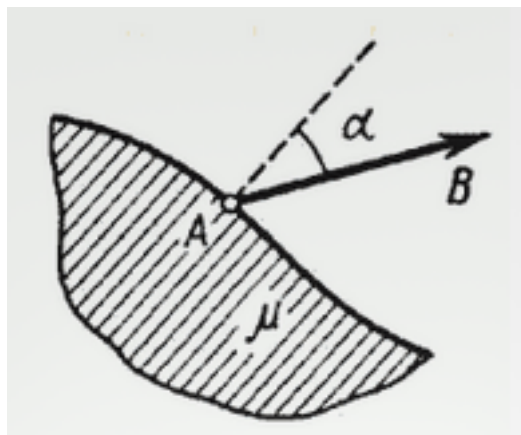


Рис. 26: Поясняющий рисунок.

$$B' = \sqrt{B_n^2 + B_\tau^2} \quad (91)$$

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (92)$$

$$H_{2\tau} = H_{1\tau} \quad (93)$$

$$B_n = B \cos \alpha \quad (94)$$

$$B_\tau = \mu\mu_0 H_\tau = \mu\mu_0 H_{0\tau} = \mu(B)_\tau = \mu B \sin \alpha \quad (95)$$

$$B' = B\sqrt{\cos^2 \alpha + \mu^2 \sin^2 \alpha} \quad (96)$$

Ответ: $B' = B\sqrt{\cos^2 \alpha + \mu^2 \sin^2 \alpha}$.

№7

Условие: Воспользовавшись условиями предыдущей задачи рассчитать циркуляцию вектора $\vec{B}$ по замкнутому квадратному контуру, длина стороны которого l . Граница раздела сред пересекает контур параллельно двум его противоположным сторонам.

Решение:

Ответ: $\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = B \sin \alpha l (1 - \mu)$.

№8

Условие: По длинному цилиндрическому проводу течёт ток перпендикулярно плоскости поперечного сечения. Сила тока I . Провод изготовлен из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ . Найти:

- силу поверхностного молекулярного тока $I'_{\text{пов}}$;
- силу объемного молекулярного тока $I'_{\text{об}}$.

Определить как эти токи направлены друг относительно друга.

Решение: Внутри цилиндрического провода имеется внешний ток плотности $\frac{I}{\pi R^2}$. Это дает магнитное поле H_ϕ с

$$H_\phi 2\pi r = I \frac{r^2}{R^2} \quad \text{или,} \quad H_\phi = \frac{Ir}{2\pi R^2} \quad (97)$$

Из этого $B_\phi = \frac{\mu\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$ и $J_\phi = \frac{\mu-1}{2\pi} \frac{Ir}{R^2} = \frac{\chi I}{2\pi R} dl = \chi I = \text{намагниченность}$.

Следовательно, объемный молекулярный ток,

$$\oint_{r=R} \vec{J}_\phi \cdot d\vec{r} = \int \frac{\chi I}{2\pi R} dl = \chi I \quad (98)$$

Поверхностный ток получается с использованием эквивалентности плотности поверхностного тока к $\vec{J} \times \vec{n}$, это приводит к плотности поверхностного тока в z -направлении $-\frac{\chi I}{2\pi R}$

Поверхностный молекулярный ток

$$I'_{\text{пов}} = -\frac{\chi I}{2\pi R}(2\pi R) = -\chi I \quad (99)$$

Оба тока имеют противоположные знаки.

Ответ: $I_{\text{мо}} = I_{\chi}$, $I_{\text{мп}} = -I_{\chi}$.

№9

Условие: Длинный соленоид заполнен неоднородным парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого зависит от расстояния до оси как $\chi = \alpha r^2$. На оси соленоида магнитная индукция равна B_0 . Рассчитать, как функцию r :

- намагниченность магнетика;
- плотности объемного молекулярного тока.

Решение:

Ответ: $J(r) = \frac{B_0 \alpha r^2}{\mu_0}$, $j(r) = \frac{2\alpha B_0}{\mu_0} r$.

Частица в магнитном поле

№1

Условие: Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью перпендикулярной полю. Напряжённость магнитного поля $H = 103 \text{ А/м}$. Ускоряющая разность потенциалов, придавшая электрону скорость $U = 400 \text{ В}$. Рассчитать радиус кривизны траектории R и частоту ν обращения электрона в магнитном поле.

Решение:

Ответ: $R = \frac{1}{\mu_0 H} \sqrt{\frac{2U}{q_m}} \approx 5.37 \text{ см}, \nu = \frac{\mu_0 H q_m}{2\pi} \approx 35 \text{ МГц}$.

№2

Условие: В однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 0.4 \text{ Тл}$ перпендикулярно полю с постоянной скоростью влетает заряженная частица. В течении 6 мкс включается постоянное электрическое поле напряжённостью $E = 300 \text{ В/м}$ сонаправленно магнитному полю. Рассчитать шаг винтовой траектории частицы после выключения электрического поля.

Решение: По формуле силы Лоренца:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (100)$$

До включения электрического поля:

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (101)$$

Частица движется по окружности

$$F_{\text{маг}} = qvB. \quad (102)$$

Сила Лоренца равна центростремительной силе:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} \quad (103)$$

Угловая частота:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} \quad (104)$$

Когда включается электрическое поле вдоль магнитного поля, на частицу вдоль B действует $F = qE$. Соответственно вдоль оси B ускорение $a = \frac{qE}{m}$.

За время Δt скорость вдоль оси становится:

$$v = a\Delta t = \frac{qE}{m}\Delta t \quad (105)$$

После выключения электрического поля частица летит в магнитном поле с постоянной перпендикулярной скоростью и параллельной, то есть по винтовой траектории.

Расстояние за один оборот:

$$h = vT, \quad (106)$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$ - период кругового движения.

Подставим:

$$h = vT = \frac{qE}{m}\Delta t \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi E\Delta t}{B} \quad (107)$$

Подставим числа:

$$h = \frac{2\pi \cdot 300 \text{ В/м} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ с}}{0.4 \text{ Тл}} \approx 0.28 \text{ м.} \quad (108)$$

Ответ: $h = \frac{2\pi E}{B}t \approx 0.028 \text{ м.}$

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

№1

Условие: В однородное магнитное поле, индукция которого $B = 1$ Тл внесли квадратный контур со стороной $a = 10$ см, по которому течёт ток $I = 100$ А, после чего контур свободно устанавливается в магнитном поле под действием механического момента. Рассчитать работу A' , совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон на угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Решение:

Ответ: $A = BIa^2 = 1$ Дж.

№2

Условие: Магнитное поле создаётся длинным прямым проводником, по которому течёт ток I_0 . В одной плоскости с проводником расположена квадратная рамка с током I , сторона рамки a . Рассчитать:

- силу ампера действующую на рамку;
- работу, которую необходимо совершить при медленном повороте рамки вокруг оси параллельной проводнику на угол 180° , проходящей через центры противоположных сторон рамки;

если расстояние от этой оси до проводника в η раз больше стороны рамки.

Решение:

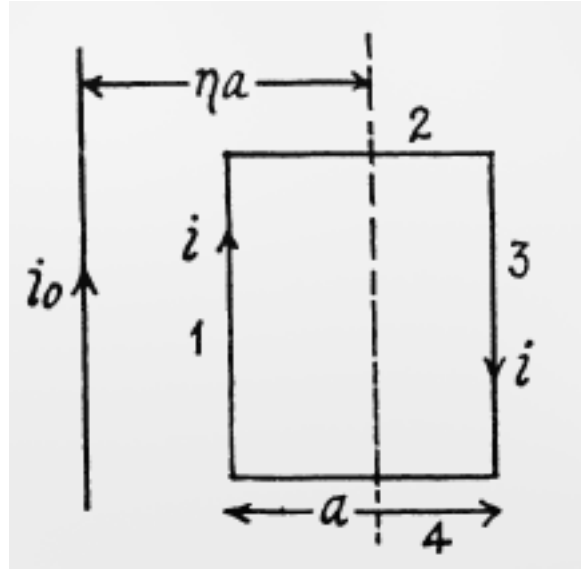


Рис. 27: Поясняющий рисунок.

а) Как видно из условия, силы Ампера на сторонах (2) и (4) равны по величине, но противоположны по направлению. Следовательно, чистая эффективная сила на рамке является результатом сил, испытываемых сторонами (1) и (3).

Теперь сила Ампера на (1),

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II_0}{\left(\eta - \frac{1}{2}\right)} \quad (109)$$

и на (3),

$$F_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 I}{\left(\eta + \frac{1}{2}\right)} \quad (110)$$

Итак, результирующая сила на рамке $= F_1 - F_3$, (поскольку они противоположны).

$$= \frac{2\mu_0 II_0}{\pi(4\eta^2 - 1)} \quad (111)$$

б) Выполненная работа при повороте рамки на некоторый угол $A = \int I d\Phi = I(\Phi_{\text{кон}} - \Phi_{\text{нач}})$, где $\Phi_{\text{кон}}$ - поток через рамку в конечном положении, а $\Phi_{\text{нач}}$ - в исходное положение.

Итак, $|\Phi_{\text{кон}}| = |\Phi_{\text{нач}}| = \Phi$ и $\Phi_{\text{нач}} = -\Phi_{\text{кон}}$ значит,

$$\Delta\Phi = 2\Phi \text{ и } A = I2\Phi \quad (112)$$

Следовательно

$$A = 2I \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2I \int_{a(\eta-\frac{1}{2})}^{a(\eta+\frac{1}{2})} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 a}{r} dr = \frac{\mu_0 I I_0 a}{\pi} \ln\left(\frac{2\eta+1}{2\eta-1}\right) \quad (113)$$

Ответ: $F_A = \frac{2\mu_0 I I_0}{\pi(4\eta^2-1)}$, $A = \frac{\mu_0 I_0 I a}{\pi} \ln\left(\frac{2\eta+1}{2\eta-1}\right)$.

Электромагнитная индукция

Индукция токов. Закон электромагнитной индукции Фарадея

№1

Условие: В однородном магнитном поле, с индукцией модуль которой B , расположен замкнутый контур (Рис. 28). Верхнюю часть контура, представляющую с собой полуокружность радиуса R_0 вращают вокруг оси OO' с постоянной угловой частотой ω . Найти э.д.с. индукции возникающую в контуре, как функцию времени, если в момент $t = 0$ магнитный поток через контур максимальный.

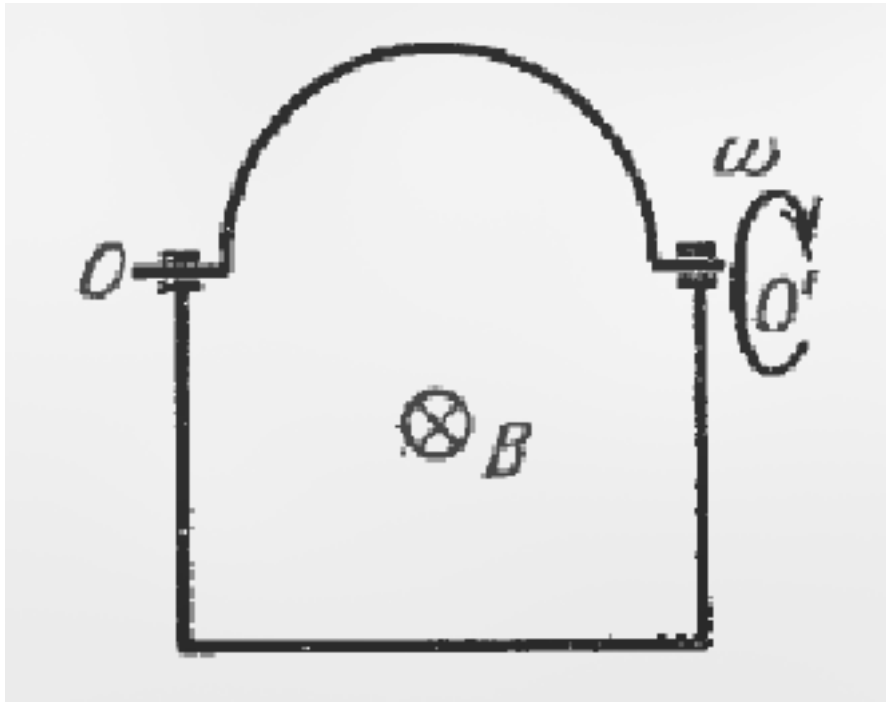


Рис. 28: Контур.

Решение:

Ответ: $\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{\pi}{2} R_0^2 B \omega \sin \omega t$.

№2

Условие: В однородном магнитном поле, модуль индукции которого $B = 0.4$ Тл, с постоянной частотой $\nu = 480$ об/мин вращается замкнутая рамка, состоящая из $N = 1000$ витков проволоки. Площадь ограниченная контуром рамки $S = 200$ см². Рассчитать значение эдс индукции в момент, когда угол между нормалью к рамке и вектором магнитной индукции равен 30° .

Решение:

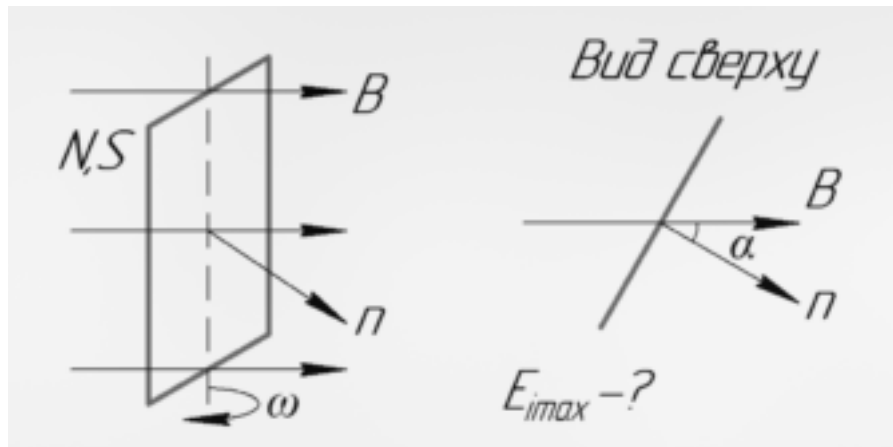


Рис. 29: Поясняющий рисунок

В общем случае магнитный поток Φ через некоторую плоскую поверхность, помещенную в однородном магнитном поле, можно определить по такой формуле:

$$\Phi = BS \cos \alpha \quad (114)$$

В этой формуле B - индукция магнитного поля, S - площадь поверхности, через которую определяется магнитный поток, α - угол между нормалью к площадке и вектором магнитной индукции.

Если учесть, что рамка имеет N витков обмотки, при этом сама рамка вращается в поле с некоторой угловой скоростью ω , то формула 114 примет следующий вид:

$$\Phi = NBS \cos \omega t \quad (115)$$

Согласно закону Фарадея для электромагнитной индукции, ЭДС индукции, возникающая в контуре при изменении магнитного потока, пересекающего этот контур, равна по модулю скорости изменения магнитного потока (то есть первой производной функции изменения потока от времени):

$$\varepsilon_i = -\Phi'(t) \quad (116)$$

Тогда

$$\varepsilon_i = -(NBS \cos \omega t)' = NBS\omega \sin \omega t \quad (117)$$

Угловая скорость вращения ω связана с частотой вращения ν по такой формуле:

$$\omega = 2\pi\nu \quad (118)$$

Получим окончательную формулу:

$$\varepsilon_i = NBS2\pi\nu \sin 2\pi\nu t \quad (119)$$

Мы знаем, что $\omega t = 30^\circ$. Тогда:

$$\varepsilon_i = NBS2\pi\nu \sin 30^\circ = NBS2\pi\nu \frac{1}{2} = NBS\pi\nu \quad (120)$$

Подставим числа и получим:

$$\varepsilon_i = 1000 \cdot 0.4 \cdot 0.02 \cdot \pi \cdot \frac{480}{60} \approx 201 \text{ В} \quad (121)$$

Ответ: $\mathcal{E}_{\text{инд}} = NBS\nu\pi \approx 201 \text{ В}$.

№3

Условие: В однородном магнитном поле, модуль индукции которого $B = 0.1 \text{ Тл}$ расположен плоский проволочный виток, замкнутый на гальванометр. Площадь ограниченная контуром витка $S = 10^{-2} \text{ м}^2$. В начальный момент времени плоскость витка располагалась перпендикулярно магнитному полю. После поворота витка на некоторый угол α , через гальванометр прошёл заряд $q = 7.5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$. Рассчитайте угол α на который повернули виток если его сопротивление $R = 2 \text{ Ом}$.

Решение: Проволочный виток (замкнутый контур) в магнитном поле. Магнитный поток, пронизывающий контур, находящийся в магнитном поле:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha. \quad (122)$$

При повороте витка, меняется угол, поэтому меняется магнитный поток, что приводит к возникновению ЭДС индукции. За время поворота Δt по витку пройдет заряд:

$$q = I \cdot \Delta t, \quad (123)$$

здесь I - сила индукционного тока. Воспользуемся законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R}, \quad (124)$$

ЭДС индукции, согласно закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (125)$$

$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ - изменение магнитного потока. $\Phi_1 = BS$, т.к. по условию угол между нормалью к контуру и индукцией поля равен нулю.

$$\Phi_2 = B \cdot S \cdot \cos \alpha, \quad (126)$$

$$q = \frac{\varepsilon_i}{R} \Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{B \cdot S \cdot \cos \alpha - B \cdot S}{R} \quad (127)$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{q \cdot R + B \cdot S}{B \cdot S} \right| = 1 - \frac{q \cdot R}{B \cdot S} \quad (128)$$

Ответ: $\alpha = 1 - \frac{Rq}{BS} \approx 120^\circ$.

№4

Условие: К источнику сторонних эдс сопротивление которого пренебрежимо мало, а $\varepsilon_0 = 2$ В подключили соленоид индуктивность которого $L = 0.1$ Гн, а сопротивление $R = 0.02$ Ом. Рассчитать заряд, который пройдёт через соленоид за первые 5 с.

Решение:

Ответ: $q = \frac{\varepsilon}{R} \left(t + \frac{L}{R} (\exp[-\frac{R}{L}t] - 1) \right) \approx 184$ Кл.

№5

Условие: Квадратная рамка со стороной $a = 70$ см помещена в магнитное поле так, что нормаль к рамке составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с направлением магнитного поля. Индукция магнитного поля меняется по закону $B = B_0 \cos \omega t$, где $B_0 = 0.2$ Тл, $\omega = 6\text{с}^{-1}$. Рассчитать ЭДС индукции, возникающей в рамке в момент времени $t = 3$ с.

Решение:

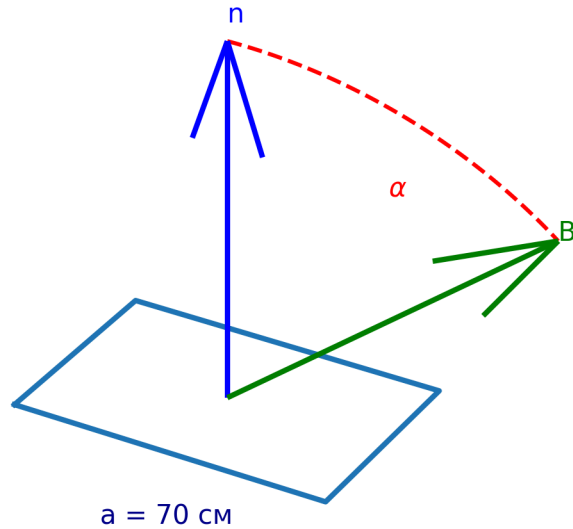


Рис. 30: Квадратная рамка в переменном магнитном поле.

По формуле магнитного потока через плоскость:

$$\Phi = BS \cos \alpha \quad (129)$$

Площадь рамки:

$$S = a^2 \quad (130)$$

Так как $B = B_0 \cos(\omega t)$:

$$\Phi = B_0 a^2 \cos \beta \cos(\omega t) \quad (131)$$

По закону Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\Phi'(t) = B_0 a^2 \omega \cos \beta \sin \omega t \quad (132)$$

Подставив числа из условия, получим:

$$\mathcal{E} = 0.2 \cdot 0.7^2 \cdot 6 \cdot \cos(45^\circ) \cdot \sin(6 \cdot 3) \approx -0.31 \text{ В.} \quad (133)$$

Ответ: $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0 \omega \sin(\omega t) \approx -0.31 \text{ В.}$

№6

Условие: В прямом бесконечном проводнике течёт ток, сила которого меняется по закону $I = \beta t^3$, где $\beta = 2 \text{ А/с}^3$. В одной плоскости с проводником, параллельно ему, расположена квадратная рамка, сторона которой $a = 20 \text{ см}$, а сопротивление материала рамки $R = 7 \text{ Ом}$. Расстояние от ближайшей стороны рамки до проводника $l = 20 \text{ см}$. Рассчитать силу тока в рамке в момент времени $t = 10 \text{ с}$.

Решение:

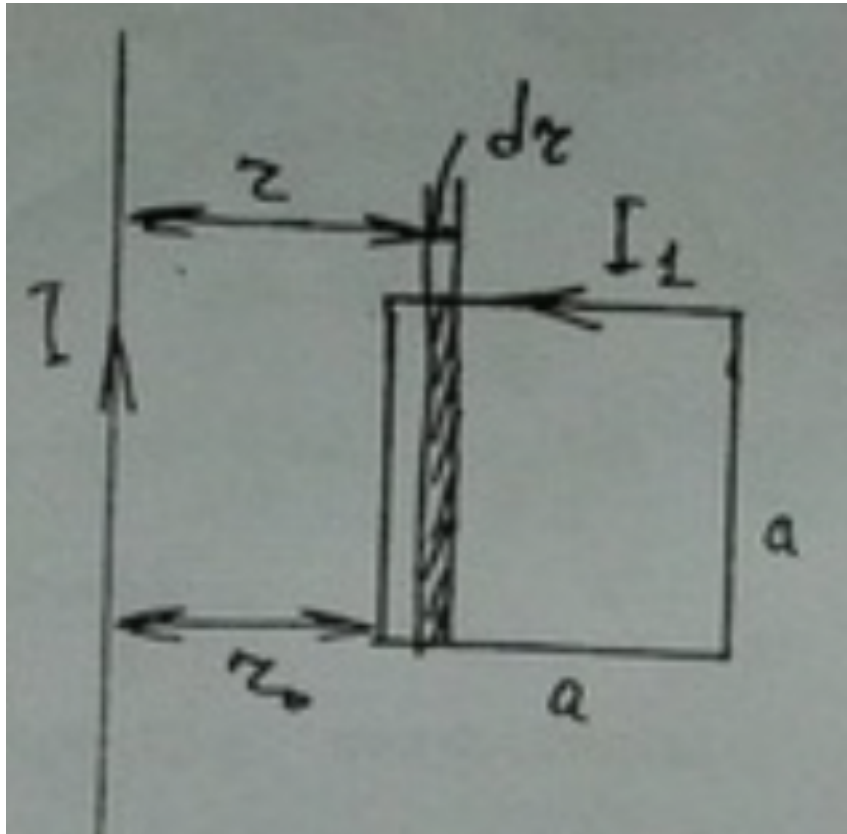


Рис. 31: Поясняющий рисунок.

Магн. индукция поля, создаваемого бесконечным проводником:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (134)$$

Найдем поток этого магнитного поля сквозь контур:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_l^{l+a} B \cdot a \cdot dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \int_l^{l+a} \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \end{aligned} \quad (135)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \frac{dI}{dt} \quad (136)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta t^3) = 3\beta t^2 \quad (137)$$

$$\varepsilon = -\frac{3\mu_0 \beta a t^2}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \quad (138)$$

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{3\mu_0 \beta a t^2}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right) \quad (139)$$

Подставим числа и получим:

$$I = \frac{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 0.2 \cdot 10^2}{2\pi \cdot 7} \ln\left(1 + \frac{0.2}{0.3}\right) \approx 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ А.} \quad (140)$$

Ответ: $I = \frac{3\mu_0 a \beta}{2\pi} \log\left(1 + \frac{a}{l}\right) t^2 \approx 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ А.}$

№ 7

Условие: П-образный проводник расположен в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости проводника. Магнитная индукция поля изменяется с постоянной скоростью β . Вдоль параллельных сторон проводника с постоянным ускорением a перемещают проводник перемычку, длина которой l . Рассчитать эдс индукции через время t после начала перемещения перемычки, если в начальный момент времени и индукция и площадь контура равны 0.

Решение: Площадь контура как функция времени:

$$S(t) = l \cdot s(t) = l \cdot \frac{a \cdot t^2}{2} \quad (141)$$

Индукция магнитного поля как функция времени:

$$B(t) = \beta t \quad (142)$$

ЭДС индукции (без учетного знака):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left| \frac{d}{dt} \Phi \right| = \left| \frac{d}{dt} (B(t) \cdot S(t)) \right| = \left| \frac{d}{dt} \left[\beta t \left(l \cdot \frac{a \cdot t^2}{2} \right) \right] \right| = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \beta \cdot t^2 \cdot l \cdot a. \end{aligned} \quad (143)$$

Ответ: $\varepsilon = -\frac{3l\beta a}{2}t^2$.

№8

Условие: Внутри длинного соленоида расположена катушка состоящая из N витков. Площадь поперечного сечения катушки S . Катушку поворачивают с постоянной угловой скоростью ω вдоль оси совпадающей с её диаметром и перпендикулярной к оси соленоида. Рассчитать эдс индукции в катушке если, индукция магнитного поля в соленоиде изменяется со временем как $B = B_0 \sin(\omega t)$, а в момент времени $t = 0$ ось катушки совпадала с осью соленоида.

Решение: Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, ЭДС индукции в катушке равна

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}, \quad (144)$$

где

- $\phi = N\Phi$ - полное потокоцепление катушки,
- N - число витков,
- Φ - магнитный поток через один виток.

Магнитный поток через один виток определяется выражением

$$\Phi = \int_S B_n dS = \int_S B \cos \alpha dS \quad (145)$$

где

B_n - проекция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$ к плоскости витка, α - угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{n}$.

Поскольку катушка вращается с угловой скоростью ω , угол между нормалью к витку и направлением магнитного поля меняется по закону

$$\alpha = \omega t. \quad (146)$$

В момент времени $t = 0$ ось катушки совпадает с осью соленоида, поэтому $\alpha(0) = 0$.

Поле внутри длинного соленоида однородно, следовательно, магнитный поток через один виток равен

$$\Phi = BS \cos \omega t, \quad (147)$$

где S - площадь витка.

Тогда потокосцепление катушки

$$\phi = N\Phi = NBS \cos \omega t. \quad (148)$$

Если магнитная индукция изменяется со временем по закону

$$B = B_0 \sin \omega t, \quad (149)$$

то

$$\phi = NB_0 S \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} NB_0 S \sin 2\omega t. \quad (150)$$

Теперь найдем ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} NB_0 S \cdot 2\omega \cos 2\omega t = NB_0 S \omega \cos 2\omega t. \quad (151)$$

Ответ: $\varepsilon = B_0 N S \omega \cos(2\omega t)$.

№9

Условие: По длинному прямому соленоиду, радиус сечения которого R и плотностью намотки n , течёт ток, скорость изменения которого от времени равна i . Рассчитать вектор напряжённости вихревого электрического поля, как функцию расстояния r от оси соленоида.

Решение:

Ответ: